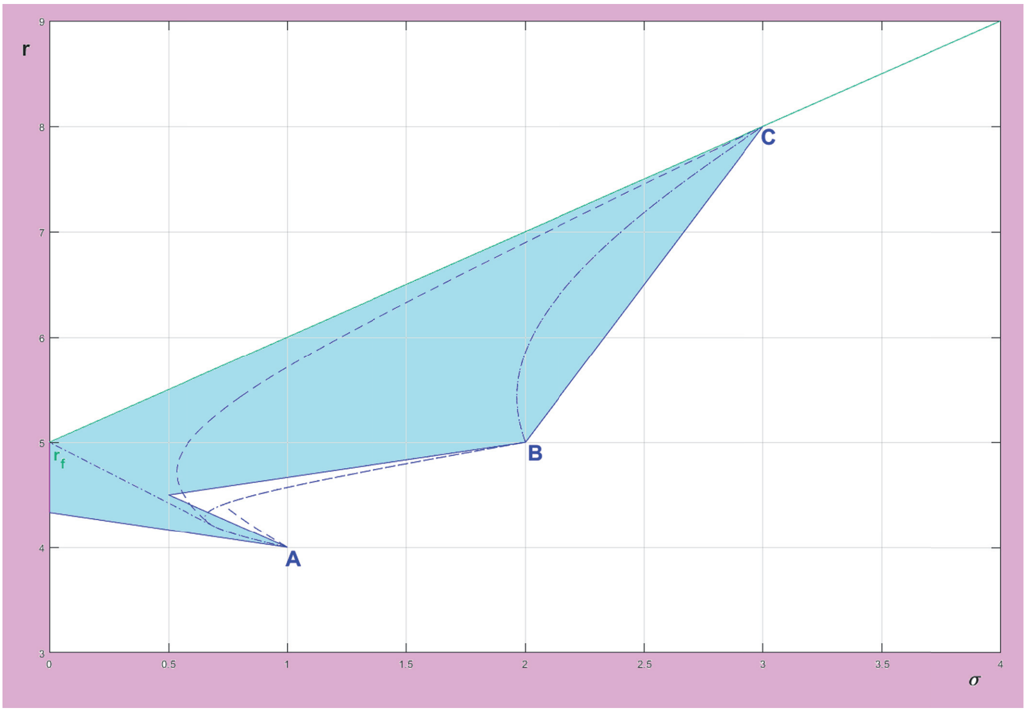
EDÍCIA VYSOKOŠKOLSKÝCH UČEBNÍC

ZÁKLADY FINANČNÍCTVA

Michal Zákopčan



STU FEI
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

SPEKTRUM STU

ZÁKLADY FINANČNÍCTVA

ZÁKLADY FINANČNÍCTVA

Michal Zákopčan

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2024

Dielo sumarizuje základné vedomosti z oblasti financií, predovšetkým z oceňovania základných investičných nástrojov a ich odvodenín. Upozorňuje na úlohu časového aspektu oceňovania a použitia bezarbitrážneho oceňovania. Čitateľovi približuje základné princípy investovania v teórii portfólia. Na vysvetlenie uvádza jednoduché príklady. Vďaka bohatému využitiu základov vysokoškolskej matematiky je vhodné pre študentov technických vysokých škôl s neekonomickým zameraním ako doplnkové štúdium.

Recenzenti: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
doc. RNDr. Zuzana Chladná, Dr.
doc. RNDr. Oľga Nánásiová, CSc.

Schválilo Vedenie Fakulty elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5413-2

Zoznam skratiek

NBS	Národná banka Slovenska
CB	centrálna banka
ECB	Európska centrálna banka
CP	cenné papiere alebo cenný papier
OTC	cez prepážku (over-the-counter)
PV	súčasná hodnota (present value)
NPV	čistá súčasná hodnota (net present value)
FV	budúca hodnota (future value)
p. j.	peňažná jednotka
č. v. r.	členy vyššieho rádu
IRR	vnútorná miera výnosu
IZ	index ziskovosti
NH	nominálna hodnota
EURIBOR	European Interbank Offered Rate
LIBOR	London Interbank Offered Rate
a. s.	akciová spoločnosť
EPS	zisk na akciu (earnings per share)
BVPS	účtovná hodnota vlastného kapitálu na akciu (book value of equity per share)
ROE	návratnosť vlastného kapitálu (return on equity)
NPVGO	čistá súčasná hodnota rastových príležitostí (net present value of growth opportunities)
pp.	pravdepodobnosť
CAPM	model oceňovania kapitálových akcií (capital asset pricing model)
CML	priamka kapitálového trhu (capital market line)
SML	priamka cenných papierov (security market line)
HDP	hrubý domáci produkt
CON	cash-or-nothing
AON	asset-or-nothing
Obr.	Obrázok

Predslov

Jedným z dôvodov vedúcich k napísaniu tejto publikácie boli žiadosti študentov predmetu Základy finančníctva o ucelené zhrnutie teórie s príkladmi demonštrujúcimi jej použitie, ako aj o súhrn úloh, na ktorých by si študenti mohli teóriu lepšie precvičiť, ktoré by boli dostupné na jednom mieste, v jednom súbore. Druhým dôvodom bola snaha poskytnúť študentom názornú ukážku toho, ako možno základnú matematickú teóriu z matematickej analýzy, lineárnej algebry, pravdepodobnosti či matematickej štatistiky, ktorá študentom môže pripadať abstraktná a ťažko uchopiteľná, bohato a často i jednoducho aplikovať v úlohách, ktoré musia riešiť hráči pôsobiaci na finančnom trhu, v prostredí mnoho ráz spojenom s neistotou a neurčitosťou, ale aj civilné osoby v bežnom živote plnom neustáleho finančného rozhodovania.

Aj preto je text publikácie písaný ako matematický text, teda text obsahujúci definície, tvrdenia a ich dôkazy vizuálne odlíšiteľné od zvyšku textu. Pretože ide o publikáciu venujúcu sa predovšetkým finančníctvu, na miestach s väčším množstvom súvislého textu, kde by mohla byť narušená jeho plynulosť, sa definície nových pojmov nachádzajú priamo v texte a sú naznačené zvýraznením definovaného pojmu tučným písmom. Z rovnakého dôvodu niektoré tvrdenia či odvodenia sú zasadené priamo do textu.

Publikácia poskytuje základné vedomosti z finančnej oblasti, hlavne z oblasti ohodnocovania základných finančných nástrojov, ako sú dlhopisy a akcie, ale aj niektorých ich derivátov, predovšetkým opcií. Zdôrazňuje časový aspekt ohodnocovania a použitie bezarbitrážneho princípu pri oceňovaní. Čitateľovi približuje základnú teóriu portfólia. Informuje o tom, akým spôsobom riziko averzný investor rozkladá riziko a tvorí svoje optimálne portfólio. Pre lepšie objasnenie uvádza jednoduché príklady. Matematický aparát, ktorý pri tom využíva, je redukovaný na základy vysokoškolskej matematiky, bežne prednášané na väčšine technických vysokých škôl na Slovensku. Práve preto je učebnica vhodná pre študentov týchto škôl s neekonomickým zameraním ako doplnkové štúdium.

Hoci pri modelovaní, odvodzovaní a oceňovaní sa primárne využívajú základné vysokoškolské matematické znalosti, niektoré kapitoly a podkapitoly (napríklad časti 4.3.3, 6.14) učebnice využívajú náročnejšie matematické postupy, a preto pri popise problému, ani pri odvodzovaní postupu riešenia nejdú priveľmi do hĺbky. Sú v učebnici umiestnené predovšetkým na obohatenie vedomostí čitateľa, ktorý by o ne prejavil záujem. Zároveň ale odporúčame využiť na získanie ďalších informácií aj iné zdroje. Z podobných dôvodov sa v učebnici nachádzajú niektoré ďalšie kapitoly, resp. podkapitoly (napr. časti 4.1.5, 4.3.7, 5.8, 6.12, 6.13), ktoré predstavujú bonusový text k základnému rámcu publikácie, vhodne ho dopĺňajú a sceľujú.

Obsah

Kapitola 1

Úvod do finančníctva

V úvodnej kapitole tejto učebnice sa budeme venovať základným pojmom, ktoré súvisia s finančným svetom, obchodovaním a finančníctvom ako takým. Je prirodzené umiestniť na úvodné stránky definície týchto pojmov, aby sme vďaka nim čitateľovi pomohli zorientovať sa vo svete financií a finančníctva, aby mu pomohli objasniť prípadné nejasnosti a aby sme sa im mohli plnohodnotne venovať v ďalších súvislostiach. Na lepšie pochopenie sú mnohé z nasledujúcich definícií ďalej podrobne rozvinuté, prípadne doplnené ilustračnými príkladmi.

1.1 Definície základných pojmov

Čo máme na mysli pod pojmom finančníctvo? **Finančníctvo** chápeme ako **vedu o financiách**. Takže, ak sa chceme niečo dozvedieť o finančníctve, mali by sme najprv definovať pojem financie. Financie môžeme definovať takto:

Definícia 1.1. ***Financie***
Financiami rozumieme sústavu peňažných vzťahov, do ktorých vstupujú ekonomické subjekty (podniky, domácnosti, štátne inštitúcie, finančné i nefinančné inštitúcie) pri získavaní zdrojov, ich investovaní, zveľaďovaní svojho finančného i nefinančného majetku a pri ich spotrebúvaní.

Alternatívne by sme mohli povedať, že financiami chápeme štúdium toho, ako ekonomické subjekty získavajú, investujú a míňajú peniaze. Zavedením tejto definície (ako aj jej alternatívy) sa vynárajú ďalšie otázky. Aby sme boli schopní na ne odpovedať, museli by sme ísť až na dreň všetkých neznámych finančných/ekonomických pojmov obsiahnutých v jej znení. Namiesto ďalších definícií jednotlivé pojmy objasníme na nasledujúcom ilustračnom príklade pre domácnosť.

Predstavme si domácnosť majúcu dvoch rodičov a dvoch potomkov, ktorí ešte nie sú zárobkovo činní a teda finančne sebestační. Získavanie zdrojov sa v takom prípade uskutočňuje prostredníctvom práce rodičov, ktorí za ňu poberajú plat. Iné finančné zdroje domácnosti môžu pochádzať z pôžičiek (napr. hypotekárna pôžička alebo spotrebný úver) či z rôznych investícií (ako napr. renta plynúca z prenájmu ďalšieho bytu). Získané prostriedky sú potom míňané na rôzne nákupy súvisiace s krátkodobým alebo dlhodobým chodom domácnosti (napr. nákupy predmetov bežnej spotreby, nákupy zariadenia domácnosti, nákup auta, nehnuteľnosti, ale aj splátky za prenájom, vodu, plyn, elektriku a pod.) alebo investície (napr. rekvalifikačný kurz pre otca, jazykový kurz pre matku, investícia do vzdelania detí, nákup investičných fondov, nákup nehnuteľnosti za účelom prenajímania a iné). Takto získaný hmotný majetok rodina využíva na rôzne, zväčša spotrebné účely. Prípadne ide o produktívne využívanie najetku, ako je to napríklad pri nákupe nového auta a jeho využití na cestu do práce. Krátkodobé a dlhodobé investície spomínané vyššie zase zhodnocujú kapitál a môžu priniesť zlepšenie finančnej situácie rodiny. Ak sa obmedzíme na sledovanie chodu domácnosti v časovom období jedného mesiaca („od výplaty k výplate"), tak pozorujeme, že po zaplatení všetkých výdavkov/nákladov to, čo ostane, môže rodina opätovne investovať, prípadne si odložiť na dovolenku, či na iné jednorazové výdavky.

Teória financií sleduje, ako ekonomické subjekty nakladajú s finančnými prostriedkami, ako ich umiestňujú v čase. Čas zohráva vo financiách a v ekonómii všeobecne veľmi dôležitú úlohu, pretože dĺžka časového obdobia investície vplýva na rôzne sledované faktory investície, ako napr. návratnosť, rizikovosť či zhodnotenie investície, a tým nepriamo určuje hodnotu peňazí. Viac si o úlohe času vo financiách povieme v ďalších častiach tejto kapitoly.

Všetky ekonomické subjekty uskutočňujú svoje finančné rozhodnutia prostredníctvom súboru trhov a inštitúcií zaoberajúcimi sa redistribúciou aktív a prerozdelením rizík vytvárajúc tak **finančný systém**.

Definícia 1.2. ***Finančný trh***
Finančný trh je súbor vzťahov a nástrojov, ktoré umožňujú sústreďovanie, rozmiestňovanie a prerozdeľovanie dočasne voľných peňažných prostriedkov na základe ponuky a dopytu.

Subjekty finančného trhu:

- veritelia (majitelia úspor),
- dlžníci (vypožičiavatelia),
- sprostredkovatelia (bankové, nebankové inštitúcie, fondy),
- regulačné inštitúcie (u nás Národná banka Slovenska),
- organizátori trhu (u nás Burza cenných papierov v Bratislave).

Veritelia tvoria stranu ponuky finančných zdrojov. Ide o majiteľov peňažných prostriedkov, ktoré sú ochotní požičať dlžníkom. Tí tvoria stranu dopytu po finančných prostriedkoch. Medzi nimi stojí sprostredkovateľ, napr. banka. Aj banky však môžu byť ako veriteľmi, tak dlžníkmi. Príkladmi sprostredkovateľov nebankového typu sú maklérske a brokerské firmy, poisťovne alebo inštitucionálni investori, napr. fondy. Trh môže organizovať organizátor trhu, napr. burza cenných papierov. Na trhu sa obchoduje s cennými papiermi. K svetovo najznámejším patria londýnska burza, newyorská burza či tokijská burza. Obchody však môžu prebiehať aj voľne, t. j. mimo burzy. V takom prípade hovoríme o obchode/trhu cez prepážku. Výraz pochádza z anglického *over the counter* a zvykne sa používať jeho skratka OTC. O tom, ako organizovať trh v duchu zákonov danej krajiny, rozhoduje regulátor. V prípade Slovenskej republiky je to Národná banka Slovenska (ďalej NBS), v minulosti Úrad pre finančný trh. Na trhu existujú tiež spoločnosti zaoberajúce sa zberom a analýzou dát z trhu, ratingové agentúry či poradenské spoločnosti.

Snahou **veriteľov** je minimalizovať riziko a maximalizovať likviditu a výnos. Likvidita je daná rýchlosťou, akou možno kapitál premeniť na peniaze a istotou ohľadne jeho peňažnej hodnoty po premene v závislosti od ponuky a dopytu. Veriteľ vyhodnocuje riziko vo vzťahu k výnosu a likvidite. Ide o rôzne riziká, predovšetkým však tieto:

- riziko úpadku dlžníka (podnikateľské riziko),
- riziko zníženia hodnoty kapitálu (vplyv inflácie),
- riziko zníženia príjmu zo zapožičaného kapitálu (vplyv úrokovej/výnosovej miery),
- riziko spojené s potrebou rýchlej návratnosti úveru (súvisí s likviditou).

Pri podnikateľskom riziku sa veriteľ snaží čo možno najpodrobnejšie zoznámiť s finančnou situáciou dlžníka, prípadne možnosťami vymáhania nesplatených peňažných prostriedkov. Rozliční veritelia na to využívajú rôzne nástroje. Ako príklad uvádzame úverový register. Je to register informácií o (bankových) klientoch, ktorí žiadali, čerpali, aktuálne čerpajú úver alebo vystupujú v úverovom vzťahu ako ručitelia. O každej osobe vedenej v úverovom registri je zrejmé, či spláca riadne a včas svoje záväzky. Prevádzkovateľom registra je spoločnosť Slovak Banking Credit Bureau (SBCB) s. r. o., ktorá je vlastnená Slovenskou sporiteľňou a. s., Všeobecnou úverovou bankou a. s. a Tatra bankou a. s. Tieto bankové inštitúcie sú zároveň spoluzakladateľmi registra. V súčasnosti má register 18 členov a tvoria ho popredné slovenské banky. [28]

Dlhodobo pozorované zvyšovanie úrovne cenovej hladiny (rast cien) takisto vplýva na hodnotu zapožičaného kapitálu. Vyššie ceny za rovnaký tovar alebo službu v budúcnosti znamenajú, že za rovnaký obnos bude možné v budúcnosti kúpiť menej. Riziko zvýšenia cien má tak nezanedbateľný vplyv na rozhodovanie veriteľov ohľadom toho, na akú dlhú dobu peniaze požičať a aký úrok požadovať, prípadne v akej mene pôžičku uskutočniť. Napr. na Slovensku bol v roku 2020 medziročný nárast inflácie približne 2 %. V roku 2021 bol tento nárast približne 3 % a v roku 2022 inflácia dosahovala úroveň až 12,5 %. [26]

Na riziko zníženia príjmu zo zapožičaného kapitálu vplývajú úrokové, resp. výnosové sadzby, ktoré, pokiaľ nie sú na dobu pôžičky fixované, môžu v čase kolísať. Ich (výrazný) pokles môže viesť k (výrazným) stratám na príjme zo zapožičaného kapitálu. Napr. podiel na zisku akciovej spoločnosti je akcionárom (držiteľom akcií) vyplácaný prostredníctvom dividend. Prípad zlého hospodárskeho výsledku firmy v danom roku, či zmeny firemnej politiky, môže znamenať pokles dividendy, prípadne aj jej úplné nevyplatenie.

Návratnosť úveru je pre veriteľa tiež dôležitá, keďže súvisí s likviditou. Napr. investícia do umeleckého diela alebo nehnuteľnosti je obyčajne dlhodobá, pretože v prípade potreby okamžitého návratu investovaných peňažných prostriedkov späť veriteľovi, môže dôjsť k problému nájsť rýchlo vhodného kupca. To môže viesť k predaju pod cenu.

Snahou **dlžníkov** je minimalizovať finančné náklady spojené s pôžičkou a maximalizovať dĺžku obdobia pôžičky, tzn. požičať si čo najviac, na čo najdlhšie a s čo najnižším úrokom.

Sprostredkovatelia sústreďujú ponuku a dopyt, t. j. spájajú veriteľov s dlžníkmi a pomáhajú im uzavrieť obchod. Agregujú úspory, transformujú riziká a dobu splatnosti. Medzi sprostredkovateľov patria:

- banky,
- vzájomné družstvá a záložne,
- investičné spoločnosti a investičné fondy,
- maklérske a brokerské spoločnosti,
- poisťovne.

Banky patria k najväčším finančným sprostredkovateľom. Existuje mnoho delení bánk, základné delenie je na retailovú a investičnú banku.

Retailová banka zbiera vklady a poskytuje úvery prevažne retailovej klientele, tzn. spotrebiteľom a jednotlivcom. Môže však obsluhovať aj korporátnu klientelu. Jej základný výnos plynie z rozdielu medzi úrokmi na úvery a na vklady. Okrem toho poskytuje veľa platených služieb, napr. vydávanie šekov, platobných kariet, sprostredkovateľské služby a pod.

Investičná banka poskytuje služby pri získavaní zdrojov firiem, emisiách dlhopisov. Poskytuje investičné poradenstvo pre firmy, prípadne pre bohatých klientov. Spravuje podielové fondy, t. j. zbiera vklady (podiely) a investuje podľa preddefinovanej stratégie.

Medzi malé peňažné ústavy patria **vzájomné družstvá a záložne**. Prostriedky získavajú z vkladov, poskytujú najmä spotrebné pôžičky.

Investičné spoločnosti a investičné fondy sú právnické osoby, ktoré zhromažďujú peňažné prostriedky iných osôb na kolektívne investovanie. Kolektívnym investovaním vedia potenciálne zvýšiť výnos oproti situácii, keď by investoval každý z ich klientov samostatne. Prípadne sú schopné znížiť riziko investície jej vhodnou diverzifikáciou, t. j. rozvrhnutím nákupu jednotlivých aktív. Za svoje služby im klienti platia alebo odstupujú časť výnosov.

Maklérske a **brokerské spoločnosti** pôsobia na trhu ako sprostredkovatelia pri predaji finančných produktov iných spoločností, napr. cenných papierov. Ich úlohou je radiť investorom, do čoho investovať, aké portfólio investičných produktov vytvoriť.

Poisťovne plnia v trhovej ekonomike úlohu stabilizátora životnej úrovne obyvateľstva a ekonomickej úrovne podnikov v prípade neočakávanej náhodnej udalosti. Uzatvárajú kontrakty na majetkové (neživotné) a zdravotné, úrazové (životné) poistenie. Prostredníctvom uzavretia kontraktov umožňujú domácnostiam a podnikom prenos presne špecifikovaných rizík. Zisk z poplatkov za poistenie obyčajne investujú do rôznych aktív.

Organizátori trhu zabezpečujú likviditu trhu. Taktiež sústreďujú ponuku a dopyt. Stanovujú trhovú cenu a vytvárajú sekundárny trh, t. j. trh, na ktorom sa obchoduje s už vydanými cennými papiermi. Jediným organizátorom trhu s cennými papiermi na Slovensku je Burza cenných papierov v Bratislave, a. s. (BCPB). [27]

Regulačnou inštitúciou je na Slovensku NBS. NBS je centrálnou bankou (ďalej aj CB), t. j. bankou štátu a bankou bánk. Jej úlohou je robiť zúčtovanie bánk, vykonávať nad nimi dohľad, spravovať štátne rezervy. Centrálna banka určuje menovú politiku krajiny, vydáva peniaze a riadi ich obeh, emituje štátne dlhopisy. Vstupom Slovenska do eurozóny v roku 2009 prebrala zodpovednosť za menovú politiku od NBS ako centrálnej banky Slovenska Európska centrálna banka sídliaca vo Frankfurte nad Mohanom (ďalej ECB).

Ďalším kľúčovým pojmom, s ktorým budeme pracovať je cenný papier. Môžeme ho definovať takto:

Definícia 1.3. ***Cenný papier***
Cenný papier je listina potvrdzujúca majetkové právo vlastníka na určité plnenie od toho, kto cenný papier emitoval/vydal.

Obchodovanie s cennými papiermi prebieha na trhu cenných papierov. Podľa predmetu odchodu tento trh delíme na:

- peňažný trh,
- kapitálový trh,
- devízový trh,
- trh drahých kovov.

Na **peňažnom trhu** sa obchoduje predovšetkým s krátkodobými (do 1 roka) cennými papiermi (ďalej tiež CP). Trh sa vyznačuje veľkým objemom transkacií. Krátkodobé cenné papiere sú charakteristické nízkym výnosom, ale aj nízkym rizikom a vysokou likviditou. Peňažný trh sa ďalej delí na:

- diskontný trh (šeky a zmenky),

- medzibankový trh,
- trh depozitných certifikátov.

Kapitálový trh je trh strednodobých (1 až 5 rokov) a dlhodobých (nad 5 rokov) cenných papierov. S tým súvisí nižšia likvidita cenných papierov, zväčša vyšší výnos, ale i riziko. Na **devízovom trhu** sa obchoduje s cudzími menami, na **trhu drahých kovov** s drahými kovmi.

Finančný trh ďalej členíme podľa účastníkov trhu na:

- bankový trh,
- medzipodnikový trh,
- burzový trh,

a podľa nástrojov trhu na:

- úverový trh,
- trh cenných papierov,
- devízový trh.

Pozorný čitateľ si určite všimol, že hoci bolo doposiaľ definovaných a použitých mnoho výrazov, za všetkými sa ako prostriedok výmeny nachádzali peniaze. Odmysliac si prostredníkov na finančnom trhu stoja vlastne len dve strany, ktorých cieľom je zrealizovať spoločný obchod. Sú to veritelia a dlžníci. Veritelia disponujú peňažnými zdrojmi a sú ochotní ich požičať dlžníkom. Samozrejme za túto časovo obmedzenú pôžičku, za toto riziko, ktoré podstupujú, požadujú od dlžníkov jednak vrátenie požičaných peňazí v stanovenom čase, jednak ďalšie výhody či odmeny, napr. vyplatenie úroku z pôžičky alebo iné formy bonusov. Mnoho veriteľov nakupuje od dlžníkov rôzne cenné papiere, dúfajúc, že ich budú môcť neskôr predať za vyššiu cenu, prípadne že im budú prinášať jednorazovú alebo pravidelnú rentu. Preto môžeme namiesto o požičiavaní hovoriť skôr o investovaní finančných prostriedkov zo strany veriteľov. Na druhej strane stoja dlžníci, ponúkajúci svoj tovar alebo službu, ktorého predajom vlastne finančné prostriedky od veriteľov získajú. Rovnako ako veritelia aj dlžníci vstupujú do tejto výmeny peňažných zdrojov so svojimi očakávaniami a cieľmi a podľa toho sa rozhodujú, akou formou peniaze od veriteľov získať, aké nástroje k tomu použiť. Nech už sa na túto výmenu použijú akékoľvek nástroje, v konečnom dôsledku ide o presun peňazí a ich opätovné vrátenie, hoci v čase do splatenia pôžičky môžu byť peniaze dlžníkmi zmysluplne a produktívne využité. Častá (v niektorých prípadoch oprávnená) kritika laikov, ale aj odborníkov smerom k zmyslu týchto tokov peňazí na finančnom trhu by mohla viesť k záverom, že celý finančný trh a finančný svet je nezmyslom, ktorý je ľudstvu v podstate zbytočný. Na druhej strane možnosť požičať si môže pomôcť zlepšovať produkciu, vyvíjať nové, kvalitnejšie produkty, zdokonaľovať technológie, byť stimulom na nabratie odvahy pustiť sa na neprebádané polia vedy, techniky či podnikateľského prostredia a zabezpečiť si podnikateľský úspech, napr. pri nájdení „diery na trhu" s nejakým produktom alebo službou, prípadne cennou pomocou pri zabezpečení bývania – hypotekárny úver na kúpu bytu alebo domu. Samozrejme možnosti splácať úver môžu byť limitované či zmenené nepredvídanou udalosťou alebo iba zlým odhadom, čo zase môže viesť k ďalším zlým rozhodnutiam, nakoniec až bankrotom a vyústiť v rôzne osobné problémy, napr. zdravotné problémy vyplývajúce zo zažitého stresu, do traumy alebo do pocitov individuálneho zlyhania, prerásť až do rodinných problémov či problémov so zákonom. Lenže uvedené možno spájať s každou činnosťou, ktorú človek vyvíja, preto zrejme nie je úplne korektné zvaľovať všetku vinu na peniaze.

1.2 Peniaze a ich história

„Money is better than poverty, if only for financial reasons."[1]
Woody Allen

Táto podkapitola stručne informuje o peniazoch a ich histórii, predovšetkým ako o prostriedku výmeny.

Prvý obchod medzi ľuďmi mal bartrový charakter a pravdepodobne bol medzikmeňový. Niektoré kmene disponovali tovarom, ktorého mali prebytok a iným kmeňom chýbal, a naopak mali nedostatok iných tovarov, ktorých zas tieto kmene mali nadostač. Dochádzalo teda k výmenám tovaru za tovar, napr. soľ za kožušiny alebo mäso, drevo za kamene vhodné na štiepanie a pod. Postupom času sa bezprostredná výmena tovaru za tovar začala čiastočne nahrádzať výmenou za nejaké akceptované platidlo, ktoré slúžilo ako prostriedok výmeny a plnilo vlastne funkciu dnešných peňazí. Boli to napr. kože, mušle, obilie, soľ, neskôr kovy. Možno, že práve potreba zaznamenávať, kto čo od koho dostal a za čo, viedla ku vzniku písma a počtov. Dokonca možno, že počty tu boli ešte skôr ako písmo.

Prvé platidlá však boli zle deliteľné, často podliehajúce znehodnoteniu alebo pokazeniu, prípadne neboli dostatočne atraktívne pre protistranu. Vznikla preto potreba nájdenia stabilného platidla, ktoré nemá tieto nevhodné vlastnosti, a ktoré bude slúžiť ako prostriedok výmeny. Ligotavé drahé kovy sa ukázali najlepšou voľbou a začali sa využívať na razbu mincí. Približne 700 rokov pred Kristom sa v Malej Ázii odlievali mince z bronzu. Neskôr v Lýdii (nachádza sa na území dnešného Turecka) boli vyrábané z elektra, čo je zliatina zlata a striebra. Možno, že ešte skôr razili mince východoázijské kultúry. Na minciach bol obyčajne vyobrazený nejaký znak typický pre vládnúci klan alebo priamo vladár danej krajiny, resp. územia, kde sa mince používali ako platidlo. Jeho podobizeň mala byť zárukou pravosti mince a zábezpeky, že ju možno ako platidlo použiť v oblasti ním spravovanej alebo riadenej. Samozrejme v niektorých problematických alebo hraničných oblastiach mohli peniaze nejakej krajiny nadobudnúť

[1] v preklade: Peniaze sú lepšie než chudoba, už len z finančného hľadiska.

status miestnej meny, ale ho aj rýchlo stratiť v súvislosti s tým, vojsko ktorej krajiny sa v oblasti práve nachádzalo. Často sa práve takéto oblasti vracali k výmennému obchodu, ktorý predstavoval istotu oproti neistej a pre bežných ľudí často neprehľadnej situácii s mincami. To platí aj v súčasnosti a pre ľudí žijúcich na územiach zasiahnutých vojnou alebo prírodnou katastrofou je príznačné, že prestanú používať peniaze a vrátia sa späť k bartrovému obchodu.

Spolu so začatím razby mincí sa objavili aj ich prví falšovatelia. Nezriedka to boli samotní vladári, ktorí mince nefalšovali tajne, ale ohlásili novú menovú politiku krajiny a v súvislosti s ňou ich prvým krokom bolo, že znížili podiel drahého kovu v razených minciach, čím ich znehodnotili. Umožnilo im to však raziť viac a lacnejšie a zároveň sa ľahšie vysporiadať s dlhmi, ktoré ich predchodcovia narobili, alebo so stratou prísunu drahých kovov z ložísk, ktoré ostali vyťažené, či o ktoré prišli v prehratých vojnách.

Navyše na niektorých územiach sa razili mince viacerých druhov – zlaté, strieborné, bronzové, medené. To spôsobovalo, že ľudia preferovali vlastniť mince z drahšieho kovu a radšej sa zbavovali mincí menej hodnotných. Podobnú situáciu vidíme aj v súčasnosti na eurominciach, keď najmenej hodnotné medené jednocentovky, dvojcentovky a päťcentovky ľudia neradi prijímajú, ale radi vydávajú. Obyvatelia niektorých bohatších krajín Eurozóny s vysokou cenovou úrovňou, napr. Fínsko, dokonca medené mince nepoužívajú pri platení vôbec.

Popri minciach, ktoré síce majú atribút vhodného platidla, no sú vo väčších množstvách ťažké, vznikli papierové bankovky. Tie túto nevýhodu nemajú, a preto sú vhodnejšie na uskladnenie alebo na prevážanie. Pôvodne vznikli bankovky práve nato, aby bolo možno vyhnúť sa presunom väčšieho množstvá peňazí z jedného miesta na iné (vzdialené) miesto. Bankovky tento prevoz uľahčovali takým spôsobom, že na jednom mieste ste u osoby-bankára nechali depozit, za ktorý ste dostali listinu potvrdzujúcu uloženie (*nota di banco*) a na inom mieste ste po predložení tejto listiny mohli prostriedky vybrať. V tejto originálnej podobe síce bankovky neplnili úlohu platidla, ale postupom času sa práve na tento účel začali využívať.

Do prvej polovice 20. storočia boli bankovky kryté zlatými rezervami uloženými v centrálnych bankách. Existoval tzv. zlatý štandard, ktorý teoreticky umožňoval akejkoľvek osobe vlastniacej bankovky prísť do centrálnej banky a bankovky zameniť za zlato. Neskôr sa od zlatého štandardu upustilo. Po Brettonwoodskej dohode z roku 1944 prevzal vedúcu úlohu medzi svetovými menami americký dolár, ku ktorému boli postupne naviazané ostatné svetové meny pevnými výmennými kurzami a dolár sa stal rezervnou menou sveta. Hoci bol vymeniteľný za zlato, platilo to len v prípade centrálnych bánk. Brettonwoodsky systém zanikol v roku 1973. Svetové meny prešli k voľným výmenným kurzom. Systém voľných výmenných kurzov funguje s istými obmenami až dodnes.

V súčasnosti peniaze nie sú kryté zlatom, ich hodnotu garantuje centrálna banka a ich používanie sa zakladá na dôvere ľudí v centrálnu banku a finančný systém. Centrálna banka tlačí bankovky a na danom území má na tlač monopol. To znamená, že na území spravovanom centrálnou bankou neexistuje iná mena než tá, ktorú vydáva centrálna banka. Existujú však krajiny, ktoré používajú viac mien. V niektorých krajinách, v ktorých sa používa iba domáca mena, sú ľudia ochotní akceptovať aj platby v inej mene, ktorú uprednostňujú z rôznych dôvodov, napr. žijú v pohraničnej oblasti v blízkosti krajiny, ktorá tú menu používa, alebo radšej než domácu menu preferujú držať finančné prostriedky v silnejšej/stabilnejšej mene.

Okrem tlačených a razených peňazí existujú v súčasnosti peniaze elektronické, ktorých výhodou je, že nemajú žiadnu fyzickú váhu a je jednoduchšie s nimi narábať, napr. platiť platobnou kartou alebo hodinkami. To však predpokladá, že finančné prostriedky sú uložené na účte prislúchajúcom ku karte. Narábať s takýmto účtom z pohodlia domova zase vyžaduje prístup k internetu v ideálnom prípade na počítači s bezpečným softvérom.

Alternatívne meny, ktoré nespravuje žiadna centrálna banka, existujú zväčša v digitálnom priestore. Najznámejšia je kryptomena Bitcoin. Fanúšikovia alternatívnych mien sú presvedčení, že sú lepšou alternatívou, že ich využitie je flexibilnejšie, uloženie a používanie finančných prostriedkov bezpečnejšie (kryptomeny), že vyžadujú „menej štátu“ (prípadne menej kontroly) a možnosť výberu z väčšieho množstva ponúk zase nahráva väčšej konkurencii. Samozrejme aj takýto prístup má svoje úskalia. Vylúčením centrálnej banky z celého procesu sa stráca garancia štátu alebo spoločenstva štátov a možnosť uskutočňovať monetárnu politiku. To môže viesť k nestabilite, znehodnocovaniu meny a strate jej kúpnej sily. Práve krízový rok 2022 ukázal, aké citlivé sú kryptomeny na nálady investorov na finančných trhoch. Ich obavy vyvolané energetickou a hospodárskou krízou viedli k hromadnému zbavovaniu sa kryptomien a k návratu k dlhodobo stabilnejším a bezpečnejším alternatívam držby bohatstva, najmä k drahým kovom.

1.3 Časová hodnota peňazí

Ako bolo predostrené vyššie v tejto kapitole, čas zohráva pri rozhodovaní sa do čoho a koľko investovať dôležitú úlohu. Investor, ktorý uprednostňuje vyššiu likviditu, volí pri investovaní peňažných prostriedkov investíciu na kratšie obdobia a do menej rizikových aktív. Pri investovaní na dlhšie obdobia, napr. pri nákupe viacročných dlhopisov, zas preferuje častejšiu frekvenciu vyplácania kupónov, pretože skorší prísun platieb mu umožňuje tieto peniaze opätovne investovať ďalším spôsobom a potenciálne tak zvýšiť celkový výnos. Snahou investora je teda investovať peniaze tak, aby sa čo najviac zhodnotili a to, na ako dlho je ochotný tieto peniaze poskytnúť dlžníkom, závisí od ďalších okolností a jeho osobných preferencií.

Investícia viazaná na dlhšie časové obdobie sa môže síce viac zhodnotiť, ale platby z nej prichádzajú po dlhšom čase a potenciálne je viac riziková kvôli neistote z budúcnosti. Inými slovami nezáleží len na veľkosti príjmov, ale aj na tom, kedy sa k investorovi dostávajú. Pri investovaní investor zvažuje rôzne možnosti a na základe dostupných informácií a svojich preferencií sa rozhoduje, do čoho, koľko a na ako dlho investovať. Z rôznych projektov vyberá ten, ktorý je v zmysle spomenutého najlepší, pričom pri racionálnom rozhodovaní vždy uprednostní projekt, ktorý pri rovnakom riziku, prípadne likvidite, prináša najvyšší výnos. Ak sa nerozhodne pre ten najlepší, rozdiel medzi výnosom tohto projektu a výnosom realizovaného projektu, chápe ako ušlý zisk. Napr. ponechať peniaze na istý čas zašité vo vankúši nepovažuje za bežných okolností za dobrú voľbu, pretože v okamžiku ich nadobudnutia ich môže investovať, napr. nakúpi dlhopisy, ktoré sú považované za veľmi bezpečné cenné papiere, poskytujúce kladné úrokové sadzby, čím ich za ten istý čas zhodnotí.

Ďalším faktorom vplývajúcim na rozhodovanie sa investora je inflácia, teda rast cien, resp. cenovej hladiny. Rast cien znamená, že to, čo si dnes kúpite napríklad za 100 EUR, bude v budúcnosti stáť viac a teda každé EURO z vášho nákupu bude mať v budúcnosti nižšiu hodnotu. Inými slovami, čím je miera inflácie v ekonomike vyššia, tým menšia je kúpna sila peňazí, ktoré nadobudneme v budúcnosti. Treba však spomenúť, že očakávaná miera inflácie ovplyvňuje úrokové sadzby uplatňované v ekonomike a že je v nich preto do istej miery zakalkulovaná.

Všetky vyššie spomenuté faktory, teda:

- inflácia,
- ušlý zisk (resp. výška výnosu z investovaných peňazí),
- neistota z budúcnosti

vplývajú na to, že peniaze, ktoré sú k dispozícii v súčasnosti, majú vyššiu hodnotu než peniaze, ktoré budú k dispozícii v budúcnosti alebo heslovite:

EURO dnes má väčšiu hodnotu ako EURO zajtra.

Kapitola 2

Úrokovanie

„My interest is in the future because I am going to spend the rest of my life there.“[1]
Charles F. Kettering

Úrokovaním rozumieme výpočet úrokov plynúcich z pôžičky. Majitelia dočasne voľných peňažných prostriedkov, teda veritelia, sú ochotní tieto prostriedky požičať dlžníkom na isté obdobie, tzv. **úrokové obdobie**, ale za túto pôžičku požadujú od dlžníkov kompenzáciu, ktorú nazývame **úrok**. Touto požiadavkou na strane veriteľov úrokovanie v sebe zohľadňuje časovú hodnotu peňazí spomínanú v závere predchádzajúcej kapitoly.

Problematiku úročenia si priblížime na nasledujúcom príklade. Veriteľ požičia na istú dobu T dlžníkovi obnos peňazí vo výške K_0 peňažných jednotiek (v ďalšom p. j.). Nech $T = 1$ rok. Po roku dlžník vráti všetky požičané prostriedky spolu s úrokom u p. j. Teda celkovo zaplatí $K_0 + u$ p. j. Veľkosť úroku sa meria pomocou **úrokovej sadzby** r. Platí $u = rK_0$. Teda ak $r \geq 0$, tak r vyjadruje, ako veľkou časťou z **istiny** alebo **počiatočného kapitálu** K_0 p. j. úrok je. V tomto prípade r vyjadruje ročnú úrokovú sadzbu, pretože sme predpokladali $T = 1$ rok. Ročná úroková sadzba sa tiež označuje p. a., čo je skratka z latinského per annum (teda ročne).

Hoci existujú aj úrokové sadzby za iné **úrokové periódy**, t. j. časové obdobia, za ktoré sa určuje úroková miera, ako napr. polročná – per semestrem (p. s), štvrťročná – per quartatem (p. q.), mesačná – per mensem (p. m.) či týždenná – per septimanam (p. sep.), my budeme v ďalšom výhradne používať ročnú úrokovú sadzbu. Navyše budeme uvažovať iba kladné alebo nulové úrokové sadzby, t. j. $r \geq 0$, ak nebude povedané inak.

Približne od roku 2014 sa v Eurozóne začali objavovať záporné úrokové sadzby na kratšie časové obdobia, napr. na medzibankovom trhu, špeciálne pri poskytovaní úroku centrálnou bankou na vkladoch komerčných bánk, ale tiež pri niektorých štátnych dlhopisoch. Z pohľadu doposiaľ povedaného je táto skutočnosť ťažko interpretovateľná, keďže narúša koncept časovej hodnoty peňazí, teda že EURO dnes má väčšiu hodnotu ako EURO zajtra. Ak totiž chápeme úrokové sadzby ako mieru ceny/hodnoty peňazí, tak záporné úrokové sadzby značia, že ich

[1] v preklade: Zaujímam sa o budúcnosť, pretože v nej hodlám prežiť zvyšok života. *Interest* v preklade tiež znamená úrok.

cena/hodnota časom v nejakom časovo vymedzenom rámci klesá, a že držať peniaze na toto obdobie je nákladné. Inými slovami je výhodné presunúť tento náklad na niekoho iného. Záporné úrokové sadzby súvisia s veľkým množstvom novovytlačených peňazí a dlhodobou expanzívnou politikou centrálnych bánk, špeciálne v Eurozóne s monetárnou politikou ECB.

Rok 2022 však pri nezmenenej, resp. rastúcej inflácii, priniesol výrazný nárast úrokových sadzieb a ich návrat späť do kladných čísel (porovnajte Obr. 4.1 a Obr. 4.2 v kapitole o dlhopisoch). Vrcholiaca pandemická kríza vo svete, predovšetkým však energetická kríza v Európe spojená s vojnou na Ukrajine priviedli finančné trhy do permanentnej neistoty. To viedlo investorov k snahe bezpečnejšie investovať do garantovaných štátnych dlhopisov a kompenzovať riziká zo zapožičiavania peňazí vyššími úrokovými sadzbami.

Veľkosť úrokovej sadzby prepočítaná na percentá sa nazýva **úroková miera** a my ju budeme označovať p. Platí $r = \frac{p}{100}$.

Úrokovanie rozlišujeme **polehotné (dekurzívne)**, v ktorom je úrok splatný na konci obdobia alebo **predlehotné (anticipatívne)**, v ktorom je úrok splatný na začiatku obdobia. V ďalšom budeme pracovať iba s polehotným úrokovaním.

V priebehu času sa vyvinuli rôzne spôsoby úrokovania (diskontovania). V nasledujúcich troch podkapitolách sa budeme venovať jednoduchému, zloženému a spojitému úrokovaniu. Líšia sa navzájom spôsobom výpočtu úroku.

2.1 Jednoduché úrokovanie

Označme súčasnú hodnotu (ďalej aj PV) kapitálu, ktorý požičiava veriteľ dlžníkovi, ako K_0. Nech budúca hodnota (ďalej tiež FV) tohto kapitálu po n rokoch je K_n. Potom budúce hodnoty kapitálu pre rôzny počet rokov a jednoduchom úrokovaní pri ročnej úrokovej sadzbe r môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke:

roky	hodnota kapitálu
nultý rok:	K_0
prvý rok:	$K_1 = K_0 + rK_0 = (1+r)K_0$
druhý rok:	$K_2 = K_1 + rK_0 = (1+r)K_0 + rK_0 = (1+2r)K_0$
$\vdots$	$\vdots$
n-tý rok:	$K_n = (1+nr)K_0$

Môžeme si všimnúť, že výpočet úroku sa deje každý rok len z hodnoty počiatočného kapitálu K_0 p. j. Za n rokov tak pribudne k počiatočnej hodnote K_0 p. j. úrok v celkovej výške $u_n = nrK_0$ p. j. a hodnota kapitálu po n rokoch bude $K_n = K_0 + u_n = (1+nr)K_0$ p. j. Tento výpočet nie je nutné obmedzovať len na počet celých rokov. Za n možno zvoliť aj neceločíselnú hodnotu.

Hodnota $1+nr$ predstavuje úročiteľ. **Úročiteľ** udáva, na koľko vzrastie 1 p. j. pri úrokovej sadzbe r za úrokové obdobie n pri príslušnom type úrokovania. Počiatočný kapitál K_0 p. j. teda na budúcu hodnotu K_n p. j. úročíme. Hodnota $\frac{1}{1+nr}$ je odúročiteľ (diskontný faktor).

Odúročiteľ (diskontný faktor) udáva, aká je súčasná hodnota 1 p. j. úročená pri úrokovej sadzbe r za úrokové obdobie n. Budúcu hodnotu kapitálu K_n p. j. do súčasnosti preto odúročujeme alebo diskontujeme. Takéto diskontovanie sa nazýva matematické diskontovanie. Poznáme aj obchodné diskontovanie, ktoré sa vyvinulo pri obchodovaní so zmenkami, ale v ďalšom sa ním zaoberať nebudeme.

Zo vzťahu pre výpočet úroku pri jednoduchom úrokovaní za obdobie n a pri ročnej úrokovej sadzbe r:

$$u_n = nrK_0 \tag{2.1}$$

vyplýva:

$$K_0 = \frac{u_n}{nr}, \tag{2.2}$$
$$n = \frac{u_n}{rK_0}, \tag{2.3}$$
$$r = \frac{u_n}{nK_0}. \tag{2.4}$$

Zo vzťahu (2.1) pre budúcu hodnotu kapitálu dostaneme:

$$K_n = K_0 + u_n = (1 + nr)K_0. \tag{2.5}$$

Z rovnosti (2.5) získame:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + nr}, \tag{2.6}$$
$$n = \frac{1}{r}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right), \tag{2.7}$$
$$r = \frac{1}{n}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right). \tag{2.8}$$

Nadobudnuté vedomosti precvičíme na nasledujúcom jednoduchom príklade.

Príklad 2.1. *Určme budúcu hodnotu kapitálu* 500 *p. j. úročenom jednoduchým úrokovaním päť rokov pri ročnej úrokovej miere 2 %.*

Riešenie:
Informácie obsiahnuté v zadaní úlohy zhrnieme a zapíšeme:
$\underline{K_0 = 500 \text{ p. j.}, p = 2\ \%, n = 5, K_n =? \text{ p. j.}}$
Najprv vyjadríme hodnotu úrokovej sadzby r:

$$r = \frac{p}{100} = 0,02.$$

Jej dosadením do vzťahu (2.5) získame:

$$K_n = K_0(1+5r) = (500 \text{ p. j.})(1+5.0,02) = 500\left(1 + \frac{5}{50}\right) \text{p. j.} = 500(1+0,1)\text{p. j.} = 550 \text{ p. j.}$$

Odpoveďou teda je, že budúca hodnota kapitálu je 550 p. j.

2.2 Zložené úrokovanie

Podobne ako v predchádzajúcej časti nech K_0 je súčasná hodnota kapitálu a K_n je budúca hodnota tohto kapitálu po n rokoch. Potom budúce hodnoty kapitálu pre rôzny počet rokov a zloženom úrokovaní pri ročnej úrokovej sadzbe r nájdeme v nasledujúcej tabuľke:

roky	hodnota kapitálu
nultý rok:	K_0
prvý rok:	$K_1 = K_0 + rK_0 = K_0(1+r)$
druhý rok:	$K_2 = K_1 + rK_1 = K_1(1+r) = K_0(1+r)^2$
$\vdots$	$\vdots$
n-tý rok:	$K_n = K_0(1+r)^n$

Pri zloženom úrokovaní sa úročia aj úroky, tzn. každý rok sa zúročí všetko dovtedy nadobudnuté. Za n rokov tak pribudne k počiatočnej hodnote K_0 p. j. úrok v celkovej výške:

$$u_n = K_n - K_0 = K_0(1+r)^n - K_0 \text{ p. j.} \tag{2.9}$$

V tomto prípade je potrebné uvažovať n celočíselné, pretože, ak by tomu tak nebolo, $K_n = K_0(1+r)^n$ p. j. by bola iba približná budúca hodnota kapitálu za čas n.

Úročiteľ je v prípade zloženého úrokovania rovný $(1+r)^n$, odúročiteľ je $(1+r)^{-n}$.

Ako vidno z posledného riadku tabuľky, budúca hodnota K_n kapitálu K_0 sa po n rokoch a pri ročnej úrokovej sadzbe r rovná:

$$K_n = K_0(1+r)^n. \tag{2.10}$$

Z toho pre súčasnú hodnotu vyplýva:

$$K_0 = K_n(1+r)^{-n}. \tag{2.11}$$

Pri známom K_0, K_n, n vypočítame r ako:

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1. \tag{2.12}$$

Pri známom K_0, K_n, r vypočítame n ako:

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+r)}. \tag{2.13}$$

Pre ilustráciu uvádzame nasledujúci príklad.

Príklad 2.2. *František Sporivý chce vložiť obnos* 1000 *p. j. na niektorý z termínovaných vkladov v banke. Aspoň aká vysoká musí byť ročná úroková sadzba (zaokrúhlená na štyri desatinné miesta) na to, aby za dva roky hodnota úroku pri zloženom úrokovaní prekročila* 50 *p. j.?*

Riešenie:

$K_0 = 1000$ p. j., $n = 2$, $u_n = K_n - K_0 > 50$ p. j., $r \geq ?$

Zo vzťahu (2.9) máme:

$$u_2 = K_2 - K_0 = 1000\left((1+r)^2 - 1\right) \text{ p. j.}$$

Z toho, že má byť splnené $u_2 > 50$ p. j., dostávame:

$$\begin{aligned} 1000\left((1+r)^2 - 1\right) \text{ p. j.} &> 50 \text{ p. j.} \\ r &> \sqrt{\frac{50}{1000} + 1} - 1 \\ r &\geq 0{,}0247 \end{aligned}$$

Ročná úroková sadzba musí byť aspoň $0{,}0247$.

2.2.1 Porovnanie zloženého a jednoduchého úrokovania

V súčasnom finančnom svete sa častejšie aplikuje zložené úrokovanie než jednoduché, ktoré sa využíva prevažne pri úrokovaní na krátky čas.

Táto podkapitola má za cieľ porovnať budúce hodnoty kapitálu dosiahnuté za rovnaký čas jednoduchým a zloženým úrokovaním pri tej istej ročnej úrokovej sadzbe $r > 0$.

Uvažujme v celých rokoch. Po roku úrokovania sú hodnoty kapitálu dosiahnuté jednoduchým aj zloženým úrokovaním rovnaké. V nasledujúcich rokoch to už neplatí, pretože hodnota úročiteľa pre jednoduché úrokovanie $1+rn$ je pre každé $r > 0$ a každé prirodzené $n > 1$ menšia než hodnota úročiteľa $(1+r)^n$ pre zložené úrokovanie. Uvedené vyplýva z toho, že

$$\begin{aligned} (1+r)^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} r^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} r^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} r^n \\ &= 1 + rn + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} r^2 + \ldots + nr^{n-1} + r^n \qquad (2.14) \\ &> 1 + rn. \end{aligned}$$

Ak predpokladáme aj neceločíselné hodnoty n, a teda zloženým úrokovaním úrokujeme približne, tak situácia ostáva identická pre $n > 1$. Pre $0 < n < 1$ je hodnota úročiteľa pri jednoduchom úrokovaní vyššia než pri zloženom. To vyplýva z toho, že Taylorov rozvoj funkcie $(1+r)^n$ premennej r v bode 0 je nasledujúci:

$$(1+r)^n = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!} r^j = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2!} r^2 + \text{č. v. r.}, \qquad (2.15)$$

kde č. v. r. značí členy vyššieho rádu. Samozrejme pre prirodzené číslo n sú vzťahy (2.15) a (2.14) identické. Pre hodnoty r blízke nule môžeme č. v. r. zanedbať. Teda

$$(1+r)^n \approx 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2!} r^2.$$

Ak $0 < n < 1$, tak $\frac{n(n-1)}{2!} r^2 < 0$ a teda $(1+r)^n < 1 + rn$.

Uvedené, teda $(1+r)^n < 1+rn$, ak $0 < n < 1$, $(1+r)^n = 1+rn$, ak $n = 1$ a $(1+r)^n > 1+rn$, ak $n > 1$, platí aj pre kladné hodnoty r, ktoré nie sú blízke nule. Zhrnieme to v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 2.1. *Ak $n > 0$ je reálne číslo, tak pre každú ročnú úrokovú sadzbu $r > 0$ platí:*

$$\begin{aligned}
(1+r)^n &< 1+rn, && \text{ak } 0 < n < 1;\\
(1+r)^n &= 1+rn, && \text{ak } n = 1;\\
(1+r)^n &> 1+rn, && \text{ak } n > 1.
\end{aligned}$$

Dôkaz. Aby sme to dokázali, stačí vyšetriť monotónnosť funkcie $f(r) = (1+r)^n - (1+rn)$ premennej r na intervale $\langle 0, \infty)$. Vypočítajme prvú deriváciu tejto funkcie, dostaneme:

$$f'(r) = n(1+r)^{n-1} - n = n\left((1+r)^{n-1} - 1\right). \tag{2.16}$$

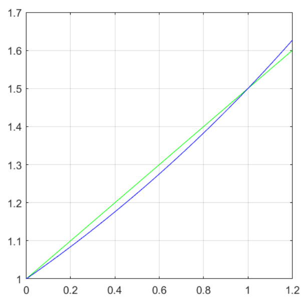
Pre každé $r > 0$ je $1 + r > 1$. Z toho vyplýva, že $(1+r)^{n-1} < 1$, ak $0 < n < 1$. Preto derivácia v (2.16) je pre $0 < n < 1$ záporná pre akékoľvek $r > 0$ a nulová pre $r = 0$. To znamená, že funkcia f je pre $0 < n < 1$ klesajúca na intervale $\langle 0, \infty)$. Keďže $f(0) = 0$, tak pre $0 < n < 1$ platí $(1+r)^n < 1+rn$ pre všetky $r \in (0, \infty)$. Čím väčšia je hodnota r, tým je rozdiel $(1+rn) - (1+r)^n$ pre dané n väčší.

Ak $n = 1$, tak hodnota derivácie v (2.16) je pre všetky r nulová, a teda funkcia f je na $\langle 0, \infty)$ konštantná. Vzhľadom na to, že $f(0) = 0$, tak $f(r) \equiv 0$. Inými slovami pre všetky $r \in \langle 0, \infty)$ platí $(1+r)^n = 1+rn$, ak $n = 1$.

Ak $n > 1$, tak $(1+r)^{n-1} > 1$ a derivácia v (2.16) je pre $n > 1$ kladná pre akékoľvek $r > 0$ a nulová pre $r = 0$. To znamená, že funkcia f je pre $n > 1$ rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$. Keďže $f(0) = 0$, tak pre $n > 1$ platí $(1+r)^n > 1+rn$ pre všetky $r \in (0, \infty)$. Navyše, čím väčšia je hodnota r, tým je rozdiel $(1+r)^n - (1+rn)$ pre dané n väčší.

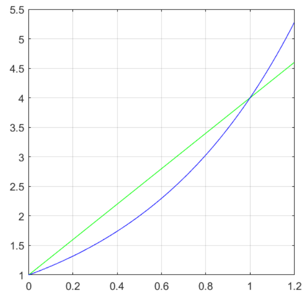
□

Tieto závery môžeme pozorovať na nasledujúcich dvoch obrázkoch. Na Obr. 2.1 je zaznačená hodnotaúročiteľa v závislosti od n pre jednoduché úrokovanie a zložené úrokovanie, ak $r = 0,5$.



Obr. 2.1: Hodnota úročiteľa v závislosti od n pre jednoduché úrokovanie – zelenou; pre zložené úrokovanie – modrou. [32]

Na Obr. 2.2 je zaznačená hodnota úročiteľa v závislosti od n pre jednoduché úrokovanie a zložené úrokovanie, ak $r = 3$.



Obr. 2.2: Hodnota úročiteľa v závislosti od n pre jednoduché úrokovanie – zelenou; pre zložené úrokovanie – modrou. [32]

Ostáva poznamenať, že ak chcete úročiť svoje peniaze na čas kratší ako jeden rok, pýtajte si jednoduché úrokovanie. Ak chcete na čas dlhší ako rok, želajte si úrokovanie zložené.

2.2.2 Zložené úrokovanie s viac konverziami ročne

Ak chceme využiť zložené úrokovanie na iné ako ročné pripočítavanie úrokov, musíme tomu vhodne prispôsobiť výpočet úrokov.

Konverziou rozumieme prípočet úrokov. To znamená, že ak sa deje prípočet úrokov zloženým úrokovaním m-krát za rok, tak hovoríme o **zloženom úrokovaní s m konverziami ročne**. Napr. ak $m = 4$, úroky sa pripočítavajú každý štvrťrok, a teda hovoríme o kvartálnom úrokovaní. Ak $m = 12$, ide o mesačné úrokovanie a ak $m = 365$, ide o denné úrokovanie. Pre jednoduchosť budeme uvažovať, že každý rok má 365 dní, ale výpočty úrokov denným úrokovaním nie je problém prispôsobiť aj pre roky prestupné.

Nech n aj naďalej označuje počet rokov, potom súčin mn je počet úrokových períód. V prípade, že sa úročí dlhšie časové obdobie než n rokov, ale kratšie než $n + 1$ rokov, tak pri uvažovaní m konverzií ročne možno zloženým úrokovaním úročiť kapitál úrokové obdobie $mn + k$ úrokových períód, kde k je celé číslo ležiace medzi hodnotami 0 a m krajné hodnoty vynímajúc. Pri zloženom úrokovaní s m konverziami ročne uvažujeme celočíselný počet períód.

Ak r je ročná úroková sadzba, potom $\frac{r}{m}$ je úroková sadzba za jednu periódu ročnej konverzie.

Zhrnúc predchádzajúce úvahy dostaneme, že budúca hodnota K_n kapitálu K_0 je po n rokoch, pri ročnej úrokovej sadzbe r a m ročných konverziách rovná:

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}. \tag{2.17}$$

Z toho pre súčasnú hodnotu kapitálu vyplýva:

$$K_0 = K_n\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}. \tag{2.18}$$

Pri m konverziách ročne a známych hodnotách K_0, K_n, n vypočítame r ako:

$$r = m\left(\sqrt[mn]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right). \tag{2.19}$$

Pri m konverziách ročne a známych hodnotách K_0, K_n, r vypočítame n ako:

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{m \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right)}. \tag{2.20}$$

Úročiteľ sa v tomto prípade rovná $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}$, odúročiteľ je $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm}$.

Uveďme príklad aj na zložené úrokovanie s m konverziami ročne.

Príklad 2.3. *Vypočítajme súčasnú hodnotu kapitálu* 146, 41 *p. j. úročenom polročným úrokovaním* 2 *roky pri ročnej úrokovej sadzbe* 0, 2.

Riešenie:
$K_n = 146,41$ p. j., $r = 0,2$, $m = 2$, $n = 2$, $K_0 =?$ p. j.
Na výpočet využijeme vzťah (2.18).

$$K_0 = 146,41\left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^{-4} \text{ p. j.} = 100(1,1)^4(1,1)^{-4} \text{ p. j.} = 100 \text{ p. j.}$$

Súčasná hodnota kapitálu je 100 p. j.

2.2.3 Porovnanie zloženého úrokovania s jednou a viac konverziami ročne

V nasledujúcich odstavcoch sa pokúsime dať odpoveď na otázku, či je pre veriteľa výhodnejšie úrokovať zloženým úrokovaním raz alebo viackrát ročne. Na to opäť stačí porovnávať hodnoty úročiteľov pre oba typy úročenia.

Pripomeňme si, že hodnota úročiteľa pri jednom prípise úrokov ročne je $(1 + r)$, kde r je ročná úroková sadzba. V prípade m konverzií ročne je hodnota úročiteľa $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$.

Pretože

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}\frac{r}{m} + \binom{m}{2}\left(\frac{r}{m}\right)^2 + \ldots + \binom{m}{m}\left(\frac{r}{m}\right)^m \\ &= 1 + r + \binom{m}{2}\left(\frac{r}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r}{m}\right)^m > 1 + r,\end{aligned}$$

odpoveďou je, že výhodnejšie je zložené úrokovanie s viac ako jednou konverziou ročne.

Uvedené tvrdenie možno nasledujúcim spôsobom zovšeobecniť.

Tvrdenie 2.2. *Nech* m_1, m_2 *sú také prirodzené čísla, že* $m_1 < m_2$. *Nech* $r \geq 0$ *je ročná úroková sadzba. Potom*

$$\left(1 + \frac{r}{m_1}\right)^{m_1} \leq \left(1 + \frac{r}{m_2}\right)^{m_2}. \tag{2.21}$$

Dôkaz. Ak $r = 0$, tvrdenie je triviálne platné.

Nech teraz $r > 0$ je ľubovoľné, ale fixné. Označme:

$$f_r(m) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m,$$

kde f_r je pre fixné r funkcia premennej m definovaná na intervale $\langle 1, \infty)$. Potom $f_r(1) = 1 + r$ a $f_r(m) > 0$ pre každé $m \in \langle 1, \infty)$.

Derivovaním funkcie f_r podľa premennej m dostávame:

$$f_r'(m) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \left(\ln\left(1 + \frac{r}{m}\right) - \frac{r}{m + r}\right). \tag{2.22}$$

Ukážeme, že $f_r'(m) > 0$ pre každé $m \in \langle 1, \infty)$. Najprv ukážeme, že to platí pre $m = 1$. Pre $m = 1$ máme:

$$f_r'(1) = (1 + r)\left(\ln(1 + r) - \frac{r}{1 + r}\right) = (1 + r)\ln(1 + r) - r. \tag{2.23}$$

Označme $h(r) = (1 + r)\ln(1 + r) - r$, potom $h(0) = 0$ a pre každé $r > 0$ platí:

$$h'(r) = 1 + \ln(1 + r) - 1 = \ln(1 + r) > 0.$$

Z toho vyplýva, že $h(r) > 0$ pre každé $r > 0$ a teda

$$f_r'(1) > 0 \tag{2.24}$$

pre každé $r > 0$.

Označme

$$g_r(m) = \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right) - \frac{r}{m + r}.$$

Výraz $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ je kladný pre všetky $m \in \langle 1, \infty)$ a teda $f_r'(m)$ v (2.22) je kladné, ak $g_r(m) > 0$ pre všetky $m \in \langle 1, \infty)$. Z (2.24) vyplýva, že $g_r(1) > 0$. Navyše máme, že:

$$\lim_{m \to \infty} g_r(m) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Zderivovaním g_r získame:

$$g_r'(m) = -\frac{r^2}{m(m + r)^2}, \tag{2.25}$$

čo je záporné pre všetky $m \in \langle 1, \infty)$. Takže funkcia g_r je klesajúca. Keďže $g_r(1) > 0$ a $\lim_{m \to \infty} g_r(m) = 0$, tak $g_r(m) > 0$ pre všetky $m \in \langle 1, \infty)$.

Ukázali sme teda, že $f_r'(m) > 0$ pre všetky $m \in \langle 1, \infty)$. Z toho vyplýva, že f_r je rastúca na $\langle 1, \infty)$ a z toho priamo vyplýva (2.21). □

2.3 Spojité úrokovanie

Zložené úrokovanie s viac konverziami ročne umožňuje prípočet úrokov viackrát za rok. Čím sa prípočet úrokov deje s vyššou frekvenciou, tým hustejšie sa na pomyselnej časovej osi budú vyskytovať body, na ktoré prípočet úrokov pripadne. Prirodzene to dáva vzniknúť otázke, či by nešlo úroky pripočítavať v každom časovom okamihu. To by znamenalo, že počet konverzií ročne by musel narásť z nejakého konečného prirodzeného čísla m na nekonečný počet. Tento limitný prípad nazývame spojitým úrokovaním. Pri ňom sa úročí spojite, t. j. v každom okamihu, nie iba formou úrokovania v daných periódach.

Opäť nech K_0 je súčasná hodnota kapitálu a K_n je budúca hodnota tohto kapitálu po čase n. Keďže sa úročí spojite, n uvažujeme z oboru reálnych čísel také, že $n \geq 0$. Neskôr budeme na označenie úrokového obdobia miesto n používať tiež symbol t, resp. T. V prípade spojitého úrokovania sa nehovorí o ročnej úrokovej sadzbe, ale o nominálnej úrokovej sadzbe. Teda r je nominálna úroková sadzba.

Úročenie v každom okamihu vlastne znamená, že m rastie limitne do nekonečna. Budúcu hodnotu K_n kapitálu K_0 môžeme preto vypočítať ako:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0\Big(1+\frac{r}{m}\Big)^{nm} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left(\Big(1+\frac{r}{m}\Big)^{\frac{m}{r}}\right)^{nr} = K_0\mathrm{e}^{nr}.$$

Čiže:

$$K_n = K_0\mathrm{e}^{nr}. \tag{2.26}$$

Z toho pre súčasnú hodnotu kapitálu vyplýva:

$$K_0 = K_n\mathrm{e}^{-nr}. \tag{2.27}$$

Ak poznáme K_0, K_n, n, potom r vypočítame ako:

$$r = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{n}. \tag{2.28}$$

Ak poznáme K_0, K_n, r, potom n vypočítame ako:

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{r}. \tag{2.29}$$

Úročiteľ je v prípade spojitého úrokovania e^{nr}, odúročiteľ je e^{-nr}.

Príklad 2.4. *Za aký čas vklad* 2000 *p. j. uložený na účet poskytujúci spojitú úrokovú sadzbu* $r = \ln(1,1)$ *vzrastie na sumu* 2662 *p. j.?*

Riešenie:

$K_0 = 2000$ p. j., $K_n = 2662$ p. j., $r = \ln(1,1)$, $n = ?$

Na výpočet využijeme vzťah (2.29).

$$n = \frac{\ln 2662 - \ln 2000}{\ln(1,1)} = \frac{\ln\left(\frac{2662}{2000}\right)}{\ln(1,1)} = \frac{\ln\left(\frac{2000(1,1)^3}{2000}\right)}{\ln(1,1)} = \frac{3\ln(1,1)}{\ln(1,1)} = 3$$

Vklad 2000 p. j. uložený na účet poskytujúci spojitú úrokovú sadzbu $r = \ln(1,1)$ vzrastie na sumu 2662 p. j. za 3 roky.

2.3.1 Porovnanie spojitého a zloženého úrokovania

Závery ohľadom porovnania úročiteľov vyplývajú priamočiaro z podkapitoly o porovnaní zloženého úrokovania s jednou a $m > 1$ konverziami ročne, takže sa mu nebudeme v tejto podkapitole zvlášť venovať. Namiesto toho sa zamierame na princíp finančnej ekvivalencie a ekvivalentnosť diskrétnych a spojitých úrokových sadzieb.

Porovnanie so spojitým úrokovaním urobíme iba pre zložené úrokovanie s jednou ročnou konverziou (alebo s $m = 1$ konverziami ročne). Pre tento účel budeme zložené úrokovanie nazývať **diskrétnym úrokovaním** a ročné úrokové sadzby zloženého úrokovania **diskrétnymi úrokovými sadzbami**. Pre rozlíšenie spojitú úrokovú sadzbu budeme značiť R, kým pre diskrétnu úrokovú sadzbu ponecháme označenie r.

Finančné operácie nazývame **ekvivalentné**, ak k rovnakému dátumu vedú k rovnakým platbám. Dôležitosť času vo finančníctve sme spomínali už pri časovej hodnote peňazí a vidíme, že čas je podstatný aj pri finančnej ekvivalencii.

Hodnota pôžičky (dlhu) sa v čase do jej splatnosti mení v závislosti od veľkosti počiatočného kapitálu a úrokovej sadzby. Preto ak chceme porovnať dve pôžičky (dva dlhy) musíme sledovať nielen ich hodnotu, ale aj to, či ich porovnávame v rovnakom čase (k tomu istému dátumu).

Ak máme úročiť kapitál $K_0 > 0$ p. j. počas rovnakého obdobia n rokov tak, aby sme získali rovnakú budúcu hodnotu K_n p. j. spojitým aj diskrétnym úrokovaním, zrejme sa budú diskrétna a spojitá úroková sadzba líšiť. Konkrétne, aby platilo:

$$K_0 \mathrm{e}^{nR} = K_n = K_0(1+r)^n,$$

resp.:

$$K_n \mathrm{e}^{-nR} = K_0 = K_n(1+r)^{-n},$$

musí byť splnené:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{nR} &= (1+r)^n, \\ nR &= n\ln(1+r), \\ R &= \ln(1+r). \end{aligned}$$

Úrokové sadzby teda nazývame ekvivalentné, ak platí:

$$R = \ln(1+r), \tag{2.30}$$

alternatívne:

$$r = \mathrm{e}^R - 1. \tag{2.31}$$

Pretože Taylorov rozvoj funkcie $\mathrm{e}^R - 1$ premennej R v bode 0 je:

$$\mathrm{e}^R - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R^j}{j!} = R + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \text{č. v. r.},$$

tak $r = \mathrm{e}^R - 1 > R$. Čiže ak sú spojité a diskrétne úrokové sadzby ekvivalentné, tak číselne je diskrétna úroková sadzba väčšia.

2.4 Úlohy na precvičenie

Úloha 2.1. *Určte veľkosť úroku a budúcu hodnotu kapitálu* 200 *p. j. úročenom jednoduchým úrokovaním tri roky pri ročnej úrokovej sadzbe* 0, 04.
[*Výsledok:* $u_3 = 24$ *p. j.*, $K_3 = 224$ *p. j.*]

Úloha 2.2. *Vklad v banke v hodnote* 1000 *p. j. priniesol pri jednoduchom úrokovaní za polroka úrok* 15 *p. j. Na akú ročnú úrokovú mieru bol uložený?*
[*Výsledok:* $p = 3$ % *p. a.*]

Úloha 2.3. *Za ako dlho pri jednoduchom úrokovaní prinesie vklad* 800 *p. j. pri* 2 %*-nej ročnej úrokovej miere úrok* 12 *p. j.?*
$\left[\textit{Výsledok: } n = \frac{3}{4}\right]$

Úloha 2.4. *Banka poskytuje na termínovaných vkladoch* 6 % *ročný úrok počítaný jednoduchým úrokovaním. Akú sumu je potrebné teraz vložiť do banky, aby za jeden a pol roka priniesla kapitál* 2180 *p. j.?*
[*Výsledok:* $K_0 = 2000$ *p. j.*]

Úloha 2.5. *Vypočítajte úrok z istiny* 36 500 *p. j. počítaný jednoduchým úrokovaním pri ročnej úrokovej sadzbe* $r = 0,01$ *za obdobie od 16. 3. do 21. 11. v neprestupnom roku.*
$\left[\textit{Výsledok: } u_{\frac{50}{73}} = 250 \textit{ p. j.}\right]$

Úloha 2.6. *Uvažujte dva cenné papiere A a B s budúcou hodnotou* 492 *p. j., resp.* 495 *p. j., ktoré sú splatné 14. 5., resp. 14. 6. toho istého neprestupného roku pri rovnakej ročnej úrokovej sadzbe* $r = 0,073$ *a jednoduchom úrokovaní. Určte dátum ekvivalencie cenných papierov, t. j. dátum, v ktorom majú rovnakú hodnotu.*
[*Výsledok:* 19.2.]

Úloha 2.7. *Nájdite budúcu hodnotu kapitálu* 1000 *p. j. po* 5 *rokoch vloženého na účet, ktorý poskytuje ročnú úrokovú sadzbu* 0, 01 *pri zloženom úrokovaní raz ročne.*
[*Výsledok:* $K_5 = 1051,01$ *p. j.*]

Úloha 2.8. *Občan Kane si otvoril účet v banke pri* $r = 0,03$ *p. a. a zloženom úrokovaní raz ročne. Vložil naň* 1000 *p. j. a po dvoch rokoch vybral z účtu* 200 *p. j. Akou sumou bude môcť disponovať po ďalších troch rokoch? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_5 \doteq 940,73$ *p. j.*]

Úloha 2.9. *Aká je súčasná hodnota cenného papiera, ktorý pri zloženom úrokovaní raz ročne poskytuje úrokovú sadzbu* $r = 0,01$ *p. a., ak o* 5 *rokov vypláca (nominálnu) hodnotu* 1500 *p. j.? Výsledok zaokrúhlite na jedno desatinné miesto.*
[*Výsledok:* $K_0 \doteq 1427,2$ *p. j.*]

Úloha 2.10. *Pri akej ročnej úrokovej sadzbe je úročený vklad* 100 *p. j. na termínovanom účte v banke, ak za* 2 *roky pri zloženom úrokovaní raz ročne vzrastie na* 121 *p. j.?*
[*Výsledok:* $r = 0,1$]

Úloha 2.11. *Uvažujte* 6 % *ročnú úrokovú mieru. Koľko rokov (zaokrúhlene na celé roky) je pri tejto úrokovej miere potrebné zloženým úrokovaním raz ročne úročiť kapitál* $K_0 > 0$ *p. j., aby vzrástol na dvojnásobok?*
[*Výsledok:* $n \doteq 12$]

Úloha 2.12. *Aspoň aká (zaokrúhlite na tri desatinné miesta) musí byť ročná úroková miera, aby sa pri tejto úrokovej miere zloženým úrokovaním raz ročne kapitál* $K_0 > 0$ *p. j. zúročil na svoj dvojnásobok za nie viac ako* 9 *rokov?*
[*Výsledok:* $p \geq 8,006$ %]

Úloha 2.13. *Dlžník má zaplatiť veriteľovi dve dlžoby* 2000 *p. j. za* 3 *roky a* 2600 *p. j. za* 6 *rokov pri dohodnutej ročnej úrokovej sadzbe* $r = 0,02$ *a zloženom úrokovaní raz ročne. Po čase si to dlžník rozmyslel a chce zaplatiť obe dlžoby jednou splátkou po* 5 *rokoch. Veriteľ súhlasí. Aká je hodnota* X *tejto splátky? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $X \doteq 4629,82$ *p. j.*]

Úloha 2.14. *Uvažujte rovnaké dlžoby a podmienky ich uhradenia ako v úvode úlohy 2.13. Predpokladajte, že teraz chce dlžník vyrovnať dlh dvoma rovnako vysokými splátkami po druhom a štvrtom roku. Určte ich výšku* X. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $X \doteq 2224,58$ *p. j.*]

Úloha 2.15. *Určte budúcu hodnotu kapitálu* 1600 *p. j. úročenom zloženým úrokovaním mesačne po dobu* 5 *rokov pri nominálnej (ročnej) úrokovej sadzbe* 0,03. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_5 \doteq 1858,59$ *p. j.*]

Úloha 2.16. *Za ako dlho sa občanovi zvýši vklad na účte v banke zo sumy* 1000 *p. j. na* 1010 *p. j., ak banka poskytuje ročnú úrokovú sadzbu* 0,04 *pri štyroch konverziách ročne?*
[*Výsledok:* $n = \frac{1}{4}$]

Úloha 2.17. *Určte nominálnu (ročnú) úrokovú sadzbu, pri ktorej za* 3 *mesiace narastie vklad zo sumy* 10 000 *p. j. na* 10 050 *p. j. pri štyroch konverziách ročne.*
[*Výsledok:* $r = 0,02$]

Úloha 2.18. *Určte počet konverzií* m*, pri ktorom za jeden rok vzrastie kapitál* 10 000 *p. j. na* 10 404 *p. j. pri zloženom úrokovaní* m*-krát ročne a ročnej úrokovej sadzbe* $r = 0,02m$. *Aká je ročná uroková sadzba?*
[*Výsledok:* $m = 2, r = 0,04$]

Úloha 2.19. *Veriteľ požičal dlžníkovi* 500 *p. j. pri nominálnej (ročnej) úrokovej sadzbe* 0,08 *a štvrťročnom úrokovaní na dobu päť rokov. Neskôr si to dlžník rozmyslel a rozhodol sa dlh splatiť už po dva a pol roku. Veriteľ súhlasí avšak len pri zmene úrokovej sadzby na* 0,075 *p. a. pri odúročení (diskontovaní) budúcej hodnoty dlhu o dva a pol roka späť. Koľko zaplatí dlžník veriteľovi po dva a pol roku? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_{2,5} \doteq 617,02$ *p. j.*]

Úloha 2.20. *Uvažujte rovnaký dlh a podmienky jeho uhradenia ako zo začiatku úlohy 2.19 s tým rozdielom, že veriteľ súhlasí s uhradením dlžoby už po* $2,5$ *roku pri nezmenenej úrokovej sadzbe, ale so zmenou úročenia na polročné pri diskontovaní budúceho dlhu. Koľko zaplatí dlžník veriteľovi po* $2,5$ *roku? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_{2,5} \doteq 610,67$ *p. j.*]

Úloha 2.21. *Nájdite budúcu hodnotu kapitálu* 1000 *p. j. po* 3 *rokoch vloženého na účet, ktorý poskytuje spojitú úrokovú sadzbu* $0,01$. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_3 \doteq 1030,45$ *p. j.*]

Úloha 2.22. *Určte súčasnú hodnotu kapitálu úročeného štyri roky pri* 2 % *spojitej úrokovej miere, ak sa za tú dobu zhodnotil na* 900 *p. j. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $K_0 \doteq 830,80$ *p. j.*]

Úloha 2.23. *Určte spojitú úrokovú sadzbu, pri ktorej za dva roky a tri mesiace vzrástla hodnota kapitálu z* 1000 *p. j. na* 1090 *p. j. Výsledok zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $R \doteq 0,0383$]

Úloha 2.24. *Za ako dlho vzrastie kapitál* 625 *p. j. úročený pri spojitej úrokovej sadzbe* $R = \ln(1,2)$ *na* 900 *p. j.?*
[*Výsledok:* $n = 2$]

Úloha 2.25. *Súčasná hodnota dvoch pôžičiek spolu je* $21\,930$ *p. j. Prvá pôžička vo výške* $10\,000$ *p. j. je splatná za dva roky. Druhá pôžička vo výške* $15\,000$ *p. j. je splatná za štyri roky. Určte spojitú úrokovú sadzbu, pri ktorej sú obe úročené. Výsledok zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $R \doteq 0,0412$]

Úloha 2.26. *Nájdite diskrétnu úrokovú sadzbu* r, *pri ktorej za tri roky vzrastie hodnota kapitálu z* 1000 *p. j. na* 1331 *p. j. Určte* r *riešením ekvivalentnej úlohy spojitého úrokovania.*
[*Výsledok:* $r = 0,1$]

Kapitola 3

Úvod do podnikových financií

„Prophesy is a good line of business, but it is full of risks.“[1]
Mark Twain

Uvažujme akciovú spoločnosť, ktorá vyrába určité výrobky bežnej spotreby, napr. liatinové hrnce a panvice. Každý podnik potrebuje na svoju činnosť finančné prostriedky. Získať ich môže emitovaním a predajom nových akcií, vypísaním podnikových obligácií alebo využitím peňažných prostriedkov získaných v minulých účtovných obdobiach. Získané prostriedky alokuje do svojho hmotného a nehmotného majetku, t. j. nakupuje stroje, prístroje, zariadenia, softvér, prípadne licencie, patenty, platí svojich zamestnancov, nakupuje cenné papiere. V interakcii so štátom platí dane. Podnik potrebuje finančné zdroje napr. aj na preklenutie časovej medzery medzi výdavkami vynaloženými na výrobu finálneho produktu a príjmom peňazí za jeho predaj. Vyrába výrobky, teda nadobudnutý majetok produktívne využíva. Z výnosov po zaplatení všetkých nákladov vytvára v sledovanom účtovnom období zisk, ktorý rozdeľuje akcionárom vo forme dividend alebo znovu reinvestuje. Pri každej z týchto interakcií dochádza k finančnému vysporiadaniu za poskytnutú službu alebo tovar, t. j. spoločnosť vstupuje do interakcie s rôznymi protistranami (inými podnikmi, domácnosťami alebo štátnymi, prípadne finančnými inštitúciami) vytvárajúc tak sústavu rôznych peňažných vzťahov.

Podľa predchádzajúceho príkladu by sme teda mohli podnikové financie definovať nasledujúcim spôsobom [1].

Definícia 3.1. ***Podnikové financie***
Podnikovými financiami rozumieme sústavu peňažných vzťahov, do ktorých vstupujú ekonomické subjekty (podniky, domácnosti, štátne inštitúcie, finančné i nefinančné inštitúcie) pri:

- *získavaní zdrojov,*
- *ich alokácii do jednotlivých zložiek majetku,*
- *produktívnom využívaní tohto majetku,*
- *rozdeľovaní dosiahnutých výsledkov.*

[1] v preklade: Prorokovanie je súčasťou podnikania, ale je plné rizík.

Finančné zdroje alebo kapitál, ktoré podnik získava, vznikajú bežnou činnosťou firmy, napr. predajom vyprodukovaných výrobkov – v takom prípade hovoríme o **vnútornom kapitáli (samofinancovaní)**, alebo ich možno získať na trhu, napr. predajom cenných papierov – v takom prípade hovoríme o **vonkajšom kapitáli**.

Finančné zdroje delíme podľa pôvodu:

- vlastné (*základné imanie, peňažné a vecné vklady majiteľov, fondy zo zisku, nerozdelený zisk*),
- cudzie (*bankové a dodávateľské úvery, zálohy odberateľov, obligácie, nevyplatené mzdy, neodvedené dane a iné záväzky*).

Kapitál ďalej delíme podľa doby, počas ktorej je firme k dispozícii:

- krátkodobý kapitál (maximálne rok; *krátkodobé úvery, nevyplatené mzdy, neodvedené dane*),
- dlhodobý kapitál (viac ako rok; *obyčajne vlastný a dlhodobý cudzí kapitál, napr. dlhodobé bankové úvery a obligácie*).

Kapitál podniku je teda súhrn finančných zdrojov, ktoré slúžia na financovanie majetku podniku. Vravíme, že tento majetok finančne kryjú.

Podnikový majetok a zdroje jeho krytia zachytáva súvaha firmy.

Definícia 3.2. ***Súvaha***
Súvaha je účtovný výkaz vyjadrujúci stav podnikového majetku a finančných zdrojov jeho krytia v analyzovanom období.

Súvaha má dve strany. Ľavá strana súvahy je strana aktív a vyjadruje, aký majetok kryje kapitál firmy. Pravá strana je strana pasív a vyjadruje, aké finančné zdroje slúžia na krytie podnikového majetku.

Súvaha

strana aktív	strana pasív
Aktívum – právo na obdržanie plnenia s ekonomickou hodnotou	**Pasívum** – záväzok s finančnou hodnotou

V nasledujúcom príklade súvahy podniku možno vidieť, čo tvorí aktíva a pasíva firmy a akým spôsobom možno ďalej rozdeliť ľavú a pravú stranu súvahy.

Súvaha

AKTÍVA	**PASÍVA**
Obežné aktíva	**Cudzie zdroje**
-zásoby -krátkodobé pohľadávky -dlhodobé pohľadávky -finančný majetok	-rezervy (zákonné, iné) -krátkodobé záväzky -dlhodobé záväzky -bankové úvery
Stále aktíva	**Vlastné imanie**
-hmotný investičný majetok (budovy, stroje, zariadenia) -nehmotný investičný majetok (softvér, patenty, ochranné známky) -finančné investície (CP)	-základné imanie -kapitálové fondy -fondy zo zisku -hospodársky výsledok minulých rokov -hospodársky výsledok bežného účtovného obdobia

Z hľadiska podvojného účtovníctva na konci sledovaného obdobia musí byť v súvahe hodnota všetkých aktív rovná hodnote všetkých pasív. Súvaha teda zhŕňa účtovnú hodnotu majetku a kapitálu firmy. Preto môžeme chápať hodnotu firmy ako celkovú hodnotu pasív (aktív) firmy. Ide iba o účtovnú hodnotu firmy, ktorá je síce číselne ľahko vyjadriteľná, ale nie je v nej zahrnuté niečo, čo by sme mohli nazvať potenciálom firmy. Tam napríklad patrí kvalita manažmentu, zaškolení kvalifikovaní, prípadne motivovaní a lojálni pracovníci, zabehnutá vnútorná organizácia podniku, optimalizovaný systém riadenia, siete dodávateľov a odberateľov, dobrá povesť podniku, spokojnosť zákazníkov, hodnota podnikovej značky, konkurencieschopnosť podniku, jeho postavenie na trhu a ďalšie ťažko vyčísliteľné skutočnosti.

Z dôvodov spomínaných v predchádzajúcom odstavci je teda náročné stanoviť hlavný cieľ podnikateľskej činnosti. Ten totiž nie je jediný a zahŕňa množstvo úloh, ktoré by mala byť úspešná firma schopná vyriešiť. S množstvom úloh vzniká množstvo otázok, ktorými by sa mali podnikové financie zaoberať.

V súvislosti so súvahou môžeme pomenovať tri základné otázky, ktorými sa podnikové financie zaoberajú:

- **Kapitálové rozpočtovanie** (ľavá strana súvahy) – Do ktorých dlhodobých aktív by mala firma investovať?

- **Kapitálová štruktúra** (pravá strana súvahy) – Aký typ finančných zdrojov použije firma na krytie kapitálových výdavkov?

- **Čistý pracovný kapitál** (horná časť súvahy) – Ako riadiť krátkodobý operačný hotovostný tok (anglicky *cashflow*)?

Hľadať odpovede na položené otázky je mimo rámec tejto kapitoly. Aj v ďalšom budeme otázky skôr klásť než na ne odpovedať.

Pozrime sa teraz na základné princípy finančného riadenia v rámci hotovostných tokov firmy.

Identifikácia hotovostných tokov

Uvažujme firmu z úvodu kapitoly. Predpokladajme, že náklady firmy napr. za rok 2018 boli 240 000 p. j. a na konci roka predala firma prvému zákazníkovi produkty v celkovej hodnote 270 000 p. j. Z pohľadu účtovníctva je firma v danom roku zisková, pretože zisk firmy, t. j. rozdiel výnosov a nákladov je kladný, rovný 30 000 p. j. Ak však firma ešte nedostala za výrobky zaplatené, je ku koncu roka hodnota hotovostných tokov záporná, rovná $-240\,000$ p. j., pretože prítok hotovosti do firmy bol nulový, kým na náklady firmy bola vydaná hotovosť vo výške 240 000 p. j.

Princíp časovej hodnoty peňazí

Firma by pri svojom rozhodovaní mala uvážiť časovú hodnotu peňazí. Predpokladajme, že firma z príkladu sa rozhoduje medzi dvoma návrhmi na výrobok, oba vyžadujú náklady 1000 p. j. a prinesú nasledujúce výnosy:

Rok	Výrobok A	Výrobok B
1	0 p. j.	300 p. j.
2	0 p. j.	300 p. j.
3	0 p. j.	300 p. j.
4	1500 p. j.	300 p. j.
Spolu	1500 p. j.	1200 p. j.

Na prvý pohľad sa zdá, že výrobok A je lepší, pretože prináša vyšší výnos, než je suma všetkých výnosov z výrobku B. Na druhej strane hotovostné toky z výrobku B prichádzajú skôr ako z výrobku A. Je tu potrebné zohľadniť časovú hodnotu peňazí, keďže peňažné toky, ktoré prichádzajú v skorších časoch možno opätovne investovať. Bez dodatočných informácií sa nedá rozhodnúť, ktorý návrh prinesie väčšiu hodnotu veriteľom a akcionárom firmy.

Riziko hotovostných tokov

Firma uvažuje, že rozšíri svoje podnikanie do zahraničia. Rozhoduje sa medzi Thajskom, ktoré je z jej pohľadu rizikové, a Singapurom, ktorý považuje za pomerne bezpečnú investičnú oblasť. V oboch prípadoch chce firma zavrieť zahraničné pobočky po dvoch rokoch. V rámci finančnej analýzy prišla firma s nasledujúcimi alternatívnymi plánmi zisku hotovosti pre svoje rozširovanie pri optimistickom (C), pesimistickom (A) a najviac pravdepodobnom scenári (B):

	scenár A	scenár B	scenár C
Singapur	8000 p. j.	10 000 p. j.	12 000 p. j.
Thajsko	0 p. j.	13 000 p. j.	16 000 p. j.

Thajsko je síce rizikovejšie, ale v najviac pravdepodobnom scenári ponúka vyššiu predpovedanú hodnotu hotovostných tokov. Opäť platí, že bez ďalších informácií a posúdenia preferencií investorov v rámci rizika a výnosov je nemožné rozhodnúť, ktorú alternatívu zvoliť.

3.1 Hlavný cieľ podnikateľskej činnosti

Hoci základná mikroekonomická (napr. v [8], [9]) aj makroekonomická teória (napr. v [10], [11]) hovorí, že v dokonale konkurenčnom prostredí je hlavnou snahou podnikov maximalizovať zisk, nemožno cieľ podnikateľskej činnosti redukovať na túto jedinú, hoci podstatnú požiadavku. Navyše je otázkou, aký zisk je potrebné maximalizovať. Bilačný zisk alebo ekonomický zisk? **Bilančný zisk** je vykazovaný v účtovníctve ako rozdiel výnosov a nákladov. **Ekonomický zisk** je rozdiel medzi výnosmi a nákladmi upravenými o náklady alternatívnych (stratených) príležitostí. Ekonomická teória sa zameriava na ekonomický zisk, pretože pri istých (silných) predpokladoch majú agenti na trhu úplnú a dokonalú informáciu a na základe nej sú schopní z množiny možností vybrať tú najlepšiu alternatívu. V praxi to však nie je splniteľné, pretože aj napriek prípadnej solídnej analýze ekonomického stavu a finančných príležitostí, nie je možné do rozhodovania začleniť úplne všetky možnosti, nehovoriac o rozličnom prístupe rôznych subjektov k informáciám.

Ako sme v úvode naznačili, zisk (či už bilančný alebo ekonomický) nie je sám jediným cieľom podnikateľskej činnosti. V tejto časti sa pokúsime tieto ciele sumarizovať z pohľadu rôznych subjektov trhu, ktoré sú súčasťou podniku alebo s ním interagujú (výber a opis subjektov pochádza zo zdroja [3]).

Majitelia sa zaujímajú predovšetkým o hodnotu firmy a jej rast. Hodnota firmy závisí od množstva ukazovateľov, ako je obrat, zisk, kapitálová štruktúra, investície, daňové zaťaženie, prípadne náklady na projekt zlúčenia. Zaujíma ich tiež postavenie firmy na trhu, jej konkurencieschopnosť, renomé firmy. Ich snahou je maximalizovať trhovú hodnotu firmy.

Zákazníkom firmy ide o uspokojenie svojich potrieb. Zameriavajú sa na cenu a kvalitu ponúkaných produktov či služieb. Ich snahou je kupovať to najkvalitnejšie za čo najlacnejšie. Mnoho zákazníkov má v istom spotrebiteľskom odvetví svoju preferovanú značku, čo súvisí s dobrým menom firmy.

V záujme **zamestnancov** je udržanie si pracovného miesta a pracovných podmienok, t. j. príjmu, resp. rastu príjmu, zaistenie bezpečnosti pri práci, dobré pracovné podmienky a podnetné pracovné prostredie, preferujú možnosti profesionálneho rastu, vyžadujú motiváciu zo strany zamestnávateľa či zabezpečenie profesijného vzdelávania a ďalšie.

Potreba podrobne informovať **verejnosť** kladie na spoločnosť taktiež určité požiadavky, napr. to môže byť poskytnutie informácií týkajúcich sa zachovania pracovných miest po zlúčení alebo akvizícii.

Požiadavky **štátnych inštitúcií** sa týkajú výberu daní, poplatkov ako aj dodržiavania existujúcich právnych noriem a zabezpečenia zachovania konkurenčného prostredia.

Analytici odvetvia, ktorými sú často analytici významných investičných bánk, poskytujú informácie investorom hľadajúcim investičné príležitosti. Navyše prostredníctvom týchto odporúčaní majú vplyv na odbornú tlač a tým aj nepriamy vplyv na ocenenie spoločnosti.

3.2 Metódy hodnotenia investičných projektov

V tejto sekcii sa budeme venovať analýze investičných projektov spoločnosti. Investičné projekty spoločnosti spadajú do kapitálového rozpočtovania firmy. Ide teda o rozhodnutie podniku, do ktorých (dlhodobých) aktív investovať tak, aby sa zvýšila hodnota podniku, prípadne aby sa zlepšil už existujúci produkt alebo služba. Samozrejme na to, aby bolo možné rozhodnúť, ktoré projekty realizovať a ktoré nie, je potrebné ich najprv identifikovať a potom zhodnotiť. Za tým účelom opíšeme niektoré vybrané metódy hodnotenia investičných projektov.

3.2.1 Metóda čistej súčasnej hodnoty

Metóda využíva pravidlo čistej súčasnej hodnoty, pomocou ktorého sa snažíme zistiť, o akú hodnotu vzrastie hodnota firmy, ak sa projekt zrealizuje. Na to, aby bolo možno čistú súčasnú hodnotu projektu určiť, je potrebné identifikovať budúce hotovostné toky plynúce z projektu a zistiť kladnú diskontnú sadzbu, pomocou ktorej súčasnú hodnotu týchto tokov vypočítame. Diskontovaním budúcich peňažných tokov plynúcich z projektu znižujeme ich nominálnu hodnotu sledujúc faktor času a faktor rizika vplývajúce na časovú hodnotu peňazí. Tieto faktory by mala zvolená výnosová sadzba zohľadňovať.

Metódu a pravidlo uvedieme na nasledujúcom jednoduchom príklade.

Uvažujme investíciu do kúpy bytu vo výške 90 000 p. j. (napr. EUR), pripočítajme rekonštrukčné náklady vo výške 30 000 p. j. Celkové náklady sú potom 120 000 p. j. Ak sa podarí byt o rok predať napr. v cene 135 000 p. j., zisk z predaja predstavuje 15 000 p. j.

Výnosová (sadzba) miera (tiež miera návratnosti) r sa potom rovná podielu zisku a celkovej investície, t. j.

$$r = \frac{15\ 000 \text{ p. j.}}{120\ 000 \text{ p. j.}} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Súčasná hodnota takejto investície je samozrejme:

$$PV = \frac{FV}{1+r} = \frac{135\ 000 \text{ p. j.}}{1+0,125} = 120\ 000 \text{ p. j.}$$

Na druhej strane investovať môžeme aj alternatívnym spôsobom napr. do nákupu dlhopisov. Predpokladajme, že úroková (výnosová) miera jednoročných bezkupónových dlhopisov sa rovná 5 %. Potom súčasná hodnota dlhopisu, ktorý vyplatí o rok 135 000 p. j. je:

$$PV = \frac{135\ 000 \text{ p. j.}}{1+0,05} \doteq 128\ 529 \text{ p. j.},$$

Ide o alternatívny náklad kapitálu a čistá súčasná hodnota NPV takejto investície je:

$$NPV \doteq -120\ 000 \text{ p. j.} + 128\ 529 \text{ p. j.} = 8529 \text{ p. j.}$$

Prípadne môžeme investovať do nákupu balíčka akcií poskytujúceho ročnú výnosovú mieru 15 %. Potom súčasná hodnota balíčka akcií, ktorý o rok vyplatí 135 000 p. j. je:

$$PV = \frac{135\ 000 \text{ p. j.}}{1 + 0,15} \doteq 117\ 391 \text{ p. j.},$$

V tomto prípade bude čistá súčasná hodnota:

$$NPV \doteq -120\ 000 \text{ p. j.} + 117\ 391 \text{ p. j.} = -2609 \text{ p. j.}$$

Pravidlo čistej súčasnej hodnoty hovorí:

Do projektu investujte, ak jeho $NPV > 0$.

Takže do kúpy bytu investujeme len, ak máme alternatívnu možnosť voľby nákupu dlhopisov. V prípade možnosti investovať do nákupu akcií uprednostníme kúpu akcií.

Ak by sme úvahu z príkladu začali investíciou 120 000 p. j. na jeden rok do akcií, tak budúcu hodnotu akcií, ktorých výnosová sadzba je odhadovaná na 15 % ročne, by sme získali z nasledujúcej rovnice:

$$FV = (120\ 000 \text{ p. j.})(1 + 0,15) = 138\ 000 \text{ p. j.} \tag{3.1}$$

Čistá súčasná hodnota takejto investície je nulová, pretože porovnávame projekt so sebou samým:

$$NPV = -120\ 000 \text{ p. j.} + \frac{138\ 000 \text{ p. j.}}{1,15} = 0 \text{ p. j.} \tag{3.2}$$

V porovnaní s investíciou do dlhopisov však získame kladnú čistú súčasnú hodnotu:

$$NPV = -120\ 000 \text{ p. j.} + \frac{138\ 000 \text{ p. j.}}{1,05} \doteq 11\ 428,57 \text{ p. j.} > 0 \text{ p. j.}, \tag{3.3}$$

t. j. v porovnaní s alternatívnou voľbou investície do nákupu dlhopisov, pravidlo čistej súčasnej hodnoty uprednostňuje akcie. Hodnota NPV v (3.3) značí, že na to, aby sme dosiahli o rok sumu 138 000 p. j., je potrebné do nákupu dlhopisov investovať teraz ešte o približne 11 428, 57 p. j. viac (než 120 000 p. j.).

Podobne v porovnaní s investíciou do kúpy a rekonštrukcie bytu získame kladnú čistú súčasnú hodnotu:

$$NPV = -120\ 000 \text{ p. j.} + \frac{138\ 000 \text{ p. j.}}{1,125} \doteq 2666,67 \text{ p. j.} > 0 \text{ p. j.} \tag{3.4}$$

Takže aj pri porovnaní s kúpou a rekonštrukciou bytu pravidlo čistej súčasnej hodnoty opäť uprednostňuje akcie. Hodnota NPV v (3.4) značí, že na to, aby sme dosiahli o rok sumu 138 000 p. j., je potrebné v tomto prípade investovať teraz ešte o približne 2666, 67 p. j. viac (než 120 000 p. j.).

Ak investícia do nákupu dlhopisov alebo do kúpy a rekonštrukcie bytu predstavujú pre nás jediné dve alternatívy k investícii do akcií, tak pravidlo čistej súčasnej hodnoty jednoznačne odporúča investovať do akcií. Navyše predchádzajúce výpočty naznačujú, že ak je čistá súčasná hodnota nejakého projektu v porovnaní so sebou nulová, kým v porovnaní s ostatnými alternatívami kladná, tak tento projekt by mal investor uprednostniť a z rovnice pre nulovú hodnotu NPV možno zistiť najvýhodnejšiu výnosovú sadzbu spomedzi všetkých sadzieb, ktoré projekty poskytujú.

Z predchádzajúceho vyplýva, že namiesto porovnávania projektov po dvojiciach, je výhodnejšie porovnávať výnosové sadzby všetkých alternatív (ak sa možno oprieť o spoľahlivosť odhadov budúcich hotovostných tokov plynúcich z projektov) a spomedzi nich vybrať pre investora tú najvýhodnejšiu. Nasledujúca časť sa venuje práve takejto metóde hodnotenia investičného projektu.

3.2.2 Metóda vnútornej miery výnosu

Ako IRR (internal rate of return) budeme označovať vnútornú výnosovú mieru investície alebo tiež vnútornú mieru návratnosti projektu. Pod IRR chápeme takú výnosovú mieru projektu, pri ktorej bude čistá súčasná hodnota projektu nulová. Ak označíme C_0 výšku investície (do projektu v čase 0) a C_t hotovostný tok v roku $t = 1, 2, \dots, n$, kde $n \in \mathbb{N}$ je počet rokov trvania investície (projektu), tak numericky možno IRR vypočítať z rovnice:

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1 + IRR)^t} = 0, \tag{3.5}$$

kde $\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+IRR)^t}$ predstavuje súčasnú hodnotu všetkých budúcich hotovostných tokov plynúcich z projektu.

Pravidlo IRR hovorí:

Treba využiť tie investičné príležitosti, pri ktorých je IRR väčšia ako alternatívne náklady kapitálu (výnosové sadzby alternatívnych investícií).

Ak sa správne používa, je toto kritérium ekvivalentné s pravidlom čistej súčasnej hodnoty. Uvedené súvisí s tým, že pri vypočítaných výnosových mierach všetkých relevantných projektov možno projekty zoradiť na základe kritéria, ktoré hovorí, že najlepším projektom bude ten, ktorý poskytuje najvyššie výnosové percento. Takýto projekt potom v porovnaní so sebou v rovnici na vyjadrenie čistej súčasnej hodnoty projektu bude mať nulovú čistú súčasnú hodnotu.

Je potrebné zmieniť sa o správnom používaní pravidla IRR, nakoľko toto pravidlo skrýva viaceré nástrahy.

Prvú z možných nástrah demonštrujeme na nasledujúcom príklade. Predpokladajme situáciu, v ktorej raz požičiavame (čiže investujeme) 1000 p. j. – zápožička, a raz si požičiavame 1000 p. j. – výpožička. Ak po roku takáto pôžička prinesie veriteľovi naspäť 1500 p. j., tak IRR možno ľahko vypočítať z rovnice:

$$0 \text{ p. j.} = -1000 \text{ p. j.} + \frac{1500 \text{ p. j.}}{1 + IRR}.$$

Z nej dostaneme $IRR = 0,5$, či už ide o zápožičku alebo výpožičku. Je veľmi výhodné požičiavať za 50 % úrokovú mieru (zvlášť ak ide o bezpečnú investíciu), ale je veľmi nerozumné si za takú mieru peniaze požičiavať. Ak existuje alternatívna možnosť ako si požičať za nižšiu sadzbu, je lepšie využiť tú.

Nástraha pravidla IRR v podobe situácie zápožička versus výpožička je sumarizovaná v nasledujúcej tabuľke:

	-C_0	C_1	IRR
zápožička	-1000	1500	50 %
výpožička	1000	-1500	50 %

Ďalšou nástrahou je, že výpočtom IRR z rovnice (3.5) môžeme dostať viac výnosových mier, napr.:

	-C_0	C_1	C_2
projekt	-1000	2500	-1560

Rovnica:

$$0 \text{ p. j.} = -1000 \text{ p. j.} + \frac{2500 \text{ p. j.}}{1+IRR} - \frac{1560 \text{ p. j.}}{(1+IRR)^2}$$

má dve riešenia: $IRR_1 = 0,2$, $IRR_2 = 0,3$. To znamená, že projekt je prijateľný len pre alternatívne náklady kapitálu ležiace medzi hodnotami $0,2$ a $0,3$, pretože v tom prípade bude čistá súčasná hodnota projektu väčšia ako nula, pričom úplne najväčšia bude pre hodnotu $0,248$.

Prípadne môže nastať situácia, že výpočtom IRR z rovnice (3.5) nedostaneme žiadnu výnosovú mieru, napr.:

	-C_0	C_1	C_2
projekt	1000	-2000	1500

V tomto prípade neexistuje taká reálna hodnota IRR, ktorá by vyhovovala rovnici:

$$0 \text{ p. j.} = 1000 \text{ p. j.} - \frac{2000 \text{ p. j.}}{1+IRR} + \frac{1500 \text{ p. j.}}{(1+IRR)^2}.$$

Čistá súčasná hodnota tohto projektu je pri všetkých výnosových mierach kladná.

Aby sme sa uvedeným nástrahám pravidla IRR vyhli, mali by sme ho používať iba v tom prípade, že NPV je (hladko) klesajúcou funkciou nezápornej výnosovej (úrokovej) sadzby. Ani to však nemusí postačovať, ako je to aj v prípade vzájomne sa vylučujúcich projektov:

Projekt	-C_0	C_1	IRR
A	-10 000	20 000	100 %
B	-20 000	32 500	$62,5$ %

Vypočítaná IRR je síce v prípade projektu A vyššia než v prípade projektu B, ale podľa pravidla IRR nemožno tieto projekty porovnávať. Ak je potrebné sa pre nejaký z nich rozhodnúť, tak je lepšie voliť projekt B, pretože dodatočná investícia 10 000 p. j. v projekte B prináša oproti projektu A dodatočný príjem 12 500 p. j.

Predchádzajúca diskusia predpokladala rovnakú výšku alternatívnych nákladov kapitálu pre hotovostné toky prichádzajúce v rôznych časoch (rokoch). V reálnom svete však pozorujeme (napr. pri úrokových sadzbách štátnych dlhopisov), že výnosové (úrokové) sadzby sú pre rôzne dlhé časové obdobia rôzne. Preto by mal byť hotovostný tok v každom roku diskontovaný inými alternatívnymi nákladmi kapitálu. V takom prípade bude vypočítaná hodnota IRR zodpovedať váženému priemeru týchto mier.

3.2.3 Index ziskovosti

Ďalšou alternatívou k pravidlu čistej súčasnej hodnoty je pravidlo pracujúce s indexom ziskovosti. **Indexom ziskovosti** (ďalej IZ) projektu rozumieme podiel súčasnej hodnoty prognózovaných budúcich hotovostných tokov a východiskovej investície ($C_0 > 0$), t. j.:

$$IZ = \frac{PV}{C_0}. \tag{3.6}$$

Pravidlo hovorí prijať tie projekty, ktorých $IZ > 1$.

Opäť platí, že pri správnom používaní je toto pravidlo ekvivalentné s pravidlom čistej súčasnej hodnoty, pretože:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{C_0} = IZ &> 1, \\ PV &> C_0, \\ -C_0 + PV &> 0, \\ NPV &> 0. \end{aligned}$$

Aj pri tejto metóde je potrebné dať si pozor na vzájomne sa vylučujúce projekty, napr.:

Projekt	-C_0	C_1	$PV(10\ \%)$	IZ	$NPV(10\ \%)$
C	-100	220	200	2	100
D	-10 000	12 100	11 000	$1,1$	1000
D-C	-9900	11 880	10 800	$\doteq 1,09$	900

Zistený IZ projektu C je síce pri 10% alternatívnej výnosovej miere vyšší než IZ projektu D pri tej istej miere, ale podľa pravidla IZ nemožno tieto projekty porovnávať. Investor, ak považuje oba projekty za rovnako (alebo aspoň podobne) rizikové, bude preferovať investíciu do projektu D, pretože dodatočná investícia 9900 p. j. v projekte D prináša oproti projektu C dodatočný príjem 11 800 p. j.

Kapitola 4

Cenné papiere

Definíciu cenného papiera sme síce uvádzali vyššie (Definícia 1.3), no pre väčší komfort čitateľa ju na tomto mieste ešte raz pripomenieme. **Cenný papier** je listina potvrdzujúca majetkové právo vlastníka na určité plnenie od toho, kto cenný papier emitoval/vydal. K definícii dodajme, že cenné papiere sú nositeľmi právneho nároku, teda možno zdroje vymáhať v prípade ich nevrátenia dlžníkom.

Klasifikácia cenných papierov:

- podľa ekonomickej funkcie:
  - CP slúžiace na premenu úspor na kapitál (akcie, obligácie),
  - CP používané v platobnom styku (šeky),
- podľa štatútu dlžníka:
  - štátne CP,
  - CP miest a obcí,
  - súkromné CP,
- podľa prevoditeľnosti:
  - voľne prevoditeľné (akcie, depozitné certifikáty),
  - s obmedzenou prevoditeľnosťou (zmenky),
  - neprevoditeľné (šeky),
- podľa spôsobu emisie:
  - individuálne CP (zmenky),
  - hromadné CP (akcie, obligácie, opcie),
- podľa charakteru dôchodku:
  - CP s pevným výnosom (šeky),

  - CP s premenlivým výnosom (akcie),

- podľa druhu stelesnenia majetkového práva:
  - účastnícke CP (akcie),
  - CP stelesňujúce práva na zaistenie pohľadávky (hypotekárny záložný list),
  - CP stelesňujúce dispozičné práva – konosamenty.

Hoci poznáme množstvo rôznych druhov cenných papierov, budeme sa venovať iba tým základným: dlhopisom, akciám a ich odvodeninám – derivátom. Z derivátov sa budeme zaoberať hlavne opciami, v menšej miere forwardovými kontraktami. Vedieť ohodnotiť dlhopis či akciu patrí k ekonomickým znalostiam. V nasledujúcich podkapitolách sa pozrieme na základné znaky dlhopisov a akcií a na to, ako ich oceniť.

4.1 Dlhopisy

Dlhopis je cenný papier, ktorý vydáva (emituje) dlžník (emitent) na určité obdobie (doba splatnosti, maturita – z anglického *maturity*[1]) alebo lepšie povedané do nejakého času (dátumu splatnosti) s cieľom získať finančné prostriedky, pričom sa zaväzuje, že v presne stanovených dátumoch splatí majiteľovi dlhopisu ako nominálnu hodnotu (ďalej tiež NH), teda dlžnú sumu uvedenú v texte dlhopisu, tak všetky ďalšie záväzky vyplývajúce z držby dlhopisu. Aktuálna hodnota (cena) dlhopisu však môže byť od nominálnej hodnoty odlišná. Dlhopisy majú presne určené rozvrhnutie splátok, úrokov a iných odmien (prémie, zlosovateľné výhry a pod.). Práva z dlhopisov sa premlčujú po uplynutí desiatich rokov odo dňa splatnosti.

Ku každému dlhopisu patria isté náležitosti. **Náležitosti dlhopisu** sú:

- označenie emitenta,
- názov dlhopisu a jeho číselné označenie,
- nominálna hodnota dlhopisu,
- spôsob stanovenia úroku, ďalších výplat,
- prehlásenie emitenta, že dlží nominálnu hodnotu majiteľovi dlhopisu,
- záväzok emitenta splatiť nominálnu hodnotu majiteľovi dlhopisu,
- v prípade dlhopisu na meno – meno majiteľa,
- dátum vydania,
- odtlačok podpisov predstaviteľov emitenta,
- povolenie k emisii.

[1] Anglický pojem *maturity* označuje skôr dátum splatnosti než dobu splatnosti. Avšak ak poznáme dátum splatnosti, poznáme aj dobu splatnosti.

Dlhopis sa skladá z dvoch častí:

- vlastný dlžný úpis (plášť),
- kupónový hárok s talónom.

V súčasnosti dlhopisy nemajú listinnú podobu, ale skôr elektronickú. Ide o tzv. **registrované dlhopisy**, v prípade ktorých je majiteľ u emitenta registrovaný a ten mu zasiela úroky na účet.

Dlhopisy môžeme klasifikovať viacerými spôsobmi, medzi základné patria nasledujúce **klasifikácie dlhopisov:**

- <u>Dlhopisy môžu znieť</u>:
  - na meno (prevoditeľné rubopisom, neprevoditeľné),
  - na majiteľa (prevod iba odovzdaním).
- <u>Dlhopisy môžu byť</u>:
  - bezkupónové (anglicky *zero coupon bonds*),
  - kupónové (anglicky *coupon bonds*),
  - s plávajúcimi kupónmi (anglicky *floating rate bonds*).
- <u>Dlhopisy ďalej delíme na dlhopisy</u>:
  - so zárukou (majetok emitenta, záruka iného subjektu),
  - bez záruky.
- <u>Medzi dlhopisy zaraďujeme</u>:
  - štátny dlhopis (obligácia),
  - podnikový dlhopis (obligácia),
  - komunálna obligácia,
  - bankový dlhopis (obligácia),
  - zamestnanecká obligácia (neprevoditeľné dlhopisy na meno vydávané výlučne pre súčasných alebo minulých zamestnancov).

Pojem obligácia sa zvykne voľne používať ako synonymum pre dlhopis.

Štátne dlhopisy považuje ekonomická teória za **bezrizikové cenné papiere** a majiteľ štátnych dlhopisov má obyčajne istotu toho, že mu bude vyplatená nominálna hodnota ako i úrok z dlhopisu plynúci.

S tým úzko súvisí pojem **bezrizikovej úrokovej miery (sadzby)**, ktorú chápeme ako úrokovú mieru (sadzbu), ktorú poskytujú bezrizikové cenné papiere.

V danom čase sú na trhu k dispozícii dlhopisy s rôznymi dátumami splatnosti a s rôznou nominálnou hodnotou, výškou kupónu a ďalšími náležitosťami. Ohodnotením (ocenením) dlhopisu rozumieme určenie jeho aktuálnej hodnoty (ceny) v závislosti od všetkých jeho náležitostí a úrokových sadzieb na trhu. Pri oceňovaní dlhopisov sa zameriame predovšetkým na kupónové a bezkupónové dlhopisy. Začneme s bezkupónovými dlhopismi, ktoré okrem nominálnej hodnoty v čase splatnosti dlhopisu neposkytujú žiadne iné výplaty či už v čase splatnosti dlhopisu alebo v časoch skorších.

4.1.1 Bezkupónové dlhopisy

Keďže dlhopisy vyjadrujú dlžnícky záväzok emitenta voči veriteľovi, na ich oceňovanie budeme využívať úrokovanie. Pracovať budeme so zloženým (diskrétnym) úrokovaním a spojitým úrokovaním, ktoré má oproti diskrétnemu určité výhody. Jeho aplikáciou sa totiž stiera nejednoznačnosť, ktorá vzniká pri zloženom úrokovaní na obdobie iné než celé roky. Napríklad uvažujme ročnú úrokovú sadzbu $r > 0$ a vypočítajme úročiteľ na obdobie $2,5$ roka. Približný výpočet diskrétnym úrokovaním hovorí, že hodnota úročiteľa bude $(1+r)^{2,5}$. Prípadne môžeme túto hodnotu vypočítať zloženým úrokovaním pri $m = 2$ konverziách ročne: $(1+\frac{r}{2})^5$. Iná možnosť je zapojiť kombináciu zloženého úrokovania raz ročne a jednoduchého úrokovania, čiže použiť zmiešané úrokovanie: $(1+r)^2(1+\frac{r}{2})$. Možností je viacero, kým pre úrokovanie spojité je hodnota úročiteľa daná jednoznačne: $\mathrm{e}^{2,5r}$. Na rozlíšenie budeme v ďalšom označovať ročnú úrokovú sadzbu r pre diskrétne úrokovanie a R pre spojité úrokovanie tak, ako sme to zaviedli v časti 2.3.1 Porovnanie spojitého a zloženého úrokovania.

Na trhu sa stretávame s tým, že úrokové sadzby, ktoré poskytujú dlhopisy na rôzne dlhé obdobia, sú rôzne (hovorili sme o tom už v časti 3.2.2 Metóda vnútornej miery výnosu). Preto budeme diskrétnu aj spojitú úrokovú sadzbu na obdobie n rokov indexovať dolným indexom n, t. j. r_n, resp. R_n. Navyše spojitú úrokovú sadzbu na obdobie od času T_0 do času T budeme značiť $R(T_0, T)$.

Určme súčasnú hodnotu B_n p. j. bezkupónového dlhopisu, ktorého nominálna (teda budúca) hodnota po n rokoch sa rovná F p. j. Uvažujme najprv diskrétne úrokovanie, potom:

$$B_n = \frac{F}{(1+r_n)^n}. \tag{4.1}$$

Pri známej súčasnej hodnote takéhoto dlhopisu môžeme diskrétnu úrokovú sadzbu r_n na obdobie n rokov vypočítať zo vzťahu:

$$r_n = \sqrt[n]{\frac{F}{B_n}} - 1. \tag{4.2}$$

Určme teraz súčasnú hodnotu $B(T_0, T)$ p. j. bezkupónového dlhopisu s nominálom F p. j., emitovaného v čase T_0 s dátumom splatnosti v čase T, teda dobou splatnosti rovnou $T - T_0$, spojitým úrokovaním. Máme:

$$B(T_0, T) = F\mathrm{e}^{-R(T_0,T)(T-T_0)}. \tag{4.3}$$

Pri známej súčasnej hodnote takéhoto dlhopisu môžeme spojitú úrokovú sadzbu $R(T_0, T)$ na obdobie $T - T_0$ vypočítať zo vzťahu:

$$R(T_0, T) = \frac{\ln F - \ln B(T_0, T)}{T - T_0}. \tag{4.4}$$

Ak $T - T_0 = n$ rokov, potom súčasná hodnota n-ročného bezkupónového dlhopisu určená spojitým úrokovaním bude:

$$B(T_0, T_0 + n) = F\mathrm{e}^{-nR(T_0, T_0+n)}. \tag{4.5}$$

Špeciálne, ak $T_0 = 0$, budeme namiesto zápisu $R(0, n)$ používať iba R_n. Teda:

$$B(0, n) = F\mathrm{e}^{-nR_n}. \tag{4.6}$$

Prípadne vzťah (4.6) zapíšeme jednoduchšie ako:

$$B_n = F\mathrm{e}^{-nR_n} \tag{4.7}$$

a nebudeme rozlišovať medzi označením súčasnej hodnoty dlhopisu počítanej diskrétnym úrokovaním a súčasnej hodnoty dlhopisu počítanej spojitým úrokovaním predpokladajúc, že úrokové sadzby sú ekvivalentné, t. j. že pre každé prirodzené n platí $R_n = \ln(1 + r_n)$ (pozri časť 2.3.1 Porovnanie spojitého a zloženého úrokovania). Takýto predpoklad možno akceptovať bez diskusie, pretože súčasná hodnota jedného a toho istého dlhopisu nemôže byť rôzna v závislosti od toho, či sa úročí diskrétne alebo či sa úročí spojite.

Diskontný dlhopis

Diskontný dlhopis (anglicky *discount bond*) je taký bezkupónový dlhopis, ktorého nominálna hodnota je 1 p. j.

Jeho súčasná hodnota:

$$P_n = \frac{1}{(1 + r_n)^n}, \tag{4.8}$$

ak uvažujeme zložené úrokovanie, resp.:

$$P(T_0, T) = \mathrm{e}^{-R(T_0,T)(T-T_0)}, \tag{4.9}$$

ak úročíme spojite.

Diskontné dlhopisy považuje teória za akési stavebné kamene, z ktorých možno vystavať dlhopisy so všeobecne zadanou nominálnou hodnotou F p. j. Konkrétne, ak súčasná hodnota diskontného dlhopisu na n rokov je P_n p. j., tak súčasná hodnota dlhopisu s nominálnou hodnotou vo výške F p. j. je potom:

$$B_n = FP_n \tag{4.10}$$

pri diskrétnom úrokovaní, resp. ak súčasná hodnota diskontného dlhopisu s dobou splatnosti $T - T_0$ je $P(T_0, T)$ p. j., tak súčasná hodnota dlhopisu s nominálnou hodnotou vo výške F p. j. je potom:

$$B(T_0, T) = FP(T_0, T) \tag{4.11}$$

pri spojitom úrokovaní.

Zo vzťahu (4.9) vyplýva:

$$P(T,T) = 1 = P(T_0,T_0),$$

resp. zo vzťahu (4.3) vyplýva:

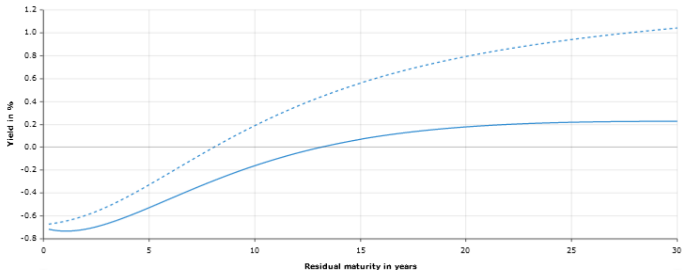
$$B(T,T) = F = B(T_0,T_0).$$

Teda súčasná hodnota dlhopisu, ktorý je splatný práve teraz, sa rovná jeho nominálnej hodnote.

Zo vzťahu (4.9), resp. (4.4) navyše dostávame:

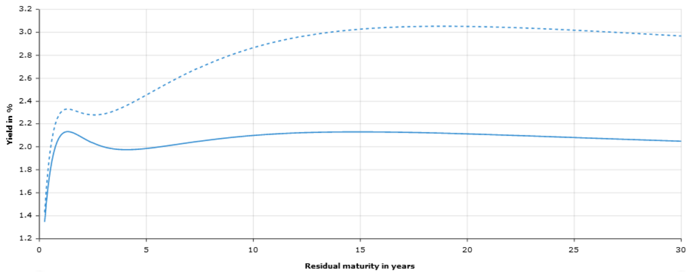
$$R(T_0,T) = -\frac{\ln P(T_0,T)}{(T-T_0)}. \tag{4.12}$$

Z rovnosti (4.12) máme, že hodnota úrokovej sadzby je funkciou doby splatnosti $T-T_0$ diskontného dlhopisu. To isté možno vidieť na reálnom dlhopisovom trhu. V každom okamihu možno pozorovať tzv. časovú štruktúru úrokových sadzieb. Obr. 4.1 ukazuje, ako vyzerala časová štruktúra úrokových sadzieb štátnych a AAA dlhopisov v Eurozóne v októbri roku 2021 (zdroj [29]).



Obr. 4.1: Prerušovaná čiara indikuje spotové úrokové miery určené zo štátnych dlhopisov; plná čiara znázorňuje spotové úrokové miery určené z AAA dlhopisov.

Obr. 4.2 ukazuje, ako vyzerala časová štruktúra úrokových sadzieb štátnych a AAA dlhopisov v Eurozóne v novembri roku 2022 (zdroj [30]).



Obr. 4.2: Prerušovaná čiara indikuje spotové úrokové miery určené zo štátnych dlhopisov; plná čiara znázorňuje spotové úrokové miery určené z AAA dlhopisov.

Ako bolo avizované už v úvodných kapitolách tejto učebnice, my budeme pracovať s nezápornými úrokovými sadzbami, preto aj nasledujúci ilustračný príklad určenia časovej štruktúry úrokových sadzieb uvažuje výhradne nezáporné (kladné) úrokové sadzby.

Príklad 4.1. *Uvažujme trh s piatimi diskontnými dlhopismi s rozličnou dobou splatnosti. Nech P_i označuje sučasnú hodnotu dlhopisu D_i s dobou splatnosti i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vypočítajme diskrétne (ročné) úrokové sadzby r_i na jednotlivé obdobia dĺžky i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ak sa úročí zloženým úrokovaním raz ročne, a vypočítajme spojité (ročné) úrokové sadzby R_i na jednotlivé obdobia i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ak sa úročí spojitým úrokovaním, pričom:*

dlhopis	*súčasná hodnota*
D_1	$P_1 = 0,9849$ *p. j.*
D_2	$P_2 = 0,9677$ *p. j.*
D_3	$P_3 = 0,9501$ *p. j.*
D_4	$P_4 = 0,9311$ *p. j.*
D_5	$P_5 = 0,9116$ *p. j.*

Riešenie:

Vypočítajme najprv diskrétne úrokové sadzby r_i. Využívajúc vzťah (4.2):

$$r_i = \frac{1}{\sqrt[i]{P_i}} - 1$$

dostávame:

$$r_1 \doteq 0,0153; r_2 \doteq 0,0166; r_3 \doteq 0,0172; r_4 \doteq 0,018; r_5 \doteq 0,0187.$$

Vypočítajme teraz spojité úrokové sadzby R_i. Využívajúc vzťah (4.4), resp. (4.12):

$$R_i = -\frac{\ln P_i}{i}$$

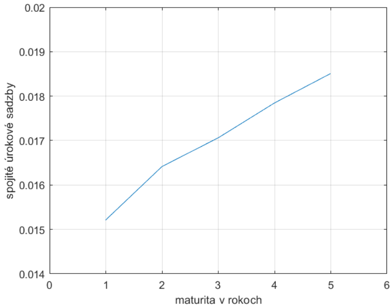
získame:

$$R_1 \doteq 0,0152; R_2 \doteq 0,0164; R_3 \doteq 0,0171; R_4 \doteq 0,0178; R_5 \doteq 0,0185.$$

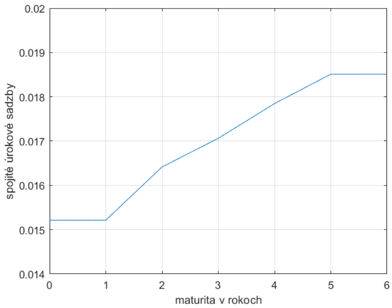
Hodnoty r_i a R_i pre to isté i vyšli rôzne, samozrejme také, že $R_i = \ln(1 + r_i)$ pre všetky i. Teda aj časové štruktúry úrokových sadzieb sa budú líšiť v závislosti od toho, či sme použili diskrétne alebo spojité úrokovanie. Pre oba prípady sú však hodnoty úrokových sadzieb tým vyššie, čím vyššia je splatnosť dlhopisu.

Ak chápeme časovú štruktúru úrokových sadzieb ako spojitú krivku, potom sme predchádzajúcim výpočtom získali iba niektoré jej body. Ostatné hodnoty možno odhadnúť, napr. preložením úsečky cez každé dva body. Obr. 4.3 to ilustruje pre vypočítané spojité úrokové sadzby z Príkladu 4.1.

Pri pohľade na krivku na Obr. 4.3 vzniká otázka, ako vyzerá časová štruktúra úrokových sadzieb pre hodnoty splatnosti väčšie ako 5 rokov, resp. pre hodnoty splatnosti medzi rokmi 0 a 1. Vzhľadom k obmedzenému množstvu údajov na roky 1 až 5 sa nedá spoľahlivo odpovedať, ale tiež to možno odhadnúť. Napr. pre hodnoty splatnosti medzi rokmi 0 a 1 môžeme predpokladať konštantnú výšku spojitých úrokových sadzieb rovnú hodnote R_1, resp. pre roky väčšie ako 5 môžeme uvažovať konštatnú výšku spojitých úrokových sadzieb rovnú hodnote R_5. V takom prípade by sa obrázok pozmenil tak, ako môžeme vidieť na Obr. 4.4.



Obr. 4.3: Odhadovaná časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb. [32]



Obr. 4.4: Odhadovaná časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb. [32]

Ak poznáme priebeh $P(T_0, T)$ aspoň na nejakom okolí bodu (T_0, T_0), možno vypočítať úrokovú sadzbu na (veľmi) krátku dobu (anglicky *short rate*), teda $R(T_0, T_0 + \Delta)$, kde $\Delta > 0$ je blízke nule.

Zo vzťahu (4.12) dostávame:

$$R(T_0, T_0 + \Delta) = -\frac{1}{\Delta} \ln P(T_0, T_0 + \Delta).$$

Pre $\Delta \to 0$ máme:

$$R(T_0, T_0) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(T_0, T_0). \tag{4.13}$$

Pokúsme sa výpočet úrokovej sadzby na krátku dobu ilustrovať na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.2. *Nech $T_0 = 0$. Vypočítajme $R_0 = R(0, 0)$, ak $P(0, T) = \mathrm{e}^{-0{,}001T}(1 + T)^{-0{,}2T}$.*

Riešenie:
Ak $P(0, T) = \mathrm{e}^{-0{,}001T}(1 + T)^{-0{,}2T}$, potom:

$$\ln P(0, T) = -0,001T - 0,2T \ln(1 + T).$$

Z toho pomocou vzťahu (4.13) získame:

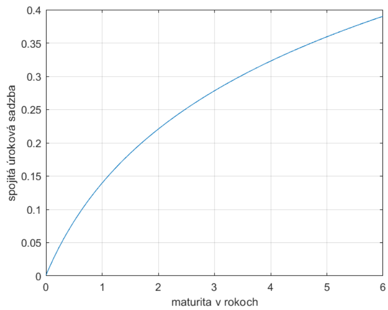
$$R_0 = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(0, 0) = 0,001 + 0,2 \left(\ln(1 + 0) + \frac{0}{1 + 0} \right) = 0,001.$$

Znalosť úrokovej miery na krátky čas neznamená, že poznáme celú krivku vyjadrujúcu časovú štruktúru úrokových sadzieb. Môže to byť ale nápomocné pri jej odhadovaní.

Avšak ak poznáme $P(T_0, T)$ pre každé $T \geq T_0$ (ako v predchádzajúcom príklade), poznáme aj $R(T_0, T)$ pre každé $T \geq T_0$. Konkrétne, ak napr. $P(0, T) = \mathrm{e}^{-0{,}001T}(1+T)^{-0{,}2T}$ pri $T_0 = 0$, tak zo (4.12) máme:

$$\begin{aligned} R(0,T) &= -\frac{1}{T}\ln\left(\mathrm{e}^{-0{,}001T}(1+T)^{-0{,}2T}\right) \\ &= \frac{0,001T + 0,2T\ln(1+T)}{T} \\ &= 0,001 + 0,2\ln(1+T) = R_0 + 0,2\ln(1+T). \end{aligned}$$

Graficky:



Obr. 4.5: Časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb. [32]

Arbitrážna príležitosť

Fixujme T_0, napr. dnes, a predpokladajme, že spojité úrokové sadzby $R(T_0, T) \geq 0$ pre každé $T \geq T_0$.

Uvažujme dva diskontné dlhopisy A, B, ktorých dátumy splatnosti sú T_A, resp. T_B, pričom $T_0 < T_A < T_B$ (a teda $0 < T_A - T_0 < T_B - T_0$), čiže dlhopis B má dlhšiu dobu splatnosti než dlhopis A.

Nech $P(T_0, T_A)$ označuje súčasnú hodnotu dlhopisu A a nech $P(T_0, T_B)$ označuje súčasnú hodnotu dlhopisu B, potom by malo platiť nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 4.1. *Nech doba splatnosti $T_A - T_0$ diskontného dlhopisu A a doba splatnosti $T_B - T_0$ diskontného dlhopisu B spĺňajú $0 < T_A - T_0 < T_B - T_0$ pri fixnom T_0. Potom:*

$$P(T_0, T_A) \geq P(T_0, T_B). \tag{4.14}$$

Dôkaz sporom. Nech by to nebola pravda, t. j. platí:

$$P(T_0, T_A) < P(T_0, T_B). \tag{4.15}$$

V čase T_0 potom možno kúpiť dlhopis A a predať (emitovať) dlhopis B s kladným ziskom. Keďže predpokladáme (4.15), tak zisk je daný rozdielom $P(T_0, T_B) - P(T_0, T_A) > 0$ p. j.

Budúce finančné toky plynúce z držby dlhopisu A, resp. vyplývajúce zo záväzkov z predaja dlhopisu B sa vynulujú. V čase T_A totiž prichádza finančný tok vo výške 1 p. j. a v čase T_B (väčšom ako T_A) je potrebné uhradiť 1 p. j. Hoci neporovnávame hodnoty k rovnakému dátumu, to, že 1 p. j. z dlhopisu A je obdržaná skôr, než je potrebné zaplatiť 1 p. j. z dlhopisu B, je v tomto prípade výhoda, pretože v čase T_A možno obdržanú 1 p. j. opätovne investovať na dobu $T_B - T_A$ a pri predpokladaných nezáporných úrokových mierach obdržať v čase T_B hotovosť väčšiu alebo aspoň rovnakú ako 1 p. j. V prípade, že by táto peňažná jednotka nebola v čase T_A znovu investovaná, jednoducho možno počkať do času T_B a zaplatiť ňou nárok majiteľa dlhopisu B. □

Poznámka 4.1. *Argumentáciu možno zopakovať aj v prípade výskytu záporných úrokových sadzieb v časovej štruktúre úrokových sadzieb s výnimkou vety o možnom navýšení* 1 *p. j. obdržanej z vysporiadania dlhopisu* A *jej opätovným investovaním.*

Príležitosť bez rizika nadobudnúť kladný zisk sa nazýva **arbitrážna príležitosť** alebo jednoducho **arbitráž**.

Hoci je zisk investora využívajúceho arbitrážnu príležitosť – arbitražéra z kúpy jedného kusu dlhopisu A a predaja jedného kusu dlhopisu B veľmi malý, blízky nule, arbitražér môže svoj zisk zmnohonásobiť kúpou a predajom veľkého počtu kusov (napr. miliónu) dlhopisov A, resp. B.

Všetky rozumné teoretické oceňovania by mali rešpektovať princíp:

ŽIADNA ARBITRÁŽ

(anglicky *NO ARBITRAGE*, tiež sa používa *NO FREE LUNCH*)

Je to princíp, ktorý „vracia ceny naspäť“. V súvislosti s predchádzajúcicm príkladom, ak by nastala situácia, v ktorej by pre nejaké dva diskontné dlhopisy A, B platila nerovnosť (4.15), trh by zareagoval (takmer okamžitým) nárastom ceny dlhopisu A, keďže by výrazne vzrástol záujem o jeho kúpu, kým o kúpu dlhopisu B by poklesol.

Dôsledkom Tvrdenia 4.1 je, že súčasná hodnota diskontného dlhopisu je pri fixnom T_0 nerastúcou funkciou maturity $T - T_0$.

Fixujme teraz T a sledujme, ako sa vyvíja hodnota diskontného dlhopisu s meniacim sa T_0. Aby tento vývoj korešpondoval s predchádzajúcim tvrdením, že hodnota diskontných dlhopisov s dlhšou maturitou nie je vyššia ako hodnota diskontného dlhopisu s kratšou maturitou, tak $P(T_0, T)$ musí byť neklesajúcou funkciou $T_0 \leq T$. V tomto prípade sa však môžu vyskytnúť krátkodobé poklesy hodnoty dlhopisu súvisiace s nárastom úrokovej miery.

4.1.2 Kupónové dlhopisy

Kupónové dlhopisy vyplácajú okrem nominálnej hodnoty dlhopisu na konci doby splatnosti aj pravidelný kupón počas doby splatnosti určený ako percentá z nominálnej hodnoty dlhopisu.

Uvažujme napr. dlhopis s nominálnou hodnotou rovnou F p. j. a s dobou splatnosti n rokov, ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške $C = cF$, kde $c \in \langle 0, 1)$ je ročná kupónová sadzba.

Určme jeho súčasnú hodnotu V_n zloženým (diskrétnym) úrokovaním. Máme:

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n} = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{cF}{(1+r_t)^t} + \frac{(1+c)F}{(1+r_n)^n}. \tag{4.16}$$

Všeobecne, ak hotovostné toky prichádzajúce v každom roku majú rôznu výšku, tak súčasná hodnota bude:

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_t)^t}. \tag{4.17}$$

Zo vzťahu (4.16) vyplýva, že kupónový dlhopis s nominálnou hodnotou rovnou F p. j. a s dobou splatnosti n rokov, ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške $C = cF$, môžeme chápať ako súbor bezkupónových dlhopisov s dobou splatnosti 1 rok až n rokov, pričom dlhopisy s dobou splatnosti 1 rok až $n-1$ rokov majú nominálnu hodnotu vo výške cF, kým dlhopis s dobou splatnosti n rokov vypláca nominálnu hodnotu vo výške $(1+c)F$ v čase n rokov od svojej emitácie. Inými slovami kupónový dlhopis možno skonštruovať z bezkupónových dlhopisov:

$$V_n = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{cF}{(1+r_t)^t} + \frac{(1+c)F}{(1+r_n)^n} = c\sum_{t=1}^{n-1} B_t + (1+c)B_n, \tag{4.18}$$

resp. z diskontných dlhopisov:

$$V_n = c\sum_{t=1}^{n-1} B_t + (1+c)B_n = cF\sum_{t=1}^{n-1} P_t + (1+c)FP_n. \tag{4.19}$$

Uvažujme teraz spojité úrokovanie. Nech platby z kupónového dlhopisu prichádzajú v časoch $T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n = T$, kde $T_i = T_0 + i\Delta$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ (teda Δ označuje periódu vyplácania kupónu).

Nech dlhopis s dobou splatnosti $T - T_0$ a nominálnou hodnotou F p. j. vypláca v každom čase T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, kupón vo výške ΔC, kde $C = cF$ s $c \in \langle 0, 1)$. Perióda vyplácania kupónu môže byť teda iná než ročná.

Potom súčasnú hodnotu takéhoto dlhopisu vypočítame ako:

$$\begin{aligned} V(T_0, T) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \Delta cF \mathrm{e}^{-i\Delta R(T_0,T_i)} + (1+\Delta c)F\mathrm{e}^{-n\Delta R(T_0,T_n)}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Vo všeobecnosti, ak z držby dlhopisu plynie v čase T_i výplata (finančný tok) C_i, tak súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je:

$$V = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)}. \tag{4.21}$$

Rovnako ako pri diskrétnom úrokovaní aj pri spojitom úrokovaní zo vzťahu (4.20) vyplýva, že:

$$V(T_0,T)=\sum_{i=1}^{n}\Delta cF\mathrm{e}^{-i\Delta R(T_0,T_i)}+F\mathrm{e}^{-n\Delta R(T_0,T_n)}=\Delta c\sum_{i=1}^{n-1}B(T_0,T_i)+(1+\Delta c)B(T_0,T_n), \tag{4.22}$$

resp.:

$$V(T_0,T)=\Delta c\sum_{i=1}^{n-1}B(T_0,T_i)+(1+\Delta c)B(T_0,T_n)=\Delta cF\sum_{i=1}^{n-1}P(T_0,T_i)+(1+\Delta c)FP(T_0,T_n). \tag{4.23}$$

Použitie vzťahov (4.19), resp. (4.23) ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.3. *Uvažujme trh s rovnakými diskontnými dlhopismi ako v príklade 4.1. Nech sa na tomto trhu nachádza kupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou $F = 10\ 000$ p. j. a dobou splatnosti* 5 *rokov, ktorý vypláca ročný kupón vo výške* 8 % *z nominálu. Určme jeho súčasnú hodnotu.*

Riešenie:
V príklade 4.1 sme určili časovú štruktúru úrokových sadzieb pri diskrétnom úrokovaní, resp. spojitom úrokovaní a približne sme vypočítali hodnoty diskrétnych úrokových sadzieb r_i, resp. spojitých úrokových sadzieb R_i, kde $i = 1,2,3,4,5$. Ak by sme ale vypočítali súčasnú hodnotu kupónového dlhopisu D, označme ju V_5, dosadením približných hodnôt za r_i do (4.16):

$$V_5=\sum_{t=1}^{4}\frac{0,08(10\ 000\ \text{p. j.})}{(1+r_t)^t}+\frac{1,08(10\ 000\ \text{p. j.})}{(1+r_5)^5},$$

resp. dosadením približných hodnôt za R_i do (4.20):

$$V_5=\sum_{i=1}^{4}0,08(10\ 000\ \text{p. j.})\mathrm{e}^{-iR_i}+1,08(10\ 000\ \text{p. j.})\mathrm{e}^{-5R_5},$$

dostali by sme kvôli chybám vzniknutým pri zaokrúhľovaní nepresné a navzájom rozličné hodnoty (12 911, 5 p. j. pre diskrétne úrokovanie oproti 12 912, 94 p. j. pre spojité úrokovanie).

Súčasná hodnota dlhopisu D by však mala byť jediné číslo, vyjadrené čo najpresnejšie a nezávislé od toho, aké úrokovanie použijeme. Preto miesto výpočtu s približnými hodnotami, môžeme vo výpočte využiť ceny diskontných dlhopisov, ktoré poznáme, a vzťahy (4.19), resp. (4.23). Dostaneme:

$$\begin{aligned}V_5 &= \sum_{t=1}^{4}\frac{0,08(10\ 000\ \text{p. j.})}{(1+r_t)^t}+\frac{1,08(10\ 000\ \text{p. j.})}{(1+r_5)^5}\\ &= (800\ \text{p. j.})\sum_{t=1}^{4}P_t+(10\ 800\ \text{p. j.})P_5=12\ 912,32\ \text{p. j.},\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} V_5 &= \sum_{i=1}^{4} 0,08(10\ 000 \text{ p. j.})\mathrm{e}^{-iR_i} + 1,08(10\ 000 \text{ p. j.})\mathrm{e}^{-5R_5} \\ &= (800 \text{ p. j.}) \sum_{t=1}^{4} P_t + (10\ 800 \text{ p. j.}) P_5 = 12\ 912,32 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Vidíme, že takto sme vypočítali súčasnú hodnotu dlhopisu D presne, pričom sme sa úplne vyhli počítaniu úrokových sadzieb.

Poznámka 4.2. *Poznať presnú súčasnú hodnotu dlhopisu D na trhu s dlhopismi z príkladu 4.1 je pre investora, ktorý sa obzerá po možnostiach investovania na tomto trhu, kľúčové. Ak by totiž niekto na tomto trhu ponúkal dlhopis za cenu nižšiu než vypočítaných* 12 912, 32 *p. j., tak investor má možnosť zbohatnúť bez rizika, t. j. využiť vzniknutú arbitrážnu príležitosť.*

Uvažujme napr., že dlhopis je na trhu ponúkaný za 12 900 *p. j. Arbitražér si je vedomý toho, že táto cena je nižšia, než je cena portfólia (súboru)* 800 *kusov dlhopisu* D_1*,* 800 *kusov dlhopisu* D_2*,* 800 *kusov dlhopisu* D_3*,* 800 *kusov dlhopisu* D_4 *a* 10 800 *kusov dlhopisu* D_5*. Z príkladu 4.3 vyplýva, že táto cena je* 12 912, 32 *p. j. Takto zložené portfólio poskytuje v budúcnosti rovnaké finančné toky, ako sú tie, ktoré plynú z držby dlhopisu D. Portfólio je teda plnohodnotnou náhradou za dlhopis D. Arbitražér emitáciou a predajom zodpovedajúceho počtu kusov dlhopisov* D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 *z portfólia získa* 12 912, 32 *p. j., ktoré použije na kúpu dlhopisu D za na trhu ponúkaných* 12 900 *p. j. Jeho okamžitý zisk činí* (12 912, 32 *p. j.*) − (12 900 *p. j.*) = 12, 32 *p. j. a budúce finančné toky plynúce z vlastnenia dlhopisu D použije na vykrytie záväzkov plynúcich z portfólia, ktoré emitoval. Svoj zisk môže arbitražér navyše zmnohonásobiť adekvátne možnostiam ponuky a dopytu na trhu.*

Arbitráž však vzniká aj vtedy, keď je cena dlhopisu D vyššia než 12 912, 32 *p. j. Ak je totiž na trhu niekto, kto je ochotný kúpiť dlhopis D za cenu napr.* 12 920 *p. j., tak arbitražér môže takýto dlhopis vypísať a za túto cenu predať. Z príjmu za predaj potom zafinancuje kúpu portfólia pozostávajúceho z* 800 *kusov dlhopisu* D_1*,* 800 *kusov dlhopisu* D_2*,* 800 *kusov dlhopisu* D_3*,* 800 *kusov dlhopisu* D_4 *a* 10 800 *kusov dlhopisu* D_5*, ktoré stojí presne* 12 912, 32 *p. j. Okamžitý zisk arbitražéra by bol v tomto prípade* (12 920 *p. j.*) − (12 912, 32 *p. j.*) = 7, 68 *p. j. a všetky budúce finančné toky plynúce z vlastnenia portfólia použije na vykrytie záväzkov plynúcich z dlhopisu D, ktorý emitoval. Aj v tomto prípade je tu možnosť zisk znásobiť podľa situácie na trhu a ochotou ostatných účastníkov trhu kupovať dlhopisy D za* 12 920 *p. j. a predávať dlhopisy* D_1*,* D_2*,* D_3*,* D_4 *a* D_5 *za pôvodné ceny.*

Výnos do splatnosti

Mnoho investorov okrem poznania časovej štruktúry úrokových sadzieb preferuje mať vedomosť o tom, akú (v istom zmysle) priemernú úrokovú sadzbu ich investícia poskytuje. Túto sadzbu budeme volať výnos do splatnosti.

V prípade dlhopisov **výnosom do splatnosti** (anglicky *yield to maturity*) rozumieme výnosovú sadzbu (tiež, výnosová mieru, resp. výnosové percento), pri ktorej sa bude súčasná hodnota budúcich príjmov z dlhopisu rovnať súčasnej hodnote dlhopisu. Výnos do splatnosti budeme označovať y.

Ak uvažujeme zložené úrokovanie raz ročne, hodnotu y dostaneme z rovnosti:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^n}, \tag{4.24}$$

v ktorej ľavá strana reprezentuje podľa (4.16) súčasnú hodnotu n ročného kupónového dlhopisu. Pre $n > 2$ sa rovnica (4.24) rieši numericky.

Ak uvažujeme spojité úrokovanie, hodnotu y dostaneme z rovnosti:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)} = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-y(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-y(T_n-T_0)} \end{aligned} \tag{4.25}$$

v ktorej ľavá strana reprezentuje podľa (4.20) súčasnú hodnotu kupónového dlhopisu s maturitou $T_n - T_0$. Aj v tomto prípade nájsť y predstavuje numerický problém.

Vo všeobecnosti je $y \neq r_n$, resp. $y \neq R(T_0, T_n)$. Ak je však dlhopis bezkupónový, tak $y = r_n$, resp. $y = R(T_0, T_n)$.

Tvrdenie 4.2. *Ak $R(T_0, T)$ je rastúca v T, tak $y < R(T_0, T_n)$.*

Dôkaz. Ak $R(T_0, T)$ je rastúca v T, tak:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-y(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-y(T_n-T_0)} &= \sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)} \\ &> \sum_{i=1}^{n} \Delta C \mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva tvrdenie. □

Definícia 4.1. ***Par bond***
Par bond je dlhopis, ktorého cena (súčasná hodnota) sa rovná jeho nominálnej hodnote.

Tvrdenie 4.3. *Uvažujme n-ročný ($n \in \mathbb{N}$) par bond s nominálnou hodnotou F, poskytujúci ročný kupón vo výške $C = cF$, kde $c \in \langle 0, 1)$. Potom pri zloženom úrokovaní raz ročne je výnos do splatnosti takéhoto dlhopisu $y = c$.*

Dôkaz. Súčasná hodnota par bond-u je rovnaká ako jeho nominálna hodnota, preto z rovnosti

(4.24) vyplýva:

$$\begin{aligned}
F &= cF\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{1+y}\right)^t + F\left(\frac{1}{1+y}\right)^n,\\
1 &= \frac{c}{(1+y)}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^t + \left(\frac{1}{1+y}\right)^n,\\
1 &= \frac{c}{(1+y)}\frac{1-\left(\frac{1}{1+y}\right)^n}{1-\frac{1}{1+y}} + \left(\frac{1}{1+y}\right)^n,\\
1 &= \frac{c}{y} + \left(\frac{1}{1+y}\right)^n\left(1-\frac{c}{y}\right),\\
0 &= \left(1-\frac{c}{y}\right)\left(1-\left(\frac{1}{1+y}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

To znamená, že buď $1 = \frac{c}{y}$ a teda $y = c > 0$ alebo $1 = \left(\frac{1}{1+y}\right)^n$ a v tom prípade $y = 0$. Ak však $y = 0$, tak zo (4.24) máme:

$$F = ncF + F,$$

čo možno splniť iba pre $c = 0$ a teda aj v tomto prípade $y = c$. □

V prípade par bond-u tvrdenie 4.3 platné pri diskrétnom úrokovaní s ročným vyplácaním kupónov platí pri spojitom úrokovaní len približne, pretože z rovnosti (4.25) dostávame:

$$\begin{aligned}
F &= cF\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-yi} + F\mathrm{e}^{-yn},\\
1 &= \frac{c}{\mathrm{e}^y}\frac{1-\mathrm{e}^{-yn}}{1-\mathrm{e}^{-y}} + \mathrm{e}^{-yn},\\
0 &= (1-\mathrm{e}^{-yn})\left(\frac{c}{\mathrm{e}^y-1}-1\right).
\end{aligned}$$

Buď $\mathrm{e}^y = c+1$ a teda $y = \ln(c+1) \approx c > 0$ alebo $0 = 1-\mathrm{e}^{-yn}$. V druhom prípade $y = c$, pretože $y = 0$ a zo (4.25) získame:

$$F = ncF + F.$$

Odtiaľ plynie, že $c = 0$ a teda $\ln(c+1) = \ln 1 = 0 = y$.

To, že v prípade spojitého úrokovania $y = \ln(c+1)$, nie je v rozpore s tvrdením 4.3, keďže ide o spojitý výnos do splatnosti. Vzhľadom nato a vzhľadom na poznatok o ekvivalencii diskrétnych a spojitých úrokových sadzieb (vzťah (2.30)) je takýto výsledok očakávaný a v duchu tvrdenia 4.3.

Definícia 4.2. ***Par yield***
Pod pojmom par yield sa myslí kupónová sadzba (percentuálna výška kupónu z nominálnej hodnoty) par bond-u s istou maturitou.

V prípade diskrétneho úrokovania dostaneme výšku c z rovnosti:

$$F = \sum_{t=1}^{n}\frac{cF}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n}.$$

Odtiaľ máme:

$$c = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+r_n)^n}\right)}{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r_t)^t}}. \tag{4.26}$$

V prípade spojitého úrokovania dostaneme výšku c z rovnosti:

$$F = \sum_{i=1}^{n} c\Delta F \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)} + F\mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)}.$$

Odkiaľ:

$$c = \frac{1 - \mathrm{e}^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)}}{\Delta \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)}} = \frac{1 - P(T_0,T_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} P(T_0,T_i)}. \tag{4.27}$$

4.1.3 Dlhopisy s plávajúcimi kupónmi

Pri **dlhopisoch s plávajúcimi kupónmi** (anglicky *floating rate bonds*) nie je výška kupónov vopred daná. Ujasňuje sa priebežne na základe pohybu úrokových sadzieb (v Európe napr. EURIBOR – European Interbank Offered Rate, LIBOR – London Interbank Offered Rate). Je však dané pravidlo úrokovania.

Označme $L_\Delta(T)$ LIBOR(EURIBOR) diskrétnu úrokovú sadzbu na obdobie Δ od času T (napr. od dnes). Pre neskoršie porovnanie so spojitou verziou oceňovania dlhopisu s plávajúcimi kupónmi označme súčasnú hodnotu diskontného dlhopisu vypísaného v čase T na obdobie Δ pri diskrétnom úrokovaní rovnako ako pri spojitom úrokovaní, t. j. $P(T, T+\Delta)$. Potom súčasná hodnota takéhoto diskontného dlhopisu bude pri diskrétnom úrokovaní:

$$P(T, T+\Delta) = \frac{1}{1 + \Delta L_\Delta(T)}. \tag{4.28}$$

Z toho vyplýva, že $L_\Delta(T)$ možno vypočítať ako:

$$L_\Delta(T) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{P(T, T+\Delta)} - 1\right). \tag{4.29}$$

Uvažujme dlhopis s plávajúcimi kupónmi a nominálnou hodnotou rovnou 1 p. j. Nech v časoch $T_i = T_0 + i\Delta$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, prichádzajú k majiteľovi dlhopisu kupóny vo výške $C_i = \Delta L_\Delta(T_{i-1})$ (pravidlo úrokovania), tzn. v čase T_{i-1} majiteľ dlhopisu vie, aký kupón dostane v čase T_i. V čase splatnosti dlhopisu T_n dostane majiteľ dlhopisu $1 + \Delta L_\Delta(T_{n-1})$. Ukážeme, že **súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je rovná 1 p. j.** Použijeme nato postup nazývaný rolovacia stratégia (anglicky *rolling strategy*).

Rolovacia stratégia

Rolovacia stratégia využíva sériu nákupov diskontných dlhopisov v časoch T_i, kde $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ splatných v časoch T_{i+1}, kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Takto nakupované dlhopisy budú v čase svojej splatnosti poskytovať výplatu vo výške súčtu kupónu a jednej peňažnej jednotky. Pri predpoklade, že na trhu nie je prítomná žiadna arbitrážna príležitosť, dokážeme tvrdenie o súčasnej hodnote dlhopisu s plávajúcimi kupónmi.

Predpokladajme, že $L_\Delta(T_i) > 0$ pre každé $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a že možno zakúpiť aj neceločíselný počet kusov dlhopisu.

Z rovnosti (4.29) vyplýva, že:

$$C_i = \Delta L_\Delta(T_{i-1}) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \tag{4.30}$$

pre každé $i = 1, 2, \dots, n$.

Majme 1 p. j., ktorú v čase T_0 použijeme na nákup diskontného dlhopisu na obdobie $T_1 - T_0$ (ide o obdobie dĺžky Δ). Keďže jeho hodnota v čase T_0 je $P(T_0, T_1) < 1$ p. j., tak za 1 p. j. dostaneme $\frac{1}{P(T_0,T_1)} > 1$ kusov takéhoto dlhopisu. V čase T_1 potom $\frac{1}{P(T_0,T_1)}$ kusov tohto dlhopisu prinesie $\frac{1}{P(T_0,T_1)} > 1$ p. j. Z tejto sumy zoberieme 1 p. j., ktorú použijeme na nákup $\frac{1}{P(T_1,T_2)}$ kusov diskontného dlhopisu na obdobie $T_2 - T_1$, ktorého hodnota v čase T_1 je $P(T_1, T_2) < 1$ p. j. Zvyšok predstavuje výšku kupónu $C_1 = \left(\frac{1}{P(T_0,T_1)} - 1\right)$ p. j. v čase T_1. V čase T_2 potom $\frac{1}{P(T_1,T_2)}$ kusov zakúpeného dlhopisu prinesie $\frac{1}{P(T_1,T_2)}$ p. j. Z tejto sumy opäť zoberieme 1 p. j., ktorú použijeme na nákup $\frac{1}{P(T_2,T_3)}$ kusov diskontného dlhopisu na obdobie $T_3 - T_2$ a to, čo ostane, je výška kupónu $C_2 = \left(\frac{1}{P(T_1,T_2)} - 1\right)$ p. j. v čase T_2. Postup opakujeme n-krát, t. j. do času T_{n-1} (vrátane). V čase splatnosti dlhopisu s plávajúcimi kupónmi T_n potom dostaneme $\frac{1}{P(T_{n-1},T_n)} = 1 + \frac{1}{P(T_{n-1},T_n)} - 1$ p. j. z poslednej držby dlhopisov, čo predstavuje výšku kupónu v čase T_n z dlhopisu s plávajúcimi kupónmi $C_n = \frac{1}{P(T_{n-1},T_n)} - 1$ p. j. a nominálnu hodnotu tohto dlhopisu.

Celú sériu nákupov diskontných dlhopisov sme realizovali prostredníctvom 1 p. j., ktorú sme mali k dispozícii v čase T_0. Keďže sme replikovali správanie a výplaty dlhopisu s plávajúcimi kupónmi, tak, aby nenastala arbitráž, musí byť súčasná hodnota tohto dlhopisu rovná práve 1 p. j.

Rovnaké závery dostaneme aj v prípade spojitého úrokovania, ak uvažujeme kupónový dlhopis s plávajúcimi kupónmi a nominálnou hodnotou rovnou 1 p. j., pričom kupóny prichádzajúce k majiteľovi dlhopisu v časoch $T_i = T_0 + i\Delta$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, budú $C_i = \mathrm{e}^{\Delta \overline{L}_\Delta(T_{i-1})} - 1$, kde $\overline{L}_\Delta(T)$ označuje LIBOR(EURIBOR) spojitú úrokovú sadzbu na obdobie Δ od času T. Uvedené vyplýva z ekvivalencie diskrétnych a spojitých úrokových sadzieb, pretože zo vzťahu (2.30) máme:

$$\overline{L}_\Delta(T) = \ln\left(1 + \Delta L_\Delta(T)\right)^{\frac{1}{\Delta}}$$

a teda platí:

$$\begin{aligned} C_i &= \mathrm{e}^{\Delta \overline{L}_\Delta(T_{i-1})} - 1 = \mathrm{e}^{\Delta \ln\left(1+\Delta L_\Delta(T_{i-1})\right)^{\frac{1}{\Delta}}} - 1 = \mathrm{e}^{\ln\left(1+\Delta L_\Delta(T_{i-1})\right)^{\frac{\Delta}{\Delta}}} - 1 \\ &= 1 + \Delta L_\Delta(T_{i-1}) - 1 = \Delta L_\Delta(T_{i-1}). \end{aligned}$$

Pri zisťovaní hodnoty dlhopisu s plávajúcimi kupónmi a nominálom rovným $0 < F \neq 1$ p. j., stačí na to, aby sme ukázali, že súčasná hodnota takéhoto dlhopisu sa rovná F p. j., zopakovať predchádzajúcu stratégiu, v ktorej pozmeníme výšku nominálnej hodnoty a výšku prichádzajúcich kupónov prenásobením F.

4.1.4 Forwardové úrokové miery

Pojem *forwardová úroková miera (sadzba)* úzko súvisí s finančným derivátom známym ako forwardový kontrakt, skrátene forward.

Definícia 4.3. ***Forward (forwardový kontrakt)*** *je dohoda o budúcom obchode, zmluva medzi dvoma stranami uzavretá v súčasnosti o povinnosti kúpiť alebo predať nejaké podkladové aktívum (z anglického underlying asset) v stanovenom čase v budúcnosti (dátum vypršania – anglicky maturity) za cenu stanovenú v súčasnosti.*

Nás bude v tejto časti zaujímať výhradne forwardový kontrakt s podkladovým aktívom, ktorým je dlhopis. Presnejšie budeme uvažovať len diskontné dlhopisy, pretože z ich súčasnej hodnoty vieme vyrátať súčasnú hodnotu akéhokoľvek dlhopisu.

Forwardový kontrakt uzatvárajú dve strany. Stranu, ktorá bude kupovať podkladové aktívum, označíme **A** a stranu, ktorá bude predávať podkladové aktívum, označíme **B**.

Strany **A**, **B** sa v čase T_0 (napr. dnes) dohodnú, že v čase $T_1 > T_0$ strana **A** kúpi od strany **B** za dnes dohodnutú cenu K p. j. diskontný dlhopis splatný v čase $T_2 > T_1$. Uzatvorenie takéhoto kontraktu vlastne predstavuje stávku na budúcu cenu podkladového aktíva. Strana **A** dúfa, že cena podkladového aktíva v čase T_1 bude vyššia než dohodnutá cena K p. j., kým protistrana **B** verí, že táto cena bude nižšia než K p. j. V čase T_1 jedna z tých dvoch strán bude stratová (prehrá), kým druhá zisková, pretože cena podkladového dlhopisu v čase $T_1 > T_0$ nie je vopred známa. Aby však boli obe strany ochotné vôbec takúto zmluvu uzavrieť, požadujú, aby dnes dohodnutá cena K, budeme ju nazývať **realizačná cena**, bola férová voči obom stranám, t. j. aby nevznikla arbitráž. Oceňme forward na diskontný dlhopis bezarbitrážnym oceňovaním najprv pri spojitých úrokových sadzbách.

Z pohľadu strany **A**, t. j. kupujúceho podkladového aktíva, je hodnota kontraktu v čase T_0 nulová. V čase T_1 pre stranu **A** je hodnota kontraktu $P(T_1, T_2) - K$ p. j., kde $P(T_1, T_2)$ je hodnota diskontného dlhopisu v čase T_1 vydaného v čase T_1 a splatného v čase T_2. $P(T_1, T_2) - K$ p. j. znamená, že strana **A** zaplatí K p. j. v čase T_1 za dlhopis, ktorý má v tom čase hodnotu $P(T_1, T_2)$ p. j. Čo sa týka finančného vysporiadania, reálne strana **A** v čase T_1 príde o zaplatených K p. j. V čase T_2 strana **A** obdrží nominálnu hodnotu dlhopisu vo výške 1 p. j.

Aby sme dokázali kontrakt oceniť, vyskladajme z diskontných dlhopisov dostupných na trhu v čase T_0 replikačné portfólio, t. j. portfólio, ktoré poskytuje rovnaké finančné toky v rovnakých časoch ako kontrakt, a uplatnime princíp žiadna arbitráž. Aj tu predpokladajme, že možno zakúpiť i neceločíselný počet kusov dlhopisu.

Z pohľadu strany **A** sa dá portfólio vyskladať nasledujúcim spôsobom. V čase T_0 strana **A** emituje a predá K kusov diskontných dlhopisov s dobou splatnosti $T_1 - T_0$ a kúpi 1 kus diskontného dlhopisu s dobou splatnosti $T_2 - T_0$. Bilancia v čase T_0 je $KP(T_0, T_1) - P(T_0, T_2)$ p. j. Bilancia v čase T_1 je $-K$ p. j., pretože strana **A** má povinnosť zaplatiť nominálnu hodnotu vo výške 1 p. j. pri všetkých K kusoch diskontných dlhopisov. Hodnota portfólia v čase T_1 je však $P(T_1, T_2) - K$ p. j., pretože strana **A** vlastní diskontný dlhopis splatný v čase T_2. V čase T_2 potom strana **A** obdrží nominálnu hodnotu tohto dlhopisu vo výške 1 p. j.

Vidíme, že bilancia je v časoch T_1 i T_2 rovnaká pri forwardovom kontrakte aj pri replikačnom portfóliu. Aby nenastala arbitráž, musí v čase T_0 platiť:

$$KP(T_0,T_1) - P(T_0,T_2) = 0$$

Z toho vyplýva:

$$K = \frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}. \tag{4.31}$$

Ukážme, že rovnosť (4.31) naozaj garantuje, že arbitráž nenastane.

Ak by totiž $K < \frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}$, strana **A** prejaví záujem o kontrakt a k tomu nakúpi K kusov dlhopisu s hodnotou $P(T_0,T_1)$ a predá 1 kus dlhopisu s hodnotou $P(T_0,T_2)$. Pretože $K < \frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}$, tak je v čase T_0 zisková. Všetky budúce toky sa vynulujú. V čase T_1 zaplatí sumu K p. j. za dlhopis plynúcu z kontraktu, ale dostane K p. j. z nominálnych hodnôt K kusov dlhopisov s dobou splatnosti $T_1 - T_0$. V čase T_2 potom dostane 1 p. j. ako nominálnu hodnotu dlhopisu z kontraktu a súčasne zaplatí 1 p. j. ako nominálnu hodnotu dlhopisu s dobou splatnosti $T_2 - T_0$. Vzniká arbitráž. Veľký dopyt po dlhopisoch s cenou $P(T_0,T_1)$ p. j. tlačí ich cenu nahor, čím znižuje pomer $\frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}$ na úroveň K p. j.

Ak by $K > \frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}$, strana **A** nemá záujem o takýto kontrakt, kým strana **B** záujem prejaví. Súčasne v čase T_0 nakúpi 1 kus dlhopisu s hodnotou $P(T_0,T_2)$ a predá K kusov dlhopisu s hodnotou $P(T_0,T_1)$. Pretože $K > \frac{P(T_0,T_2)}{P(T_0,T_1)}$, tak je v čase T_0 zisková. Všetky budúce toky sa vynulujú. V čase T_1 dostane sumu K p. j. za dlhopis plynúcu z kontraktu, ktorú použije na uhradenie K p. j. z nominálnych hodnôt K kusov dlhopisov s dobou splatnosti $T_1 - T_0$. V čase T_2 potom dostane 1 p. j. ako nominálnu hodnotu dlhopisu s dobou splatnosti $T_2 - T_0$ a súčasne zaplatí 1 p. j. ako nominálnu hodnotu dlhopisu z kontraktu. Aj v tomto prípade existuje arbitrážna príležitosť.

Realizačná cena K p. j. spĺňajúca (4.31) teda zaisťuje, že forwardový kontrakt na diskontný dlhopis je ohodnotený bezarbitrážne. Takto nastavená realizačná cena K zároveň určuje forwardovú úrokovú sadzbu, pretože reprezentuje cenu diskontného dlhopisu na budúce obdobie $T_2 - T_1$ dohodnutú dnes (v čase T_0). Označme túto spojitú forwardovú sadzbu ako $F_0(T_1,T_2)$, potom zo (4.31) s využitím (4.9) dostávame:

$$\begin{aligned}
e^{-F_0(T_1,T_2)(T_2-T_1)} = K &= \frac{e^{-R(T_0,T_2)(T_2-T_0)}}{e^{-R(T_0,T_1)(T_1-T_0)}}, \\
e^{F_0(T_1,T_2)(T_2-T_1)} &= e^{R(T_0,T_2)(T_2-T_0)-R(T_0,T_1)(T_1-T_0)}, \\
F_0(T_1,T_2)(T_2-T_1) &= R(T_0,T_2)(T_2-T_0) - R(T_0,T_1)(T_1-T_0) \\
F_0(T_1,T_2) &= \frac{R(T_0,T_2)(T_2-T_0) - R(T_0,T_1)(T_1-T_0)}{T_2-T_1}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Na nájdenie vzťahu pre forwardovú úrokovú sadzbu môžeme využiť aj iný prístup, v ktorom sa nepracuje s diskontnými dlhopismi, ale priamo sa úročí 1 p. j. pri úrokových sadzbách na trhu. Predpokladajme teraz diskrétne úrokovanie.

Uvažujme, že 1 p. j. môžeme zúročiť za obdobie 2 rokov pri r_2 (ekvivaletne investovať do nákupu dvojročných bezkupónových dlhopisov) alebo sa 1 p. j. zúročí nasledujúcim spôsobom.

Prvý rok sa bude úročiť pri r_1 a nasledujúci rok pri $f_{1,2}$, čo je forwardová úroková sadzba platná až na druhý rok, dohodnutá dnes. Aby nebola arbitráž, musí platiť $(1+r_1)(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2$. Z toho získame:

$$\frac{1}{1+f_{1,2}} = \frac{\frac{1}{(1+r_2)^2}}{\frac{1}{(1+r_1)}} \left(= \frac{P_2}{P_1}\right), \tag{4.33}$$

resp.:

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)} - 1.$$

Zo (4.33) vidíme, že ani táto úvaha nemení nič na platnosti (4.31).

Predchádzajúcu úvahu môžeme zovšeobecniť. Symbolom $f_{i,j}$ označme forwardovú úrokovú sadzbu na obdobie od roku i po rok j dohodnutú dnes. Potom $f_{i,j}$ musí spĺňať:

$$(1+r_i)^i(1+f_{i,j})^{j-i} = (1+r_j)^j.$$

Odtiaľ:

$$f_{i,j} = \left(\frac{(1+r_j)^j}{(1+r_i)^i}\right)^{\frac{1}{j-i}} - 1.$$

Vráťme sa k spojitým forwardovým mieram a preskúmajme možnosť, v ktorej sú časy T_1 a T_2 veľmi blízke, teda $T_2 \to T_1$.

Zo vzťahu (4.31) dostávame:

$$-\frac{\ln K}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln P(T_0,T_2) - \ln P(T_0,T_1)}{T_2 - T_1}. \tag{4.34}$$

Dosadením za K do (4.34) získame:

$$F_0(T_1,T_2) = -\frac{\ln P(T_0,T_2) - \ln P(T_0,T_1)}{T_2 - T_1}. \tag{4.35}$$

Zo (4.35) pre $T_2 \to T_1 \equiv T$ dostaneme:

$$F_0(T,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(T_0,T). \tag{4.36}$$

Označme $F_0(T) = F_0(T,T)$ forwardovú úrokovú sadzbu dohodnutú v čase T_0, platnú v čase T na veľmi krátku dobu (niečo ako „budúci short rate“).

Zo (4.9) dostaneme:

$$-\ln P(T_0,T) = R(T_0,T)(T-T_0). \tag{4.37}$$

Zderivovaním (4.37) podľa druhej premennej získame:

$$-\frac{\partial}{\partial T}\ln P(T_0,T) = \frac{\partial}{\partial T}R(T_0,T)(T-T_0) + R(T_0,T). \tag{4.38}$$

Z toho máme:

$$F_0(T) = R(T_0,T) + \frac{\partial}{\partial T}R(T_0,T)(T-T_0), \tag{4.39}$$

pričom $F_0(T_0) = R(T_0,T_0)$.

Fixujme T_0 a predpokladajme, že $R(T_0,T)$ je rastúcou funkciou v premennej T, teda $\frac{\partial}{\partial T}R(T_0,T) > 0$ pre každé $T > T_0$. Potom $F_0(T) > R(T_0,T)$ pre každé $T > T_0$. Naopak, ak predpokladáme, že $R(T_0, T)$ je klesajúcou funkciou v premennej T, teda $\frac{\partial}{\partial T} R(T_0, T) < 0$ pre každé $T > T_0$, potom $F_0(T) < R(T_0, T)$ pre každé $T > T_0$.

Pozrime sa, ako vyzerá situácia s $R(T_0, T)$ ako rastúcou funkciou z príkladu 4.2 v porovnaní s krivkou $F_0(T)$.

Príklad 4.4. *Nech* $T_0 = 0$. *Zistime priebeh* $F_0(T)$, *ak* $P(0, T) = \mathrm{e}^{-0{,}001T}(1 + T)^{-0{,}2T}$.

Riešenie:
V riešení príkladu 4.2 sme sa dopracovali k zisteniu, že:

$$R(0, T) = 0,001 + 0,2 \ln (1 + T) = R_0 + 0,2 \ln (1 + T).$$

Z toho:

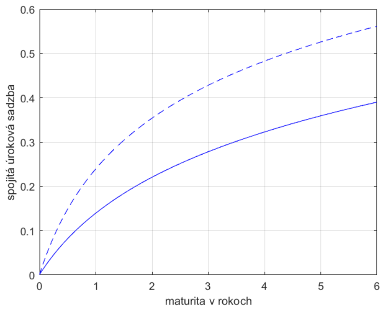
$$\frac{\partial}{\partial T} R(T_0, T) = \frac{0,2}{1 + T} > 0$$

pre každé $T \geq 0$ a teda $R(T_0, T)$ je rastúcou funkciou v premennej T.
Dosadením do (4.39) získame:

$$F_0(T) = 0,001 + 0,2 \ln (1 + T) + \frac{0,2T}{1 + T} = R_0 + 0,2 \left(\ln (1 + T) + \frac{T}{1 + T} \right). \tag{4.40}$$

Špeciálne pre $T = 0$ máme $F_0(0) = R(0, 0) = R_0$.

Na Obr. 4.6 sme graficky znázornili krivky $R(0, T)$, $F_0(T)$.



Obr. 4.6: Časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb (plná čiara) a forwardových sadzieb na krátku dobu (prerušovaná čiara). [32]

Z predchádzajúceho vyplýva, že ak $P(T_0, T)$ je známe pre každé $T \geq T_0$, potom poznáme aj $R(T_0, T)$ (vzťah (4.12)), resp. $F_0(T)$ (vzťah (4.39), resp. (4.36)).

Naopak ak poznáme $R(T_0, T)$, vzťah (4.9) umožňuje poznať $P(T_0, T)$ pre každé $T \geq T_0$. Podobne znalosť $F_0(T)$ umožňuje prostredníctvom vzťahu (4.36) určiť $P(T_0, T)$ pre každé T_0. Totiž ak vieme odhadnúť $F_0(T)$ v čase T dohodnutý dnes (v čase T_0), možno získať hodnoty $P(T_0, T)$ od času T spätne do dnes ako riešenia diferenciálnej rovnice:

$$\begin{aligned} F_0(T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(T_0, T), \\ \ln P(T_0, T) &= -\int_{T_0}^{T} F_0(s)\, ds, \\ P(T_0, T) &= \mathrm{e}^{-\int_{T_0}^{T} F_0(s)\, ds}. \end{aligned}$$

4.1.5 Durácia a imunizácia

Nárast úrokových mier môže spôsobiť pád hodnoty portfólia dlhopisov. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať tým, ako súvisí zmena hodnoty dlhopisu s dĺžkou doby jeho splatnosti pri zmenách úrokových sadzieb.

Pre názornosť predpokladajme, že $r = 0,02$ je diskrétna úroková sadzba konštantná pre všetky časové obdobia. Nech investor má milión p. j. v jednoročných a desaťročných bezkupónových dlhopisoch. Potom súčasná hodnota jeho jednoročných dlhopisov je

$$\frac{10^6 \text{ p. j.}}{1+0,02} \doteq 980\ 392 \text{ p. j.},$$

kým jeho desaťročných dlhopisov je

$$\frac{10^6 \text{ p. j.}}{(1+0,02)^{10}} \doteq 820\ 348 \text{ p. j.}$$

Uvažujme paralelný posun úrokových sadzieb na trhu tak, že r vzrastie pre všetky časové obdobia rovnako na $0,021$. Potom súčasná hodnota jednoročných dlhopisov bude

$$\frac{10^6 \text{ p. j.}}{1+0,021} \doteq 979\ 432 \text{ p. j.},$$

kým súčasná hodnota desaťročných dlhopisov bude

$$\frac{10^6 \text{ p. j.}}{(1+0,021)^{10}} \doteq 812\ 349 \text{ p. j.}$$

Pri jednoročných dlhopisoch hodnota poklesla o približne 960 p. j., kým pri desaťročných je pokles výraznejší, približne rovný 7999 p. j.

Nástroj, ktorý budeme používať na meranie citlivosti splatnosti dlhopisov na paralelnú zmenu úrokových sadzieb, voláme **durácia** (z anglického *duration* - trvanie).

Durácia

Najprv sa venujme prípadu, v ktorom uvažujeme spojité úrokové sadzby.

Nech v časoch $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ prichádzajú hotovostné toky $C_1, C_2, \ldots, C_n$ plynúce napr. z držby dlhopisu alebo portfólia dlhopisov. Pre jednoduchosť označme spojitú úrokovú sadzbu na obdobie od času 0 po čas t_i ako R_{t_i}. Potom súčasná hodnota týchto tokov bude podľa (4.21):

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-R_{t_i} t_i}. \tag{4.41}$$

Symbolom D_{FW} budeme označovať Fisherovu-Weilovu duráciu. **Fisherova-Weilova durácia** je definovaná ako

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^{n} t_i C_i \mathrm{e}^{-R_{t_i} t_i}. \tag{4.42}$$

Označme

$$w_i = \frac{C_i \mathrm{e}^{-R_{t_i} t_i}}{PV},$$

potom

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

a platí:

$$D_{FW} = \sum_{i=1}^{n} t_i w_i. \tag{4.43}$$

Fisherova-Weilova durácia je teda váženým priemerom časov, v ktorých prichádzajú platby. Čiže D_{FW} vyjadruje, v priemere ako dlho musí držiteľ dlhopisu alebo portfólia dlhopisov čakať, kým obdrží platby.

Z definície vyplýva, že $t_1 \leq D_{FW} \leq t_n$. Špeciálne pre bezkupónový dlhopis je $D_{FW} = t_n$.

Nech dôjde k paralelnému posunu úrokových sadzieb, t. j. nová hodnota spojitej úrokovej sadzby pre každé obdobie od času 0 po čas t_i bude $R_{t_i} + \lambda$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Hodnota budúcich hotovostných tokov v čase 0 sa zmení v závislosti od λ. Označme teda súčasnú hodnotu budúcich hotovostných tokov plynúcich z držby dlhopisu alebo portfólia dlhopisov ako $P(\lambda)$. Uvedomme si, že $P(0) = PV$, kde PV je definovaná vzťahom (4.41).

Ak nastane iba malý posun úrokových sadzieb, môžeme skúmať $\frac{dP(0)}{d\lambda}$. Dostaneme:

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = -\sum_{i=1}^{n} t_i C_i \mathrm{e}^{-(R_{t_i}+0)t_i} = -P(0)D_{FW}.$$

Z toho máme $\Delta P \approx -D_{FW} P \Delta\lambda$, kde Δ označuje zmenu. Čiže ak $\Delta\lambda > 0$, tak $\Delta P < 0$ a čím vyššia je D_{FW}, tým je zmena ΔP väčšia. Pričom pri kladnej zmene $\Delta\lambda$ bude zmena ΔP záporná a naopak pri zápornej zmene $\Delta\lambda$ bude zmena ΔP kladná.

Pre investora je dôležité, aby jeho portfólio reagovalo na zmenu úrokových sadzieb rovnako ako pohľadávka, teda aby mali rovnakú duráciu. Je to však ochrana len proti malým paralelným posunom časovej štruktúry úrokových mier a práve preto, že durácia závisí od časovej štruktúry úrokových mier, treba ju pri pohybe znovu prepočítať.

Venujme sa teraz prípadu, v ktorom uvažujeme diskrétne úrokové sadzby pri zloženom úrokovaní m-krát ročne.

Nech v ekvidistantných časoch $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ prichádzajú hotovostné toky $C_1, C_2, \ldots, C_N$. Premenná N teraz vyjadruje celkový počet periód dĺžky $\frac{1}{m}$ za obdobie od času 0 do času t_N. Napr. kombinácia $m = 2$ a $N = 11$ reprezentuje situáciu, keď sa úrokuje polročne jedenásť po sebe nasledujúcich periód, t. j. spolu 5,5 roka. Špeciálne, ak $N = nm$, kde n je prirodzené číslo, tak obdobie od času 0 do času t_N trvá n rokov. Ďalej tiež máme, že $t_i = \frac{i}{m}$.

Pre diskrétne úrokovanie označujme r_{t_i} úrokovú sadzbu na obdobie od času 0 po čas t_i. Potom súčasná hodnota platby v čase t_i je $PV(C_i) = C_i \left(1 + \frac{r_{t_i}}{m}\right)^{-i}$.

Predpokladajúc paralelný posun všetkých úrokových sadzieb o λ dostaneme:

$$\begin{aligned}
P(0) &= \sum_{i=1}^{N} PV(C_i),\\
P(\lambda) &= \sum_{i=1}^{N} C_i\left(1+\frac{r_{t_i}+\lambda}{m}\right)^{-i},\\
\frac{dP(0)}{d\lambda} &= \sum_{i=1}^{N} -\frac{i}{m}C_i\left(1+\frac{r_{t_i}+0}{m}\right)^{-i-1}.
\end{aligned}$$

Symbolom D_Q budeme označovať kvázimodifikovanú duráciu. **Kvázimodifikovaná durácia** je definovaná ako:

$$D_Q = \frac{-1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{m}C_i\left(1+\frac{r_{t_i}}{m}\right)^{-i-1}}{\sum_{i=1}^{N}C_i\left(1+\frac{r_{t_i}}{m}\right)^{-i}}. \tag{4.44}$$

Uvedomme si, že D_Q nie je vážený priemer časov ako to bolo v prípade D_{FW}. Napríklad ak máme n-ročný bezkupónový dlhopis pri $m = 1$, tak:

$$D_Q = \frac{nC_n(1+r_n)^{-n-1}}{C_n(1+r_n)^{-n}} = \frac{n}{1+r_n} \neq n.$$

Naďalej však platí, že $\Delta P \approx -D_Q P \Delta\lambda$, t. j. súčasná hodnota budúcich hotovostných tokov je pri malých paralelných posunoch úrokových mier citlivejšia tým viac, čím vyššia je durácia.

Aby bola durácia váženým priemerom časov pri zachovaní $\Delta P \approx -D_Q P \Delta\lambda$ aj v diskrétnom prípade, robí sa modifikácia tzv. Macaulayovej durácie. Macaulayova durácia pracuje namiesto rozličných úrokových sadzieb pre rôzne časové obdobia s jednotným výnosom do splatnosti y, ktorý sme pre zložené úrokovanie raz ročne definovali v (4.24).

Macaulayova durácia:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{m}C_i\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-i}}{\sum_{i=1}^{N}C_i\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-i}}. \tag{4.45}$$

Macaulayova durácia je váženým priemerom časov, v ktorých prichádzajú platby. Označme

$$v_i = \frac{C_i\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-i}}{\sum_{i=1}^{N}C_i\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-i}},$$

potom

$$\sum_{i=1}^{N} v_i = 1$$

a platí:

$$D = \sum_{i=1}^{N} t_i v_i.$$

Pre n-ročný bezkupónový dlhopis pri $m = 1$ potom máme:

$$D = \frac{nC_n(1+y)^{-n}}{C_n(1+y)^{-n}} = n.$$

Navyše platí:

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{N} -\frac{i}{m} C_i \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-i-1} = -\frac{DP(0)}{1+\frac{y}{m}}. \tag{4.46}$$

Čiže $\Delta P \approx -D \left(\frac{P}{1+\frac{y}{m}}\right) \Delta\lambda$ a teda naďalej platí, že súčasná hodnota budúcich hotovostných tokov je pri malých paralelných posunoch úrokových mier citlivejšia tým viac, čím vyššia je durácia. Nepohodlnosť v podobe výrazu $1 + \frac{y}{m}$ v menovateli na pravej strane (4.46) odstraňuje **modifikácia Macaulayovej durácie**:

$$D_M = \frac{D}{1+\frac{y}{m}}. \tag{4.47}$$

Potom $\Delta P \approx -D_M P \Delta\lambda$.

Imunizácia portfólia dlhopisov voči malým paralelným posunom úrokových mier

Ako zostrojiť portfólio imúnne voči malým paralelným posunom úrokových sadzieb a ako sa pri jeho zostrojení využije durácia dlhopisov v portfóliu ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.5. *Uvažujme, že za 4 roky je potrebné splatiť pôžičku vo výške 10^6 p. j. Najjednoduchšie je kúpiť bezkupónový dlhopis, ktorý za 4 roky prinesie 10^6 p. j. Predpokladajme, že taký dlhopis na trhu neexistuje. Existujú však kupónové dlhopisy A a B, oba s nominálnou hodnotou $F = 100$ p. j. také, že dlhopis A je 4-ročný poskytujúci každý rok kupón vo výške 5 % z nominálu a dlhopis B je 10-ročný poskytujúci každý rok kupón vo výške 3 % z nominálu. Skonštruujme portfólio pozostávajúce z dlhopisov A a B tak, aby bolo imúnne voči krátkodobým paralelným posunom úrokových mier. Uvažujme diskrétne úrokovanie (raz ročne) a nasledujúce nominálne úrokové sadzby na obdobie jedného až desiatich rokov:*

$r_1 = 0,0153$	$r_6 = 0,0194$
$r_2 = 0,0166$	$r_7 = 0,0202$
$r_3 = 0,0172$	$r_8 = 0,0211$
$r_4 = 0,0181$	$r_9 = 0,0223$
$r_5 = 0,0187$	$r_{10} = 0,0235$

Riešenie:

Označme P súčasnú hodnotu pôžičky, P_A súčasnú hodnotu dlhopisu A a P_B súčasnú hodnotu dlhopisu B. Potom:

$$P = \frac{10^6 \text{ p. j.}}{(1+r_4)^4} \doteq 930\ 761,16 \text{ p. j.} \tag{4.48}$$

$$P_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{5}{(1+r_i)^i} + \frac{100}{(1+r_4)^4} \doteq 112,24 \text{ p. j.} \tag{4.49}$$

$$P_B = \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{(1+r_i)^i} + \frac{100}{(1+r_{10})^{10}} \doteq 106,17 \text{ p. j.} \tag{4.50}$$

Nech ďalej a označuje počet kusov dlhopisu A v portfóliu a b označuje počet kusov dlhopisu B v portfóliu. Potom súčasná hodnota portfólia je $aP_A + bP_B$. Ak chceme zostrojiť portfólio, ktoré bude imúnne voči posunu úrokových mier, musí platiť:

$$aP_A + bP_B = P. \tag{4.51}$$

Durácia (uvádzaná v rokoch) pôžičky nech je D_P, durácie dlhopisov nech sú D_A pre dlhopis A, resp. D_B pre dlhopis B. Ide o durácie počítané zo vzťahu (4.44). Hodnoty jednotlivých durácií sú takéto:

$$D_P = \frac{4}{1+r_4} \doteq 3,93 \tag{4.52}$$

$$D_A = \frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{5i}{(1+r_i)^{i+1}} + \frac{400}{(1+r_4)^5}}{P_A} \doteq 3,67 \tag{4.53}$$

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{10} \frac{3i}{(1+r_i)^{i+1}} + \frac{1000}{(1+r_{10})^{11}}}{P_B} \doteq 8,61 \tag{4.54}$$

Imunizačné portfólio musí reagovať rovnako na zmeny úrokových sadzieb ako pôžička, t. j.:

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = a\frac{dP_A(0)}{d\lambda} + b\frac{dP_B(0)}{d\lambda}. \tag{4.55}$$

Čiže:

$$-D_P P = -aD_A P_A - bD_B P_B.$$

Odtiaľ po elementárnej úprave získame:

$$aP_A D_A + bP_B D_B = PD_P. \tag{4.56}$$

Máme teda sústavu dvoch rovníc (4.51), (4.56) o dvoch neznámych a, b. Ich riešením dostávame:

$$a = \frac{P(D_P - D_B)}{P_A(D_A - D_B)} \doteq 7864, \tag{4.57}$$

$$b = \frac{P(D_P - D_A)}{P_B(D_B - D_A)} \doteq 453, \tag{4.58}$$

zaokrúhlené na celé čísla. Do imunizačného portfólia je potrebné nakúpiť 7864 kusov dlhopisu A a 453 kusov dlhopisu B.

Poznámka 4.3. *Na príklade paralelnej zmeny úrokových sadzieb ukážeme, že imunizačné portfólio zostrojené v príklade 4.5 je imúnne voči malým paralelným posunom úrokových sadzieb.*

Uvažujme najprv, že dôjde k nárastu všetkých úrokových sadzieb o $0,001$. *Potom hodnota portfólia bude:*

$$7864\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{5\ p.\ j.}{(1,001+r_i)^i} + \frac{100\ p.\ j.}{(1,001+r_4)^4}\right) +$$
$$453\left(\sum_{i=1}^{10} \frac{3\ p.\ j.}{(1,001+r_i)^i} + \frac{100\ p.\ j.}{(1,001+r_{10})^{10}}\right) \doteq 927\ 126,66\ p.\ j. \tag{4.59}$$

V prípade, že uvažujeme presné hodnoty a, b získané zo sústavy rovníc (4.51), (4.56), *získame súčasnú hodnotu portfólia rovnú približne* 927 114, 19 *p. j.*

Hodnota pôžičky bude:

$$\frac{10^6 \ p.\ j.}{(1,001 + r_4)^4} \doteq 927\ 113,26 \ p.\ j., \tag{4.60}$$

čo je menej než hodnota portfólia.

Predpokladajme teraz pokles všetkých úrokových sadzieb o 0, 001. *Potom hodnota portfólia bude:*

$$7864 \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{5 \ p.\ j.}{(0,999 + r_i)^i} + \frac{100 \ p.\ j.}{(0,999 + r_4)^4} \right) +$$
$$453 \left(\sum_{i=1}^{10} \frac{3 \ p.\ j.}{(0,999 + r_i)^i} + \frac{100 \ p.\ j.}{(0,999 + r_{10})^{10}} \right) \doteq 934\ 440,54 \ p.\ j. \tag{4.61}$$

V prípade, že uvažujeme presné hodnoty a, b získané zo sústavy rovníc (4.51), (4.56), *získame súčasnú hodnotu portfólia rovnú približne* 934 427, 94 *p. j.*

Hodnota pôžičky bude:

$$\frac{10^6 \ p.\ j.}{(0,999 + r_4)^4} \doteq 934\ 427,01 \ p.\ j., \tag{4.62}$$

čo je opäť menej než hodnota portfólia.

Poznámka 4.4. *Portfólio z príkladu 4.5 však nie je imúnne voči posunom úrokových sadzieb, ktoré nie sú paralelné. Uvažujme napr. nárast iba* 10*-ročnej úrokovej sadzby o* 0, 001 *a ostatné úrokové sadzby ponechajme nezmenené.*

V takomto prípade sa súčasná hodnota pôžičky, ako i dlhopisu A nezmení, ale zmení sa súčasná hodnota dlhopisu B. Pretože ide o nárast úrokovej sadzby r_{10}*, hodnota dlhopisu B poklesne a teda poklesne i hodnota celého portfólia. Nová hodnota portfólia bude samozrejme pod úrovňou hodnoty pôžičky, pretože portfólio bolo zostrojené tak, aby malo rovnakú hodnotu ako pôžička. Číselne:*

$$453 \left(\frac{103 \ p.\ j.}{(1 + r_{10})^{10}} - \frac{103 \ p.\ j.}{(1,001 + r_{10})^{10}} \right) \doteq 359,45 \ p.\ j.$$

Čiže súčasná hodnota portfólia by bola zhruba o 359, 45 *p. j. nižšia než hodnota pôžičky.*

4.2 Akcie

4.2.1 Akciová spoločnosť

Na Slovensku definuje akciovú spoločnosť (ďalej tiež a. s.) Obchodný zákonník – zákon 513/1991 Zbierky zákonov Diel V. **Akciová spoločnosť** je spoločnosť, ktorej základné imanie je rozvrhnuté na určitý počet akcií s určitou menovitou hodnotou. Spoločnosť zodpovedá za porušenie svojich záväzkov celým svojím majetkom. Akcionár neručí za záväzky spoločnosti.

Akciová spoločnosť je kapitálová spoločnosť. Kapitálová spoločnosť je forma podnikania, do ktorej vstupujú spoločníci s cieľom zhodnotiť kapitál.

Spoločnosť môže založiť jeden zakladateľ, ak je zakladateľ právnickou osobou, inak dvaja alebo viacerí zakladatelia. Hodnota základného imania spoločnosti musí byť aspoň 25 000 €.

Najvyšším orgánom spoločnosti je **valné zhromaždenie**. Valné zhromaždenie sa koná najmenej raz za rok v lehote určenej stanovami a zvoláva ho predstavenstvo, ak zákon neustanovuje inak. Valné zhromaždenie rozhoduje väčšinou hlasov prítomných akcionárov, pokiaľ tento zákon alebo stanovy nevyžadujú inú väčšinu. Pri hlasovaní na valnom zhromaždení sa neprihliada na akcie, s ktorými akcionár nemôže vykonávať hlasovacie právo.

Do pôsobnosti valného zhromaždenia patrí:

- zmena stanov,
- rozhodnutie o zvýšení a znížení základného imania,
- voľba a odvolanie členov predstavenstva, pokiaľ stanovy neurčujú inak,
- voľba a odvolanie členov dozornej rady a iných orgánov určených stanovami,
- schválenie ročnej účtovnej závierky, rozhodnutie o rozdelení zisku alebo úhrade strát,
- rozhodnutie o ďalších otázkach, ktoré zákon, alebo stanovy zahŕňajú do pôsobnosti valného zhromaždenia.

Na schválenie rozhodnutia valného zhromaždenia o zmene stanov, zvýšení alebo znížení základného imania, o poverení predstavenstva na zvýšenie základného imania, vydaní prioritných dlhopisov alebo vymeniteľných dlhopisov, zrušení spoločnosti alebo zmene právnej formy je potrebná dvojtretinová väčšina hlasov prítomných akcionárov.

Predstavenstvo je štatutárnym orgánom spoločnosti, ktorý riadi činnosť spoločnosti a koná v jej mene. Predstavenstvo rozhoduje o všetkých záležitostiach spoločnosti, pokiaľ nie sú týmto zákonom alebo stanovami vyhradené do pôsobnosti valného zhromaždenia alebo dozornej rady. Predstavenstvo zabezpečuje riadne vedenie účtovníctva spoločnosti, uloženie výročnej správy do zbierky listín, zostavenie a uloženie konsolidovanej účtovnej závierky a konsolidovanej výročnej správy spoločnosti do zbierky listín, ak má spoločnosť takú povinnosť, a predkladá valnému zhromaždeniu na schválenie riadnu individuálnu účtovnú závierku a mimoriadnu individuálnu účtovnú závierku, ktoré je spoločnosť povinná vyhotovovať podľa osobitného predpisu, a návrh na rozdelenie zisku alebo úhradu strát v súlade so stanovami.

Predstavenstvo zvolá mimoriadne valné zhromaždenie, ak zistí, že strata spoločnosti presiahla hodnotu jednej tretiny základného imania alebo to možno predpokladať a predloží valnému zhromaždeniu návrhy opatrení. O týchto skutočnostiach upovedomí bez odkladu dozornú radu.

Členov predstavenstva volí a odvoláva valné zhromaždenie z akcionárov alebo iných osôb na dobu určenú v stanovách, ktorá nesmie presiahnuť päť rokov. Stanovy môžu určiť, že členov predstavenstva volí a odvoláva dozorná rada spôsobom v nich uvedeným.

Dozorná rada dohliada na výkon pôsobnosti predstavenstva a uskutočňovanie podnikateľskej činnosti spoločnosti. Členovia dozornej rady sú oprávnení nahliadať do všetkých dokladov a záznamov týkajúcich sa činnosti spoločnosti a kontrolujú, či účtovné záznamy sú riadne vedené v súlade so skutočnosťou a či sa podnikateľská činnosť spoločnosti uskutočňuje v súlade s právnymi predpismi, stanovami a pokynmi valného zhromaždenia. Dozorná rada skúma účtovné závierky, ktoré je spoločnosť povinná vyhotovovať podľa osobitného predpisu, a návrh na rozdelenie zisku alebo na úhradu strát a predkladá svoje vyjadrenie valnému zhromaždeniu.

Dozorná rada musí mať najmenej troch členov. Dve tretiny členov dozornej rady volí a odvoláva valné zhromaždenie a jednu tretinu zamestnanci spoločnosti, ak má spoločnosť viac ako 50 zamestnancov v hlavnom pracovnom pomere v čase voľby. Členom dozornej rady môže byť len fyzická osoba. Člen dozornej rady nesmie byť zároveň členom predstavenstva, prokuristom alebo osobou oprávnenou podľa zápisu v obchodnom registri konať v mene spoločnosti.

K výhodám akciovej spoločnosti patrí:

- možnosť predávať akcie a aktívne s nimi obchodovať,
- lepšie zabezpečenie kapitálu,
- na ovládanie spoločnosti teoreticky postačuje viac ako 50 % akcií.

Nevýhody akciovej spoločnosti sú:

- jej založenie je drahé a prevádzkovanie nákladné,
- rozhodovanie je zložitejšie.

4.2.2 Akcia

Akcia predstavuje práva akcionára ako spoločníka podieľať sa podľa zákona a stanov spoločnosti na jej riadení, zisku a na likvidačnom zostatku po zrušení spoločnosti likvidáciou, ktoré sú spojené s akciou ako s cenným papierom, ak zákon neustanovuje inak. Akcia môže byť vydaná v podobe listinného cenného papiera alebo v podobe zaknihovaného cenného papiera.

Akcia môže znieť na meno alebo na doručiteľa (ide o anonymné akcie, neviažuce sa na konkrétne meno). Akcia na doručiteľa môže byť vydaná len ako zaknihovaná. Prevod listinných akcií na meno sa uskutočňuje rubopisom a odovzdaním akcie.

Akcia obsahuje:

- obchodné meno a sídlo spoločnosti,
- menovitú (nominálnu) hodnotu,
- označenie, či akcia znie na doručiteľa alebo na meno,
- výšku základného imania a počet všetkých akcií spoločnosti k dátumu vydania emisie akcií,

- dátum vydania emisie akcií.

Listinná akcia obsahuje aj číselné označenie a podpis člena alebo podpisy členov predstavenstva, ktorí sú oprávnení konať za spoločnosť v čase vydania akcie.

Akcie delíme na:

1. kmeňové,
2. prioritné,
3. zamestnanecké.

Držiteľ **kmeňovej akcie** má právo podieľať sa na riadení spoločnosti (hlasovať na valnom zhromaždení), podieľať sa na zisku a na likvidačnom zostatku.

Držiteľ **prioritnej akcie** obyčajne nemá hlasovacie právo, ale má prednostné právo na zisk a zostatok spoločnosti v likvidácii.

Zamestnanecké akcie znejú na meno. Obchoduje sa s nimi iba medzi zamestnancami alebo bývalými zamestnancami spoločnosti. Majitelia zamestnaneckých akcií majú právo podieľať sa na riadení akciovej spoločnosti, na dividendu a na podiel na likvidačnom zostatku spoločnosti.

Podiel na zisku spoločnosti je akcionárovi vyplácaný formou **dividend**. Dividendy sa vyplácajú rôzne: štvrťročne, polročne, ročne, ... (v závislosti od firmy). Dividenda sa zvyčajne určuje ako percento z nominálnej hodnoty akcie, pričom prioritne sú dividendy vyplácané držiteľom prioritných akcií, až potom držiteľom kmeňových akcií.

Príklad 4.6. ***Rovnomerné rozdeľovanie dividend***
Nech základný kapitál spoločnosti je 28 *miliónov p. j., z toho nech* 21 *mil. p. j. je v kmeňových akciách a* 7 *miliónov p. j. je v prioritných akciách. Predpokladajme, že firma dosiahla zisk* $4,2$ *milióna p. j. a chce ho celý rozdeliť medzi akcionárov pri dividende* 10 % *z nominálnej hodnoty akcie. Určme, aká časť zisku pripadne prioritným akcionárom a aká časť kmeňovým akcionárom.*

Riešenie:
Vypočítajme najprv veľkosť dividendy pre prioritných akcionárov. Keďže dividenda tvorí 10 % z nominálnej hodnoty akcie, dostaneme:

$$0,1.7.10^6 \text{ p. j.} = 0,7 \text{ milióna p. j.} \tag{4.63}$$

Teraz vypočítajme dividendu pre kmeňových akcionárov:

$$0,1.21.10^6 \text{ p. j.} = 2,1 \text{ milióna p. j.} \tag{4.64}$$

Súčet (4.63) a (4.64) dáva $2,8$ milióna p. j. a teda zvyšok zo zisku po vyplatení dividend je $1,4$ milióna p. j.

Pretože firma chce rozdeliť celý zisk, každý akcionár dostane ešte bonus vo výške:

$$\frac{1,4 \text{ milióna p. j.}}{28 \text{ miliónov p. j.}} = 0,05$$

z nominálnej hodnoty akcie.

Príklad 4.7. ***Nerovnomerné rozdeľovanie dividend***
Nech základný kapitál spoločnosti je 25 *miliónov p. j., z toho nech* 20 *mil. p. j. je v kmeňových akciách a* 5 *miliónov p. j. je v prioritných akciách. Predpokladajme, že firma dosiahla zisk* 1, 1 *milióna p. j. a chce ho rozdeliť medzi akcionárov pri dividende* 10 % *z nominálnej hodnoty akcie. Určme, aká časť zisku pripadne prioritným akcionárom a aká časť kmeňovým akcionárom.*

Riešenie:
Vypočítajme najprv veľkosť dividendy pre prioritných akcionárov. Keďže dividenda tvorí 10 % z nominálnej hodnoty akcie, dostaneme:

$$0,1.5.10^6 \text{ p. j.} = 0,5 \text{ milióna p. j.}$$

Teraz vypočítajme dividendu, ktorú by mali dostať kmeňoví akcionári:

$$0,1.20.10^6 \text{ p. j.} = 2 \text{ milióny p. j.}$$

Po vyplatení prioritných akcionárov ostane zo zisku iba 0, 6 milióna p. j. Čiže kmeňoví akcionári dostanú práve 0, 6 milióna p. j. a dividenda pre kmeňových akcionárov nebude vyplatená v plnej výške. Každý z kmeňových akcionárov dostane:

$$\frac{0,6 \text{ miliónov p. j.}}{20 \text{ miliónov p. j.}} = 0,03$$

z nominálnej hodnoty akcie.

Nové emisie akcií sa uskutočňujú na primárnom trhu, na ktorom sa uskutočňujú emisné obchody. Nové akcie možno umiestniť buď na burze alebo mimo burzy – OTC. Umiestnenie nových akcií môže byť verejné, pri ktorom sú akcie prijaté na obchodovanie na regulovanom trhu, alebo neverejné, v tom prípade ide o súkromné umiestnenia.

Na novoemitované akcie má akcionár **odoberacie právo**, t. j. predkupné právo, ktoré má zabezpečiť nezmenšený podiel pri zvýšení akciového kapitálu. Akcionár na základe počtu vlastnených akcií obdrží odoberacie právo na novoemitované akcie. Toto právo možno charakterizovať štyrmi pojmami:

- odoberací kupón,
- odoberacia doba,
- odoberací pomer,

- odoberacia cena.

Odoberací kupón stelesňuje predkupné právo akcionára. Po prekročení **odoberacej doby** je odoberací kupón neplatný. V prípade, že akcionár nemá záujem využiť odoberacie právo, môže ho predať.

Odoberacia cena nových (mladých) akcií býva obyčajne nižšia ako cena starých akcií.

V prípade, že sa akcionár rozhodne využiť svoje odoberacie právo, **odoberací pomer** určuje pomer starých akcií vlastnených akcionárom k novoobdržaným mladým akciám. Výpočet odoberacieho pomeru ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.8. ***Určenie odoberacieho pomeru***
Uvažujme spoločnosť so základným kapitálom 100 000 *p.j, ktorý je rozdelený do* 20 000 *kmeňových akcií. Predpokladajme, že príde k navýšeniu kapitálu o* 130 000 *p. j. (t. j. celkový kapitál po navýšení bude* 230 000 *p. j.), ktorý bude rozdelený do emisie* 12 000 *kmeňových akcií a* 14 000 *prioritných akcií (t. j. celkovo* 26 000 *nových akcií). Určme odoberací pomer kmeňového akcionára.*

Riešenie:
Na vlastnených 20 000 kmeňových akcií teda pripadne 12 000 nových kmeňových akcií a 14 000 nových prioritných akcií. Odoberací pomer akcionára je teda:

$$20\ 000 : 12\ 000 : 14\ 000 = 10 : 6 : 7.$$

To znamená, že akcionár získava k 10 starým akciám odoberacie právo na 6 nových kmeňových akcií a 7 nových prioritných akcií.

Na internete možno nájsť mnoho webstránok a mnoho spoločností (za všetky uveďme [31]) poskytujúcich informácie o akciách. Tieto informácie sa týkajú predovšetkým aktuálnej ceny akcie a objemu obchodovania, resp. zmien ceny a objemu obchodovania, ale možno nájsť aj mnohé iné.

Zaujímavú informáciu o akcii poskytuje napr. ukazovateľ *PE Ratio* (pre niektoré akcie býva neurčený), ktorý určuje pomer trhovej ceny akcie k čistému zisku (zisku po zdanení) na akciu. V prípade, že spoločnosť nemá zisk alebo je v strate, uvádza sa PE Ratio ako „N/A“. Ukazovateľ sa zvykne používať na vyhodnocovanie toho, či sú akcie spoločnosti nadhodnotené alebo podhodnotené.

Mnohí obchodníci sledujú tento ukazovateľ a porovnávajú ho s vlastnými očakávaniami o spoločnosti, na základe čoho sa rozhodujú, či kúpiť alebo nekúpiť akcie spoločnosti. Existuje viac možností ako *PE Ratio* interpretovať v závislosti napr. od spôsobu jeho výpočtu, ale aj ďalších faktorov. V prípade, že ide o ročný zisk na akciu, jednotkou ukazovateľa je jeden rok, keďže delíme peňažné jednotky peňažnými jednotkami zarobenými na akciu za jeden rok. V tom prípade je jedna z možných interpretácií taká, že ukazovateľ vyjadruje, koľko času (v rokoch) potrebuje spoločnosť na to, aby si pri súčasných (ročných) príjmoch na akciu zarobila na cenu akcie.

Čo sa týka očakávaní investorov, pri spoločnostiach s vysokými hodnotami ukazovateľa sa dá v budúcnosti očakávať rast príjmov v porovnaní so spoločnosťami s nižšími hodnotami ukazovateľa, kým pri spoločnostiach s nízkymi hodnotami ukazovateľa sa dajú v budúcnosti očakávať nižšie príjmy v porovnaní so spoločnosťami s vyššími hodnotami ukazovateľa. Čo možno považovať za vyššiu, resp. nižšiu hodnotu ukazovateľa nie je pevne stanovené, závisí to od vyhodnotenia jednotlivého investora.

4.3 Ako ohodnocovať akcie

„It's tough to make predictions, especially about the future.“[2]
Yogi Berra

Spôsobov, ako ohodnotiť cenné papiere, špeciálne akcie, je vo všeobecnosti mnoho, ale základné analýzy, ktoré sa pri tom využívajú sú len dve – fundamentálna analýza a technická analýza.

Technická analýza sa zameriava takmer výlučne na graf cenového vývoja funkcie, jeho tvar, prípadne v ňom hľadá isté obrazce, alebo sa sústreďuje na objem obchodov uskutočnených s daným aktívom. Technický analytik predpokladá, že všetky informácie o budúcom vývoji ceny aktíva sa zobrazujú nejakým spôsobom do cenového grafu. Sleduje preto opakovanie vývoja ceny aktíva (cykly), využíva rôzne technické nástroje analýzy, ako je napr. zobrazenie cenového grafu (sviečkový graf a iné), alebo monitoruje rôzne indikátory zmeny vývoja ceny (ako napr. MACD – Moving average convergence divergence).

Fundamentálna analýza využíva všetky dostupné (súčasné i minulé) informácie na určenie vnútornej (očakávanej) hodnoty aktíva, špeciálne akcie, ktorú potom porovnáva s cenou aktíva na trhu za účelom zistenia, či je aktívum nadhodnotené alebo podhodnotené.

V tejto učebnici sa budeme venovať len fundamentálnej analýze.

4.3.1 Dividendový model

Model pracuje s diskrétnym úrokovaním raz ročne a jednotnou výnosovou sadzbou akcie r konštatnou pre všetky obdobia, o ktorej predpokladá, že $r > 0$.

Odvodenie súčasnej hodnoty akcie začnime nasledujúcou úvahou. Akcia poskytuje majiteľovi dvojicu hotovostných tokov (výplat pre majiteľa akcie). Sú to dividendy a kapitálové zisky (straty) z predaja akcie. Ak si čase $t_0 = 0$ (napr. dnes) kúpime akciu za cenu P_0 a po roku predáme za cenu P_1, malo by platiť:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)}, \tag{4.65}$$

kde D_t je dividenda vyplácaná na konci t-teho roku, P_t je cena (hodnota) akcie na konci t-teho roku a r je výnosová sadzba (miera) akcie (miera trhovej kapitalizácie).

[2] v preklade: Je ťažké niečo predpovedať, najmä budúcnosť.

Hodnoty P_1, resp. D_1 v čase 0 nepoznáme. Možno ich odhadnúť na základe informácie známej v čase 0. Predstavujú teda naše očakávania o budúcej cene akcie a hodnote dividendy, ktorú akcia vyplatí v roku 1. V takom prípade P_0 reprezentuje súčasnú hodnotu akcie (hodnotu akcie v čase $t_0 = 0$).

Očakávania o budúcich cenách, resp. dividendách sú podmienené informačnou množinou známou v súčasnosti, v ktorej sú nazhromaždené všetky dostupné minulé a súčasné informácie o akcii (jej vlastnostiach/charakteristikách), resp. o spoločnosti, ktorá akciu vydala a ďalšie relevantné informácie potenciálne vplývajúce na vývoj ceny akcie.

Základné informácie o informačných množinách a podmienených očakávaniach poskytujú prvé kapitoly v [12], ďalšie relevantné informácie možno nájsť napríklad v [15].

Zopakujúc predchádzajúcu úvahu pre rok 1 dostaneme:

$$P_1 = \frac{D_2}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)}, \tag{4.66}$$

kde očakávania o cene akcie a hodnote dividendy v roku 2 sú podmienené informáciou známou v roku 1.

Dosadením (4.66) do (4.65) získame:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}.$$

Tu treba podotknúť, že očakávania o D_2, resp. P_2 podmienené informáciou v čase 1 možno dosadením zameniť za očakávania podmienené informáciou známou v čase 0, pretože informačná množina v čase 0 je podmnožinou informačnej množiny v čase 1 (pozri [12]). Inými slovami v čase 0 nemožno okamžite rozšíriť naše poznanie o informácie dostupné až v neskoršom čase. Musíme vychádzať len z toho, čo vieme v aktuálnom čase.

Predchádzajúci postup sa dá aplikovať aj pre ďalšie roky, preto pre n období (rokov) máme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \tag{4.67}$$

čo možno dokázať matematickou indukciou.

Pre „nesmrteľné“ ($n \to \infty$) akcie dostaneme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}, \tag{4.68}$$

teda za predpokladu, že nekonečný rad v (4.68) konverguje, tzn. agenti na trhu majú rozumné (nie prehnané) očakávania ohľadom budúcich dividend plynúcich z akcie a pri predpoklade, že:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{(1+r)^n} = 0,$$

t. j. očakávajú, že súčasná hodnota ceny akcie „na konci vekov“ je nulová.

Hoci predpokladať nekonečnú existenciu akcie (a teda aj spoločnosti, ktorá akciu emitovala) je na prvý pohľad smiešne, v skutočnosti nie je tento predpoklad nijak zvlášť obmedzujúci. Z nášho súčasného pohľadu (v čase 0) nevieme určiť presný rok zániku spoločnosti a teda spoľahlivo stanoviť n v (4.67), navyše vplyv dividend v časoch veľmi vzdialených od súčasnosti na hodnotu P_0 je zanedbateľne malý, pretože diskontovaním sa znižuje ich súčasná hodnota.

Ak $D_t \neq 0$ pre každé $t \geq 1$, čiže $D_t > 0$ pre každé $t \geq 1$, pretože záporné dividendy sa nevyplácajú, potom konvergenciu radu v (4.68) možno zabezpečiť požiadavkou:

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} < 1 + r \text{ pre každé } t \geq 1 \text{ (alebo aspoň od istého } t \text{ počnúc)}, \tag{4.69}$$

teda, že rast dividend nie je príliš veľký. Nedosahuje svojou rýchlosťou hodnotu výnosovej sadzby akcie.

Za platnosti (4.68) možno odvodiť:

$$P_n = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^{t-n}} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{t+n}}{(1+r)^t}. \tag{4.70}$$

Poznámka 4.5. *Poznamenajme, že predpoklad $r = 0$ nijak nenarúša tvrdenie, že súčasná hodnota akcie je súčtom súčasných hodnôt všetkých budúcich dividend plynúcich z akcie, ak zachováme požiadavky na konvergenciu radu v* (4.68)*, resp. v* (4.70)*, t. j. predpokladáme, že* $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ *a že pre každé $t \geq 1$ (alebo aspoň od istého t počnúc) platí $\frac{D_{t+1}}{D_t} = L < 1$, kde $L \geq 0$ je konštanta.*

Nulový rast spoločnosti

Predpokladajme, že akcia vypláca konštantnú dividendu $D > 0$ v každom roku, t. j. pre každé $t \geq 1$ platí $D_t = D$.

Tento predpoklad možno použiť pri oceňovaní prioritných akcií, ktoré zvyknú vyplácať konštantnú dividendu, resp. pri oceňovaní kmeňových akcií za nulového rastu.

Požiadavka na konvergenciu radu zo (4.69) je pre takéto akcie splnená, pretože pre každé $t \geq 1$ platí:

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = \frac{D}{D} = 1 < 1 + r,$$

kde posledná nerovnosť vyplýva z toho, že predpokladáme $r > 0$.

Zo vzťahu (4.68) potom dostaneme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}, \tag{4.71}$$

kde sme využili, že súčet nekonečného geometrického radu $\sum_{t=0}^{\infty} q^t$ s kvocientom q v absolútnej hodnote menším ako 1 sa rovná $\frac{1}{1-q}$.

Kvocient geometrického radu v (4.71) je rovný $\frac{1}{1+r}$, taký, že $0 < \frac{1}{1+r} < 1$. Rad teda naozaj konverguje.

Zo vzťahu (4.71) máme:

$$r = \frac{D}{P_0}. \tag{4.72}$$

Podiel $\frac{D}{P_0}$ sa nazýva dividendový výnos a slúži na odhad miery trhovej kapitalizácie.

Príklad 4.9. *Vypočítajme výnosovú sadzbu r (mieru trhovej kapitalizácie) akcie, ktorá vypláca konštantnú dividendu 4 p. j. a ktorej súčasná cena je 50 p. j.*

Riešenie:

$P_0 = 50$ p. j., $D = 4$ p. j., $r = ?$

Zo (4.72) bezprostredne dostávame:

$$r = \frac{D}{P_0} = \frac{4 \text{ p. j.}}{50 \text{ p. j.}} = 0,08.$$

Výnosová sadzba akcie je 0,08.

Konštantný rast spoločnosti

Predpokladajme, že akcia vypláca dividendu, ktorá rastie mierou rastu $0 < g < r$, teda pre každé $t \geq 1$ platí: $D_t = D(1+g)^{t-1}$, kde $D > 0$.

Ide predovšetkým o ohodnocovanie kmeňových akcií pri konštantnom raste dividendy.

Požiadavka na konvergenciu radu zo (4.69) je aj v tomto prípade splnená, pretože pre každé $t \geq 1$ platí:

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = \frac{D_t(1+g)}{D_t} = 1 + g < 1 + r,$$

kde posledná nerovnosť vyplýva z toho, že predpokladáme $g < r$.

Dosadením za D_t do (4.68) získame:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t = \frac{D}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{D}{r-g}, \tag{4.73}$$

kde sme využili, že geometrický rad s kvocientom $0 < \frac{1+g}{1+r} < 1$ je konvergentný.

Zo (4.73) máme:

$$r = g + \frac{D}{P_0}. \tag{4.74}$$

Zaveďme nasledujúce označenia:

- EPS – zisk na akciu (anglicky *earnings per share*),
- $BVPS$ – účtovná hodnota vlastného kapitálu na akciu (anglicky *book value of equity per share*),
- ROE – výnos vlastného kapitálu alebo tiež návratnosť vlastného kapitálu (anglicky *return on equity*); platí: $ROE = \frac{EPS}{BVPS}$,
- b – aktivačný pomer, t. j. miera nerozdeleného zisku (po zdanení) na akciu: $b = \frac{EPS-D}{EPS} = 1 - \frac{D}{EPS}$,
- $1 - b$ – výplatný pomer, teda: $1 - b = \frac{D}{EPS}$,

potom $g = ROE.b$, čiže $g = \frac{EPS-D}{BVPS}$.

Príklad 4.10. *Vypočítajme výšku dividendy $D_1 = D$, ktorú o rok poskytne akcia s cenou 24 p. j., ak výnosová sadzba akcie sa rovná $0,1$, aktivačný pomer je $0,5$ a návratnosť kapitálu je $0,12$.*

Riešenie:

$P_0 = 24$ p. j., $r = 0,1$, $b = 0,5$, $ROE = 0,12$, $D =?$ p. j.

Vypočítajme najprv rýchlosť rastu dividend:

$$g = b.ROE = 0,5.0,12 = 0,06.$$

Potom zo (4.73) dostaneme:

$$D = P_0(r-g) = (24 \text{ p. j.})(0,1-0,06) = 0,04(24 \text{ p. j.}) = 0,96 \text{ p. j.}$$

Výška dividendy v roku 1 je $0,96$ p. j.

Nerovnaký rast spoločnosti

Žiadna firma nedokáže rásť do nekonečna pri veľkom g. V reálnom živote návratnosť investícií (ROE) klesá s časom.

Predpokladajme, že dividenda prvých n rokov rastie tempom rastu G a potom tempo rastu klesne na $0 < g < G$, kde súčasne $g < r$. Ide o dvojstupňový model. V takom prípade máme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \tag{4.75}$$

kde podľa (4.70) bude:

$$P_n = \frac{D(1+G)^{n-1}}{(1+r)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1+g)^{t+1}}{(1+r)^t} = \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{r-g}. \tag{4.76}$$

Dosadením (4.76) za P_n do (4.75) dostaneme:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\
&= \frac{D}{(1+r)} \frac{1-\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1+G}{1+r}} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\
&= \frac{D}{r-G} - \frac{D}{r-G}\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n + \frac{D(1+g)}{(1+G)(r-g)}\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n \\
&= \frac{D}{r-G} + D\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n \left(\frac{1+g}{(1+G)(r-g)} - \frac{1}{r-G}\right) \\
&= \frac{D}{r-G} + D\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n \left(\frac{(1+g)(r-G)-(1+G)(r-g)}{(1+G)(r-g)(r-G)}\right) \\
&= \frac{D}{r-G} + D\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n \left(\frac{(1+r)(g-G)}{(1+G)(r-g)(r-G)}\right) \\
&= \frac{D}{r-G} + \frac{D}{r-G}\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1} \left(\frac{g-G}{r-g}\right).
\end{aligned}$$

Čiže:

$$P_0 = \frac{D}{r-G}\left(1 - \left(\frac{G-g}{r-g}\right)\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1}\right). \tag{4.77}$$

Špeciálne, ak $n = 1$ v (4.77), tak $P_0 = \frac{D}{r-g}$.

Poznámka 4.6. *Poznamenajme, že pre tento dvojstupňový model nie je nutné požadovať, aby $G < r$. Ak by sme napr. uvažovali $G > r$, hodnota P_0 bude väčšia ako nula, pretože v tom prípade bude podiel $\frac{D}{r-G}$ v (4.77) záporný, ale rovnako záporný bude aj rozdiel*

$$1 - \left(\frac{G-g}{r-g}\right)\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1},$$

keďže

$$\frac{G-g}{r-g} > 1 \text{ aj } \frac{1+G}{1+r} > 1.$$

Ak by $G < r$, opäť je $P_0 > 0$, pretože podiel $\frac{D}{r-G}$ v (4.77) je kladný a rovnako kladný je aj rozdiel

$$1 - \left(\frac{G-g}{r-g}\right)\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1},$$

keďže

$$\frac{G-g}{r-g} < 1 \text{ aj } \frac{1+G}{1+r} < 1.$$

Problematická je v súvislosti s použitím (4.77) na výpočet P_0 situácia, keď $G = r$. V tom prípade nemožno vzťah (4.77) použiť na výpočet P_0 a P_0 je potrebné počítať priamo zo (4.75):

$$\begin{aligned}
P_0 &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+r)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+r)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \frac{D}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)(r-g)} \\
&= \frac{nD}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)(r-g)} \\
&= \frac{D}{1+r}\left(n + \frac{1+g}{r-g}\right).
\end{aligned}$$

Príklad 4.11. *Nech $r = 0,3$. Určme P_0 akcie, ktorá nasledujúci rok prinesie dividendu $D = 2$ p. j., ktorá počas ďalších štyroch rokov porastie rýchlosťou rastu $G = 0,2$ a od šiesteho roka počnúc táto rýchlosť klesne na $g = 0,1$.*

Riešenie:

$D = 2$ p. j., $n = 5$ rokov, $r = 0,3$, $G = 0,2$, $g = 0,1$, $P_0 =?$ p. j.

Zo (4.77) máme:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{D}{r-G}\left(1 - \left(\frac{G-g}{r-g}\right)\left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{2 \text{ p. j.}}{0,3-0,2}\left(1 - \left(\frac{0,2-0,1}{0,3-0,1}\right)\left(\frac{1,2}{1,3}\right)^{4}\right) \doteq 12,74 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Súčasná cena akcie je približne $12,74$ p. j.

V súvislosti so zmenou rýchlosti rastu dividend možno predpokladať aj iné modely než model dvojstupňový. Napríklad môžeme predpokladať, že g je hladko klesajúcou funkciou času t takou, že $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. Potom postupnosť $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$, kde $g_t = g(t)$ pre $t \in \mathbb{N}$, je klesajúca s $\lim_{t\to\infty} g_t = 0$. V takom prípade je podmienka $g_t < r$ zaručená od istého t počnúc. Navyše rad v (4.68) konverguje.

Tvrdenie 4.4. *Predpokladajme, že pre každé $t \geq 1$ je $D_{t+1} = D_t(1+g_t)$, kde $D_1 = D > 0$ a postupnosť $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ je klesajúca s $\lim_{t\to\infty} g_t = 0$. Potom nekonečný rad $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$ je konvergentný.*

Dôkaz. Klesanie postupnosti $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ spolu s podmienkou $\lim_{t\to\infty} g_t = 0$ zabezpečuje, že všetky členy postupnosti sú kladné, z čoho vyplýva, že i $D_t > 0$ pre každé $t \geq 1$.

Rad $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$ je preto konvergentný, ak:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_{t+1}}{(1+r)^{t+1}}}{\frac{D_t}{(1+r)^t}} = L < 1.$$

Vypočítajme túto limitu:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_{t+1}}{(1+r)^{t+1}}}{\frac{D_t}{(1+r)^t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_t(1+g_t)}{(1+r)^{t+1}}}{\frac{D_t}{(1+r)^t}} = \frac{1}{1+r} \lim_{t\to\infty} (1+g_t) = \frac{1}{1+r} = L < 1.$$

□

Závery z tvrdenia 4.4 môžeme dobre ilustrovať na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.12. *Nech $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ je taká, že $g_t = \frac{1}{t}$. Nech pre každé $t \geq 1$ je $D_{t+1} = D_t(1+g_t)$ s $D_1 = D > 0$. Ukážme, že $\lim_{t\to\infty} g_t = 0$ a nájdime súčet radu $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$.*

Riešenie:

Postupnosť $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ je klesajúca, navyše z toho, že $g_t = \frac{1}{t}$, dostaneme:

$$\lim_{t\to\infty} g_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Pre výšku dividendy D_t v čase $t = 1, 2, \ldots$ platí:

$$\begin{aligned}
D_1 &= D, \\
D_2 &= D_1(1+g_1) = D\left(1+\frac{1}{1}\right) = 2D, \\
D_3 &= D_2(1+g_2) = 2D\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3D, \\
D_4 &= D_3(1+g_3) = 3D\left(1+\frac{1}{3}\right) = 4D, \\
&\vdots \\
D_{t+1} &= D_t(1+g_t) = tD\left(1+\frac{1}{t}\right) = tD\left(\frac{t+1}{t}\right) = (t+1)D. \qquad (4.78) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Súčet radu teda bude:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+r)^t} &= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{tD}{(1+r)^t} = D\sum_{t=1}^{\infty}t\left(\frac{1}{1+r}\right)^t = \frac{D}{1+r}\sum_{t=1}^{\infty}t\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1}\\ &= \frac{D}{1+r}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{1+r}\right)^2} = \frac{D}{1+r}\frac{1}{\left(\frac{r}{1+r}\right)^2} = \frac{D(1+r)}{r^2},\end{aligned}$$

kde sme využili vedomosť, že funkcia $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{t=0}^{\infty} x^t$ pre každé $|x| < 1$ a deriváciu funkcie f v x možno získať derivovaním radu $\sum_{t=0}^{\infty} x^t$ člen po člene.

Poznámka 4.7. *To, že postupnosť $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ z predchádzajúceho príkladu je klesajúca, neznamená, že dividendy, ktoré akcia poskytuje, budú klesať. V predchádzajúcom príklade sme mohli vidieť (vzťah* (4.78)*), že napriek klesajúcej rýchlosti rastu dividend výška dividendy s rastúcim časom narastala. Je to preto, že g_t reprezentuje rýchlosť rastu dividend a tá, hoc je aj klesajúca, je kladná pre všetky $t \geq 1$.*

4.3.2 Rastový model

Akcie možno rozdeliť na:

- príjmové,
- rastové.

Príjmové akcie vyplácajú dividendu a investori ich zvyčajne kupujú pre príjem z dividend.

Od **rastových akcií** sa očakáva kapitálový zisk plynúci z rozdielu medzi kúpnou a predajnou cenou akcie. Očakáva sa rast ich ceny. Často nevyplácajú dividendu.

Niektoré spoločnosti uprednostňujú v prvých rokoch existencie nulové dividendy, aby mohli rýchlejšie rásť (celý dosiahnutý zisk sa investuje do ďalšieho zveľadenia firmy). V neskorších rokoch potom môžu začať dividendu vyplácať.

Ak uvažujeme firmu, ktorá vyplatí akcionárom celý zisk vo forme dividend, tak samozrejme rýchlosť rastu dividend je nulová. V tomto prípade je cena akcie $P_0 = \frac{EPS}{r} = \frac{D}{r}$, ako určuje už dividendový model.

Aká však bude cena akcie firmy, ktorá akceptuje niektorú z jej rastových príležitostí?

Označme $NPVGO$ čistú súčasnú hodnotu rastových príležitostí (z anglického *net present value of growth opportunities*). Potom odpoveďou na položenú otázku je:

$$P_0 = \frac{EPS}{r} + NPVGO. \tag{4.79}$$

Hodnotu P_0 v (4.79) stanovuje rastový model, ktorý chápe cenu (súčasnú hodnotu) akcie ako súčet ceny akcie pri nulovom raste a čistej súčasnej hodnoty rastových príležitostí. Ako funguje výpočet P_0 cez rastový model, demonštrujeme na príklade 4.13. Ešte predtým sa pozrime na niektoré dôsledky plynúce zo vzťahu (4.79).

Zo (4.79) získame:

$$\frac{EPS}{P_0} = r\left(1 - \frac{NPVGO}{P_0}\right). \tag{4.80}$$

Ak teda $NPVGO > 0$, tak zo (4.80) vyplýva $\frac{EPS}{P_0} < r$. Ak $NPVGO < 0$, tak $\frac{EPS}{P_0} > r$.

Opätovne sa teda stretávame s ukazovateľom *PE Ratio*, pretože $\frac{EPS}{P_0}$ je tento ukazovateľ akurát v obrátenej podobe.

Príklad 4.13. *Uvažujme spoločnosť, ktorej* $EPS = 10$ *p. j., aktivačný pomer* $b = 0,4$, $ROE = 0,2$ *a* $r = 0,16$. *Vypočítajme cenu akcie* P_0 *cez dividendový model aj cez rastový model.*

Riešenie:

Urobme najprv výpočet cez dividendový model. Pretože $b = 0,4$, tak výplatný pomer $1 - b = 0,6$. Keďže výplatný pomer určuje, aká časť zisku pôjde do výplaty dividend, tak

$$D = (1-b)EPS = 6 \text{ p. j.}$$

Pretože $ROE = 0,2$, tak $g = ROE.b = 0,08$. Potom:

$$P_0 = \frac{D}{r-g} = \frac{6 \text{ p. j.}}{0,08} = 75 \text{ p. j.}$$

Ohodnoťme teraz danú akciu na základe rastového modelu. Modely by mali určovať cenu akcie v čase 0 ekvivalentne, teda môžeme predpokladať, že ak sa nepomýlime vo výpočte, dostaneme na konci rovnakú hodnotu P_0.

Pretože $b = 0,4$, tak do firmy sa z $EPS = 10$ p.j vracajú 4 p. j. (ako sme argumentovali vyššie, 6 p. j. ide na výplatu dividendy). Pretože $ROE = 0,2$, tak hotovosť generovaná investíciou prináša v roku 2: $b.EPS.ROE = 0,2(4 \text{ p. j.}) = 0,8$ p. j. na akciu.

Čistá súčasná hodnota NPV_1 tohto projektu sa v roku 1 rovná:

$$NPV_1 = -4 \text{ p. j.} + \frac{0,8 \text{ p. j.}}{0,16} = 1 \text{ p. j.}$$

V roku 2 bude firma investovať o 8 % viac, lebo $g = 0,08$, konkrétne $1,08(4 \text{ p. j.}) = 4,32$ p. j. a teda:

$$NPV_2 = -4,32 \text{ p. j.} + \frac{1,08(0,8 \text{ p. j.})}{0,16} = 1,08 \text{ p. j.}$$

A tak ďalej.

Celkovo v roku 0 bude:

$$\begin{aligned} NPVGO &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{NPV_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1,08)^{t-1} \text{ p. j.}}{(1,16)^t} = \frac{1 \text{ p. j.}}{1,16} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1,08}{1,16}\right)^t \\ &= \frac{1 \text{ p. j.}}{1,16} \frac{1}{1 - \frac{1,08}{1,16}} = \frac{1 \text{ p. j.}}{0,08} = 12,5 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Keďže $\frac{EPS}{r} = \frac{10 \text{ p. j.}}{0,16} = 62,5$ p. j., tak máme:

$$P_0 = \frac{EPS}{r} + NPVGO = 62,5 \text{ p. j.} + 12,5 \text{ p. j.} = 75 \text{ p. j.}$$

Aj výpočtom cez rastový model sme dospeli k tomu istému výsledku.

4.3.3 Racionálne očakávania a cenové bubliny

Riešenie (4.70) stochastickej rovnice (4.65) pre $t_0 = n$:

$$P_n = \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}}{(1+r)}, \tag{4.81}$$

v ktorej P_{n+1} predstavuje očakávanú (strednú) hodnotu ceny akcie v nasledujúcom roku pri informácii známej v tomto roku, budeme nazývať **fundamentálnym riešením** rovnice (4.81) a označovať P_n^*. Pri rozumných (racionálnych) očakávaniach predstavuje P_n^* súčasnú hodnotu budúcich hotovostných tokov (dividend) plynúcich z držania akcie.

Riešenie (4.70) stochastickej rovnice (4.81) nie je jediné. Uvažujme napríklad P_n také, že

$$P_n = P_n^* + B_n, \tag{4.82}$$

kde $B_n = B(1+r)^n$ s $B > 0$ je tzv. **expandujúca bublina**, t. j. $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$.

Riešenie (4.82) skutočne vyhovuje (4.81). Ukážeme:

$$\begin{aligned}
\frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}}{(1+r)} &= \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}^* + B_{n+1}}{(1+r)} \\
&= \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}^*}{(1+r)} + \frac{B_{n+1}}{(1+r)} \\
&= P_n^* + \frac{B(1+r)^{n+1}}{(1+r)} = P_n^* + B(1+r)^n = P_n^* + B_n = P_n.
\end{aligned}$$

Prítomnosť bublín v cene aktíva je výsledkom obchodných špekulácií s aktívom, ktoré majú priniesť zisk z rozdielu nákupnej a predajnej ceny pre špekulanta – držiteľa aktíva. Samotné aktívum slúži len ako nástroj, o ktorom sa predpokladá, že jeho cena porastie. Investori, ktorí chcú takýmto spôsobom zarobiť, sú väčšinou ochotní do investície do takéhoto druhu aktíva vložiť veľké finančné prostriedky na základe svojho presvedčenia o vysokom raste ceny aktíva a pokúsiť sa aktívum predať v čase, keď sa jeho cena blíži maximálnej hodnote. Vznik bublín býva ťažko predpovedateľný (ak vôbec), pretože je podmienený existenciou pre bublinu priaznivých okolností. Býva náhodný, investori predpokladajú bubliny skôr pri cenách tovarov s nejakými neurčitosťami (zlato, umenie, cudzie meny) než napr. pri dlhopisoch. Vznik cenových bublín nemá pri predpoklade racionálnych očakávaní všetkých účastníkov trhu nárok na svoju existenciu, napriek tomu je pomerne bežným javom práve pre absenciu týchto očakávaní, hoci má svoje rácio. Tento jav má skôr psychologický základ než fundamentálny. To sa prejavuje v hromadnom investovaní do aktíva, ktorého cena na trhu výrazne rastie, čo zas vedie k jej ďalšiemu rastu. Špekulatívny vznik cenových bublín môže byť zapríčinený veľkou počiatočnou investíciou do vytipovaného aktíva známej spoločnosti alebo súkromnej osoby, ktorej vplyv na rozhodnutia účastníkov trhu sa považuje za dostatočne veľký. Prípadne môže za vznik bublín asymetrická informácia rôznych účastníkov trhu, čím sú zvýhodnení tí, ktorí nejakou podstatnou informáciou disponujú oproti tým, ktorí ju nemajú, alebo to môže byť nedostatok nejakej na trhu žiadanej komodity. Historickým príkladom je tulipánová horúčka z prvej polovice 17. storočia v Holandsku, počas ktorej došlo k tisícnásobnému nárastu ceny za cibuľku tulipánu a jej ďalšiemu poklesu až na pôvodnú hodnotu. V takomto prípade hovoríme, že bublina spľasla/praskla.

V prípade expandujúcej bubliny investori predpokladajú, že cena aktíva porastie do nekonečna. Takýto rast je veľmi nepravdepodobný a navyše nie je v súlade s predpokladom konečnosti ekonomiky. Hoci sa v budúcnosti môže stať, že zlepšujúce sa technologické možnosti a objavovanie nových hospodárskych odbytísk povedú k výraznému nárastu ekonomiky v rozličných dimenziách, z dnešného pohľadu sa javí predpoklad o konečnosti ekonomiky trvalý.

Preto je vhodnejšie predpokladať, že cenová bublina po nejakom čase praskne. Napr. môžeme predpokladať, že existuje nenulová pravdepodobnosť $q \in (0,1)$, že bublina B_n praskne každú periódu:

$$B_{n+1} = \begin{cases} \frac{(1+r)B_n}{q}, & \text{s pravdepodobnosťou } q; \\ 0, & \text{s pravdepodobnosťou } 1-q, \end{cases}$$

kde $B_{t_0} = B > 0$ pre nejaký počiatočný čas t_0.

V tomto prípade bublina bude s pravdepodobnosťou q ďalej rásť a praskne s pravdepodobnosťou $1-q$, pričom s prasknutím úplne zaniká. Aby bola kompenzovaná pravdepodobnosť prasknutia, veľkosť bubliny v prípade neprasknutia bude vyššia než $(1+r)B_n$.

Prípadne možno uvažovať, že:

$$B_{n+1} = \begin{cases} \frac{(1+r)B_n}{q} + \varepsilon_{n+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } q; \\ \varepsilon_{n+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } 1-q, \end{cases}$$

kde $\varepsilon_t \sim iid(0,\sigma^2)$ je identicky distribuovaná náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a s nenulovou disperziou, nazývaná aj **biely šum**. Šum dovoľuje vznik nových bublín po tom, čo praskli. Šum môže byť navyše korelovaný s neočakávanými pohybmi v ľubovoľnej premennej, t. j. ak trh verí, že neočakávané zmeny v niečom inom ovplyvňujú napr. cenu akcie, tak je pravdepodobné, že sa tak aj skutočne stane (v dôsledku toho vznikajú špekulatívne bubliny).

V oboch vyššie spomenutých prípadoch sa očakávaná (stredná) hodnota bubliny v čase n rovná $B(1+r)^n$ a teda $P_n = P_n^* + B_n$ je riešením (4.81). Ukážeme.

Nech $t_0 = 0$ (napr. dnes) a $B_0 = B > 0$, potom:

$$E(B_{n+1}) = q\frac{(1+r)B_n}{q} + (1-q)0 = (1+r)B_n \tag{4.83}$$

v prvom prípade. Aby sme sa vrátili k pôvodnému značeniu, tak $E(B_{n+1})$ je v riešení (4.82) rovnice (4.81) reprezentovaná iba ako B_{n+1}. S pôvodným značením teda zo (4.83) dostávame:

$$B_{n+1} = (1+r)B_n$$

s $B_0 = B$. Ak $B_0 = B$, tak $B_1 = (1+r)B$, $B_2 = (1+r)^2B$ atď. Teda $B_n = (1+r)^nB$.

V druhom prípade je to veľmi podobné:

$$E(B_{n+1}) = q\frac{(1+r)B_n}{q} + qE(\varepsilon_{n+1}) + (1-q)E(\varepsilon_{n+1}) = (1+r)B_n + 0 + 0 = (1+r)B_n.$$

4.3.4 Pravdepodobnostný model

Doteraz sme sa zaoberali prevažne tým, ako ohodnocovať akcie, ktoré vyplácajú dividendu. V nasledujúcich riadkoch sa budeme venovať akciám, ktoré dividendu nevyplácajú.

Rovnako ako doposiaľ, budeme používať diskrétne úrokovanie a diskrétnu úrokovú sadzbu na obdobie dĺžky jednej časovej jednotky (ďalej č. j.), pretože predpokladáme investovanie jednorazovo na obdobie tejto dĺžky. Pre jednoduchosť môžeme ako 1 č. j. uvažovať jeden rok. V tom prípade bude diskrétna úroková sadzba ročná úroková sadzba.

Ak poznáme súčasnú hodnotu (cenu) akcie P_0 v čase 0 (napr. dnes), hodnota akcie P_1 v čase o 1 č. j. neskôr bude závisieť od rôznych udalostí, ktoré na jej výšku vplývajú. Každá z udalostí je súhrnom rôznych ekonomických i neekonomických okolností, ktorých súbežný vplyv pôsobí na výšku P_1. Na hodnotu P_1 môže vplývať krátkodobý i dlhodobý vývoj na finančnom trhu, rast či pokles hospodárstva krajiny alebo regiónu, postavenie spoločnosti v konkurenčnej súťaži, cenová ponuka a dostupnosť alternatív, ale i ďalšie faktory (interné alebo externé), ktoré vplývajú na cenu akcie, napr. počasie v sledovanom období (môže vplývať na veľkosť úrody) alebo podnebie v oblasti, v ktorej spoločnosť pôsobí (sucho, mráz, víchrice, záplavy a pod.). Cenu akcie teda chápeme ako náhodnú premennú, na ktorú vplývajú rôzne udalosti, ktoré môžu v sledovanom období nastať. Ak je investor schopný priradiť každej z týchto udalostí jedno číslo (očakávanú hodnotu ceny akcie v prípade vzniku danej udalosti) reprezentujúce vplyv udalosti na hodnotu P_1 pri jej vzniku a každej udalosti pravdepodobnosť, s ktorou nastane, P_1 možno chápať ako strednú (očakávanú) hodnotu týchto hodnôt. Je to vážený priemer, kde váhami sú pravdepodobnosti vzniku jednotlivých udalostí.

Predpokladajme, že na hodnotu P_1 môže vplývať n rôznych udalostí $\mathcal{U}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Nech pravdepodobnosť vzniku udalosti $\mathcal{U}_i$ je p_i, potom $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Označme u_i hodnotu P_1 pri udalosti $\mathcal{U}_i$, potom jednotlivé hodnoty u_i ceny akcie v čase 1 spolu s pravdepodobnosťami udalostí, pri ktorých nastanú, možno zobraziť na strome udalostí.

$$
\begin{array}{ccc}
 & p_1 & u_1 \\
 & \nearrow & \\
 & p_2 & u_2 \\
 & \nearrow & \\
P_0 & \vdots & \vdots \\
 & p_{n-1} & \\
 & \searrow & \\
 & p_n & u_{n-1} \\
 & \searrow & \\
 & & u_n
\end{array}
$$

Očakávaná (stredná) hodnota P_1 potom bude:

$$\overline{P}_1 := E(P_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i. \tag{4.84}$$

Spolu so strednou hodnotou možno vypočítať disperziu, resp. smerodajnú odchýlku. Smerodajná odchýlka reprezentuje o koľko sa „v priemere“ vychyľujú hodnoty u_i od $\overline{P}_1$. Meria teda veľkosť rizika, s ktorým nenastanú očakávania o hodnote P_1.

Disperziu (varianciu, tiež rozptyl) P_1 vypočítame z nasledujúcej rovnice:

$$\sigma_{P_1}^2 := Var(P_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(u_i - \overline{P}_1)^2. \tag{4.85}$$

Smerodajná odchýlka P_1 je potom:

$$\sigma_{P_1} = \sqrt{Var(P_1)}. \tag{4.86}$$

V drvivej väčšine prípadov neexistuje nejaká akcia na trhu samostatne, ale je len jednou spomedzi mnohých. Medzi cenami každých dvoch akcií možno merať kovarianciu – spoločnú menlivosť. Ak uvažujeme dve akcie, napr. akciu A a akciu B, pričom pre danú udalosť $\mathcal{U}_i$ na trhu, ktorá nastane s pravdepodobnosťou p_i, označíme očakávanú hodnotu ceny akcie A pri vzniku tejto udalosti ako a_i a očakávanú hodnotu ceny akcie B pri vzniku tejto udalosti ako b_i, dostaneme:

- $\overline{P}_A = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$ – očakávaná hodnota ceny akcie A,
- $\overline{P}_B = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$ – očakávaná hodnota ceny akcie B,
- $\sigma_{P_A}^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \overline{P}_A)^2$ – variancia ceny akcie A,
- $\sigma_{P_B}^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(b_i - \overline{P}_B)^2$ – variancia ceny akcie B,
- σ_{P_A} – smerodajná odchýlka ceny akcie A,
- σ_{P_B} – smerodajná odchýlka ceny akcie B,
- $\sigma_{P_A P_B} = \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \overline{P}_A)(b_i - \overline{P}_B)$ – kovariancia cien akcií A, B.

Kovariancia určuje, či očakávané ceny akcií v čase 1 č. j. oproti ich cene v čase 0 spoločne porastú (kovariancia je kladná) alebo jedna porastie a druhá klesne (kovariancia je záporná), prípadne nemajú na seba vzájomne vplyv (kovariancia je nulová). Pomocou kovariancie teda vieme určiť, či sú očakávané ceny akcií pozitívne korelované, negatívne korelované alebo nekorelované, ale nevieme určiť nakoľko sa vzájomne ovplyvňujú. Preto sa na tento účel používa korelačný koeficient:

$$\rho_{P_A P_B} = \frac{\sigma_{P_A P_B}}{\sigma_{P_A}\sigma_{P_B}}, \tag{4.87}$$

ktorý nedosahuje hodnoty menšie než -1 a väčšie než 1, t. j. $\rho_{P_A P_B} \in \langle -1, 1 \rangle$ (pozri napr. [19], [20]). Platí:

- $\rho_{P_A P_B} = 0$ – ceny akcií A, B sú nekorelované,
- $\rho_{P_A P_B} > 0$ – ceny akcií A, B sú pozitívne korelované,
- $\rho_{P_A P_B} < 0$ – ceny akcií A, B sú negatívne korelované,

- $\rho_{P_A P_B} = 1$ – perfektná pozitívna korelácia cien akcií A, B,
- $\rho_{P_A P_B} = -1$ – perfektná negatívna korelácia cien akcií A, B.

Príklad 4.14. *Uvažujme bezdividendovú akciu A, ktorej súčasná cena je 20 p. j. Predpokladajme, že investor bude držať túto akciu v období dĺžky rovnej 1 jednotka času a potom ju predá za cenu P_A, ktorá s pravdepodobnosťou $p \in (0,1)$ pri udalosti H bude 24 p. j. a s pravdepodobnosťou $1-p$ pri udalosti D bude 16 p. j. Vypočítajme očakávanú (strednú) hodnotu ceny P_A a riziko ohľadom týchto očakávaní, teda smerodajnú odchýlku P_A.*

Riešenie:
Informácie o cene akcie A môžeme graficky znázorniť na strome udalostí, kde udalosti sú v tomto prípade len dve: H a D.

$$
\begin{array}{llll}
\text{H:} & & \text{24 p. j.} & \text{s pp. } p \\
 & \nearrow & & \\
\text{20 p. j.} & & & \\
 & \searrow & & \\
\text{D:} & & \text{16 p. j.} & \text{s pp. } 1-p
\end{array}
$$

Skratka pp. znamená pravdepodobnosť.

Očakávania o cene P_A budú závisieť od pravdepodobnosti p, s ktorou sa cena hýbe smerom nahor (udalosť H) alebo nadol (udalosť D):

$$\overline{P}_A = p(24 \text{ p. j.}) + (1-p)(16 \text{ p. j.}) = (16 + 8p) \text{ p. j.} \tag{4.88}$$

Varianciu P_A vypočítame zo vzťahu (4.85):

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{P_A} &= p\,(24 \text{ p. j.} - (16+8p) \text{ p. j.})^2 + (1-p)\,(16 \text{ p. j.} - (16+8p) \text{ p. j.})^2 \\
&= p(1-p)^2(8 \text{ p. j.})^2 + (1-p)p^2(8 \text{ p. j.})^2 = 64p(1-p)(\text{p. j.})^2
\end{aligned} \tag{4.89}
$$

Odtiaľ máme:

$$\sigma_{P_A} = 8\sqrt{p(1-p)} \text{ p. j.} \tag{4.90}$$

Príklad 4.15. *Uvažujme, že na trhu spolu s akciou A z príkladu 4.14 vystupuje iná bezdividendová akcia B s týmito vlastnosťami:*

$$
\begin{array}{llll}
H: & & 36 \ p.\ j. & s\ pp.\ p \\
 & \nearrow & & \\
40 \ p.\ j. & & & \\
 & \searrow & & \\
D: & & 50 \ p.\ j. & s\ pp.\ 1-p
\end{array}
$$

Vypočítajme očakávanú (strednú) hodnotu ceny P_B, smerodajnú odchýlku P_B a korelačný koeficient cien akcií A a B.

Riešenie:
Zo vzťahov (4.84), (4.85) a (4.86) dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_B &= p(36 \text{ p. j.}) + (1-p)(50 \text{ p. j.}) = (50-14p) \text{ p. j.}, && (4.91)\\
\sigma^2_{P_B} &= p\left(36 \text{ p. j.} - (50-14p) \text{ p. j.}\right)^2 + (1-p)\left(50 \text{ p. j.} - (50-14p) \text{ p. j.}\right)^2, &&\\
&= p(1-p)^2(14 \text{ p. j.})^2 + (1-p)p^2(14 \text{ p. j.})^2 = 196p(1-p)(\text{p. j.})^2, && (4.92)\\
\sigma_{P_B} &= 14\sqrt{p(1-p)} \text{ p. j.} && (4.93)
\end{aligned}
$$

Vypočítajme teraz kovarianciu cien akcií A a B:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{P_A P_B} &= p\left((24-\overline{P}_A) \text{ p. j.}\right)\left((36-\overline{P}_B) \text{ p. j.}\right) + (1-p)\left((16-\overline{P}_A) \text{ p. j.}\right)\left((50-\overline{P}_B) \text{ p. j.}\right)\\
&= p\,(8(1-p) \text{ p. j.})\,(-14(1-p) \text{ p. j.}) + (1-p)\,((-8p) \text{ p. j.})\,((14p) \text{ p. j.})\\
&= -112p(1-p)^2(\text{ p. j.})^2 - 112p^2(1-p)(\text{ p. j.})^2 = -112p(1-p)(\text{ p. j.})^2 \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

Zistili sme, že P_A, P_B sú negatívne korelované. Vypočítajme ešte korelačný koeficient $\rho_{P_A P_B}$ zo (4.87), získame:

$$
\rho_{P_A P_B} = \frac{\sigma_{P_A P_B}}{\sigma_{P_A}\sigma_{P_B}} = \frac{-112p(1-p)(\text{ p. j.})^2}{\left(8\sqrt{p(1-p)} \text{ p. j.}\right)\left(14\sqrt{p(1-p)} \text{ p. j.}\right)} = -1. \qquad (4.95)
$$

Vidíme, že ceny akcií A, B sú dokonca perfektne negatívne korelované.

Zovšeobecnenia z príkladov 4.14 a 4.15 môžeme urobiť pre akúkoľvek dvojicu akcií, ktorých cena sa za časové obdobie 1 č. j. zmení s nejakou pravdepodobnosťou $p \in (0,1)$, s ktorou nastane udalosť H, resp. s pravdepodobnosťou $1-p$, s ktorou nastane udalosť D, na inú hodnotu.

Uvažujme nasledujúcu dvojicu bezdividendových akcií α, β:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{H:} & & & uS & & & gW & \text{s pp. } p\\
& & \nearrow & & & \nearrow & & \\
\alpha\text{:} & S & & & \beta\text{:}\ W & & & \\
& & \searrow & & & \searrow & & \\
\text{D:} & & & dS & & & hW & \text{s pp. } 1-p
\end{array}
$$

kde S, W je cena akcie α, resp. β v čase 0 a u, d, g, h sú kladné koeficienty také, že $u \neq d$ a $g \neq h$, ktorými je prenásobená hodnota S, resp. W v čase 1 č. j., reprezentujúc tak zmenu ceny v dôsledku vzniku udalosti H alebo D.

Očakávané ceny v čase 1 č. j. pre jednotlivé akcie budú:

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_\alpha &= (pu + (1-p)d)\,S && (4.96)\\
\overline{P}_\beta &= (pg + (1-p)h)\,W && (4.97)
\end{aligned}
$$

Smerodajné odchýlky budú:

$$\begin{aligned}
\sigma_{P_\alpha} &= \sqrt{p\left((1-p)(u-d)S\right)^2 + (1-p)\left((-p)(u-d)S\right)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)^2((u-d)S)^2 + (1-p)p^2((u-d)S)^2} = \sqrt{p(1-p)((u-d)S)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)}\,|u-d|\,S \qquad (4.98) \\
\sigma_{P_\beta} &= \sqrt{p\left((1-p)(g-h)W\right)^2 + (1-p)\left((-p)(g-h)W\right)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)^2((g-h)W)^2 + (1-p)p^2((g-h)W)^2} = \sqrt{p(1-p)((g-h)W)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)}\,|g-h|\,W \qquad (4.99)
\end{aligned}$$

Kovariancia bude:

$$\begin{aligned}
\sigma_{P_\alpha P_\beta} &= p\left((1-p)(u-d)S\right)\left((1-p)(g-h)W\right) + (1-p)\left((-p)(u-d)S\right)\left((-p)(g-h)W\right) \\
&= p(1-p)^2(u-d)(g-h)SW + (1-p)p^2(u-d)(g-h)SW \\
&= p(1-p)(u-d)(g-h)SW \qquad (4.100)
\end{aligned}$$

Korelačný koeficient dostaneme zo vzťahov (4.98), (4.99) a (4.100):

$$\rho_{P_\alpha P_\beta} = \frac{p(1-p)(u-d)(g-h)SW}{p(1-p)\,|u-d|\,|g-h|\,SW} = \frac{(u-d)(g-h)}{|u-d|\,|g-h|} \qquad (4.101)$$

Ak $u > d$ a súčasne $g < h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g > h$, tak $\rho_{P_\alpha P_\beta} = -1$. To znamená, že medzi cenami akcií α a β v čase 1 č. j. existuje perfektná negatívna korelácia.

Ak $u > d$ a súčasne $g > h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g < h$, tak $\rho_{P_\alpha P_\beta} = 1$. To znamená, že medzi cenami akcií α a β v čase 1 č. j. existuje perfektná pozitívna korelácia.

Arbitrážna príležitosť

Uvažujme akcie A, B z príkladov 4.14, resp. 4.15. Ukážeme, ako zostrojiť arbitrážnu stratégiu, t. j. stratégiu, ktorá investorovi prinesie kladný zisk bez ohľadu na budúci vývoj ceny akcií.

Nech veľkosť kapitálu, ktorý je investor ochotný/schopný investovať do kúpy akcií, je m p. j., z toho nech investícia do akcie A predstavuje x p. j. a do akcie B nech je to y p. j., t. j. máme $x + y = m$. Keďže cena akcie A je na začiatku sledovaného obdobia rovná 20 p. j., investor nakúpi $\frac{x}{20}$ kusov akcie A. Keďže cena akcie B sa na začiatku sledovaného obdobia rovná 40 p. j., investor nakúpi $\frac{y}{40}$ kusov akcie B. Predpokladáme, že možno kúpiť i neceločíselný počet akcií.

Ak v čase 1 č. j. neskôr nastane udalosť H a investor predá všetky svoje akcie, jeho výnos bude $1,2x + 0,9y$ p. j., pretože predá $\frac{x}{20}$ kusov akcie A za cenu 24 p. j. a $\frac{y}{40}$ kusov akcie B za cenu 36 p. j. Pri vzniku udalosti D bude investorov výnos $0,8x + 1,25y$ p. j., keďže predá $\frac{x}{20}$ kusov akcie A za cenu 16 p. j. a $\frac{y}{40}$ kusov akcie B za cenu 50 p. j. Po odrátaní počiatočnej investície m p. j. činí investorov zisk v prípade vzniku udalosti H $1,2x + 0,9y - m$ p. j. a v prípade udalosti D $0,8x + 1,25y - m$ p. j.

Snahou investora je dosiahnuť kladný zisk bez ohľadu na to, aká udalosť nastane. Snaží sa eliminovať riziko. To dosiahne voľbou:

$$1,2x + 0,9y - m = 0,8x + 1,25y - m.$$

Z čoho:

$$y = \frac{8}{7}x.$$

Investor je teda schopný úplne eliminovať neistotu ohľadom výšky budúcich výnosov tak, že do nákupu akcie B investuje $\frac{8}{7}$-násobok peňažných prostriedkov, ktoré investoval do nákupu akcie A. Vzhľadom k tomu, že výška jeho počiatočného imania je limitovaná hodnotou m p. j. a teda celková suma investovaných peňazí do nákupov akcií A a B sa rovná tejto hodnote ($x + y = m$), tak máme:

$$x + \frac{8}{7}x = m.$$

Z čoho vyplýva, že $x = \frac{7m}{15}$ a $y = \frac{8m}{15}$. S takýmto rozvrhnutím svojej investície úplne eliminuje riziko plynúce z náhodnosti celého procesu. To mu však nemusí zaručiť kladný zisk. Kladný zisk zaručuje perfektná negatívna korelácia cien akcií a ich celkové rozvrhnutie pri vzniku udalostí H a D. Konkrétne:

$$1,2\frac{7m}{15} + 0,9\frac{8m}{15} - m = \frac{m}{25} = 0,04m > 0.$$

To znamená, že ak by investorovo počiatočné imanie m bolo napríklad rovné 1500 p. j., tak investor rozvrhnutím svojej investície 700 p. j. do nákupu 35 kusov akcie A a 800 p. j. do nákupu 20 kusov akcie B dosiahne zisk:

$$(0,8.700 + 1,25.800 - 1500) \text{ p. j.} = 60 \text{ p. j.}$$

Pri odhalení arbitrážnej príležitosti na trhu s takýmito akciami dokáže investor svoj zisk mnohonásobne zvýšiť (resp. zvýšiť o toľko, koľku mu okolnosti dovolia) navýšením svojej počiatočnej investície pri zachovaní opísaného rozvrhnutia investície do nákupov jednotlivých akcií. Avšak zvýšený dopyt po akciách tlačí ich ceny nahor a dáva zaniknúť arbitrážnej príležitosti.

Ak na trhu existujú práve dve akcie, v prípade stanovenia ich aktuálnych cien sa stáva určujúcou arbitráž. V zmysle oceňovania na princípe žiadna arbitráž existencia arbitráže implikuje, že niektorá z akcií je nesprávne ohodnotená, prípadne, že obe akcie sú nesprávne ohodnotené.

Predpokladajme, že nesprávne ocenená je akcia B. Aká by mala byť jej súčasná cena P_0^B, aby nenastala možnosť arbitráže?

Eliminujme riziko, dostaneme:

$$\begin{aligned} 1,2x + \left(\frac{36}{P_0^B}\right)y - m &= 0,8x + \left(\frac{50}{P_0^B}\right)y - m \\ 0,4x &= \left(\frac{14}{P_0^B}\right)y \\ x &= \left(\frac{35}{P_0^B}\right)y \end{aligned}$$

Aby nebola arbitráž musí byť pri takto zvolenom pomere $\frac{x}{y}$ investovania do akcií A, B zisk investora v čase 1 č. j. neskôr nulový. Preto pre P_0^B platí:

$$\begin{aligned} 0 &= 1,2x + \left(\frac{36}{P_0^B}\right)y - m = 1,2x + \left(\frac{36}{P_0^B}\right)y - x - y = 0,2x + \left(\frac{36 - P_0^B}{P_0^B}\right)y \\ 0 &= 0,2\left(\frac{35}{P_0^B}\right)y + \left(\frac{36 - P_0^B}{P_0^B}\right)y = \left(\frac{43 - P_0^B}{P_0^B}\right)y \end{aligned}$$

Keďže $y \neq 0$ (inak by aj $x = 0$), tak musí byť $P_0^B = 43$ p. j.

Môžeme tiež predpokladať, že obe akcie sú nesprávne ocenené a nájsť vzťah medzi ich súčasnými cenami P_0^A, P_0^B, pri splnení ktorého arbitráž nenastane.

Elimináciou rizika dostaneme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{24}{P_0^A}\right)x + \left(\frac{36}{P_0^B}\right)y - m &= \left(\frac{16}{P_0^A}\right)x + \left(\frac{50}{P_0^B}\right)y - m \\ \left(\frac{8}{P_0^A}\right)x &= \left(\frac{14}{P_0^B}\right)y \\ x &= \left(\frac{7P_0^A}{4P_0^B}\right)y \end{aligned}$$

Požiadavka nulového zisku v čase 1 č. j. neskôr implikuje:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{24}{P_0^A}\right)x + \left(\frac{36}{P_0^B}\right)y - m = \left(\frac{24 - P_0^A}{P_0^A}\right)x + \left(\frac{36 - P_0^B}{P_0^B}\right)y \\ 0 &= \left(\frac{7(24 - P_0^A)}{4P_0^B}\right)y + \left(\frac{36 - P_0^B}{P_0^B}\right)y = \left(\frac{312 - 7P_0^A - 4P_0^B}{4P_0^B}\right)y \end{aligned}$$

Keďže $y \neq 0$ (inak by aj $x = 0$), tak musí byť $P_0^B = 78 - \frac{7}{4}P_0^A$. Ak predpokladáme, že pre cenu akcie A platí $P_0^A \in (16, 24)$, tak pre cenu akcie B dostávame $P_0^B \in (36, 50)$. Napr. ak $P_0^A = 20$ p. j., potom $P_0^B = (78 - 35)$ p. j. $= 43$ p. j.

4.3.5 Bezarbitrážne oceňovanie dvojice akcií na binárnom strome

Postup z predchádzajúceho príkladu predstavuje spôsob, ako stanoviť súčasnú hodnotu dvoch akcií na trhu tak, aby nebola arbitráž, aj pre všeobecne zadané hodnoty akcií na binárnom strome udalostí.

Vráťme sa k dvojici akcií α a β spomínanej vyššie:

$$\begin{array}{lccccl} \text{H:} & & uS & & gW & \text{s pp. } p \\ & & \nearrow & & \nearrow & \\ \alpha\text{:} & S & & \beta\text{: } W & & \\ & & \searrow & & \searrow & \\ \text{D:} & & dS & & hW & \text{s pp. } 1-p \end{array}$$

Pričom predpokladáme, že u, d, g, h sú kladné, také, že $u \neq d$ a $g \neq h$. Urobme ďalší dôležitý predpoklad. Nech u, d, g, h spĺňajú:

$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \tag{4.102}$$
$$\text{alebo}$$
$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \tag{4.103}$$
$$\text{alebo}$$
$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \tag{4.104}$$
$$\text{alebo}$$
$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \tag{4.105}$$

Poznamenajme, že za platnosti každého z predpokladov (4.102) až (4.105) je automaticky splnené $u \neq d$, $g \neq h$. V ďalšom budeme považovať všetky tieto predpoklady kladené na u, d, g, h splnené, kým nebude povedané inak.

Predpoklady (4.102) až (4.105) su variáciami na požiadavku, aby cena žiadnej z akcií nebola v čase 1 č. j. neskôr pre obe možnosti väčšia alebo aspoň rovnaká ako pôvodná cena akcie, resp. menšia alebo najviac rovnaká ako pôvodná cena akcie. V prvom prípade by investori preferovali nákup takejto akcie s cieľom neskôr ju predať, avšak žiadny z investorov by nemal záujem takúto akciu predávať. Zvýšený dopyt po takýchto akciách by tlačil cenu akcie v čase 0 nahor, čo by nakoniec viedlo k naplneniu niektorého z predpokladov (4.102) až (4.105). V druhom prípade by sa investori snažili akciu v čase 0 predať s cieľom neskôr ju dokúpiť v rovnakých množstvách späť. Ibaže žiadny investor by takúto akciu nemal záujem kúpiť. To by tlačilo na záujemcov o predaj znižovať cenu akcie, čo by napokon viedlo až k naplneniu niektorého z predpokladov (4.102) až (4.105).

Nech existuje perfektná negatívna korelácia medzi cenami akcií. Z predchádzajúceho vieme, že taká situácia nastane, ak $u > d$ a súčasne $g < h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g > h$.

Ukážeme, že ak je splnené $u - d + h - g = uh - dg$, tak zisk investora eliminujúceho riziko je nulový. Inými slovami na takomto trhu neexistuje arbitráž.

Tvrdenie 4.5. *Uvažujme akcie α, β popísané binárnym stromom udalostí vyššie. Nech u, d, g, h sú kladné, také, že platí:*

$$u - d + h - g = uh - dg. \tag{4.106}$$

Potom neexistuje arbitráž na takomto trhu a akcie α, β sú správne ohodnotené.

Dôkaz. Eliminujme riziko neistoty výšky zisku investora plynúcej z náhodnosti toho, ktorá z udalostí H, D nastane:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{uS - S}{S}\right)x + \left(\frac{gW - W}{W}\right)y &= \left(\frac{dS - S}{S}\right)x + \left(\frac{hW - W}{W}\right)y, \\
(u-1)x + (g-1)y &= (d-1)x + (h-1)y, \\
(u-d)x &= (h-g)y, \\
x &= \frac{(h-g)}{(u-d)}y.
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Vypočítajme zisk:

$$\begin{aligned}(u-1)x+(g-1)y &= (u-1)\frac{(h-g)}{(u-d)}y+(g-1)y=\left(\frac{uh-h+g-dg-u+d}{u-d}\right)y\\ &= \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d}\right)y=0,\end{aligned}$$

kde v poslednom kroku sme využili predpoklad (4.106). □

Z predchádzajúceho vyplýva, že ak v čase 0 investujeme do nákupu perfektne negatívne korelovaných akcií α, β s cieľom predať ich v čase 1 č. j., tak arbitráž možno dosiahnuť len v prípade, keď $uh-dg>u-d+h-g$, ak $u>d$ a $g<h$ alebo v prípade, keď $uh-dg<u-d+h-g$, ak $u<d$ a $g>h$. V takejto situácii pri eliminácii rizika je investor schopný nadobudnúť kladný zisk dosiahnutý ako rozdiel príjmov z predaja akcií v čase 1 č. j. a nákladov pri zakúpení akcií v čase 0.

Na to, aby sme zistili, akú veľkú časť z počiatočnej investície m p. j. tento zisk tvorí, stačí vyjadriť y v závislosti od m. Z toho, že $x=\frac{(h-g)}{(u-d)}y$ a $x+y=m$, totiž máme:

$$m=\frac{(h-g)}{(u-d)}y+y=\left(\frac{u-d+h-g}{u-d}\right)y.$$

Odtiaľ:

$$y=\left(\frac{u-d}{u-d+h-g}\right)m,$$

resp.:

$$x=\left(\frac{h-g}{u-d+h-g}\right)m.$$

Zisk sa teda rovná

$$\left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d}\right)y=\left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}\right)m. \tag{4.108}$$

Prípady, keď $uh-dg<u-d+h-g$ pri $u>d$ a $g<h$, resp. $uh-dg>u-d+h-g$ pri $u<d$ a $g>h$, táto situácia nepokrýva. To však neznamená, že v nich nemožno dosiahnuť arbitráž. Pri eliminácii rizika dokáže investor aj v týchto prípadoch dosiahnuť kladný zisk, musí však byť v čase 0 držiteľom akcií α a β v celkovej výške m p. j., ktoré vo vypočítanom pomere predá a neskôr v čase 1 č. j. ich nakúpi v rovnakom množstve späť za menej, než ich predal, čím sa vráti k stavu v čase 0 a popritom zarobí bez rizika kladnú sumu peňazí.

Predpokladajme teda, že investor je majiteľom akcií α a β v celkovej výške $m>0$ p. j. V čase 0 investor akcie predáva, tzn. predpokladáme, že $x<0$ aj $y<0$. Preto musí platiť:

$$x+y=-m.$$

V čase 1 č. j. investor akcie nakupuje späť. Aby eliminoval riziko súvisiace s udalosťami H, D, ktoré ovplyvňujú výšku ceny akcie v čase 1 č. j., pomer hodnôt x a y dostane z rovnice:

$$\left(\frac{uS}{S}\right)x+\left(\frac{gW}{W}\right)y+m=\left(\frac{dS}{S}\right)x+\left(\frac{hW}{W}\right)y+m.$$

Odtiaľ úpravami:

$$\begin{aligned}(u-d)x &= (h-g)y,\\ x &= \frac{(h-g)}{(u-d)}y.\end{aligned}$$

Pre takto určené x, y bude zisk investora takýto:

$$\begin{aligned}ux+gy+m &= (u-1)x+(g-1)y=(u-1)\frac{(h-g)}{(u-d)}y+(g-1)y\\ &= \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d}\right)y.\end{aligned}$$

Vypočítaný zisk investora je kladný, pretože $y<0$ a buď $uh-dg<u-d+h-g$ pri $u>d$ alebo $uh-dg>u-d+h-g$ pri $u<d$. Nastala arbitráž.

Aj v tomto prípade môžeme vyjadriť investorov zisk ako násobok počiatočného kapitálu investora m p. j. uloženého v akciách. Z toho, že $x=\frac{(h-g)}{(u-d)}y$ a $x+y=-m$, máme:

$$-m=\frac{(h-g)}{(u-d)}y+y=\left(\frac{u-d+h-g}{u-d}\right)y.$$

Odtiaľ:

$$y=\left(\frac{d-u}{u-d+h-g}\right)m,$$

resp.:

$$x=\left(\frac{g-h}{u-d+h-g}\right)m.$$

Zisk sa teda rovná

$$\left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d}\right)y=\left(\frac{(u-d+h-g)-(uh-dg)}{u-d+h-g}\right)m.$$

Ilustrujme predchádzajúce závery na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.16. *Uvažujme dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase* 0*) cena akcie A je* 20 *p. j. a súčasná (v čase* 0*) cena akcie B je* 50 *p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase* 1 *č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

H:		26 *p. j.*		30 *p. j.*	*s pp. p*
		$\nearrow$		$\nearrow$	
A:	20 *p. j.*		***B:*** 50 *p. j.*		
		$\searrow$		$\searrow$	
D:		16 *p. j.*		60 *p. j.*	*s pp.* $1-p$

Nech investor v čase 0 *vlastní* 30 *kusov akcie A, t. j.* 600 *p. j. má uložených v akcii A, a vlastní* 10 *kusov akcie B, t. j. v akcii B má uložených* 500 *p. j. Celkovo má akcie v hodnote* $m=1100$ *p. j. Ukážme, že ceny akcií sú perfektne negatívne korelované a že je možné na trhu s týmito akciami utvoriť arbitráž.*

Riešenie:
Ak nastane udalosť H, cena akcie A stúpne na 26 p. j. a cena akcie B klesne na 30 p. j. Máme teda $u = 1,3$ a $g = 0,6$. Ak nastane udalosť D, cena akcie A poklesne na 16 p. j., kým cena akcie B stúpne na 60 p. j. Čiže $d = 0,8$ a $h = 1,2$.

Pretože $u > d$ a súčasne $g < h$, ceny akcií sú perfektne negatívne korelované. Navyše platí:

$$uh - dg = 1,56 - 0,48 = 1,08 < 1,1 = 0,5 + 0,6 = u - d + h - g.$$

Označme x, y peňažný obnos uložený v akcii A, resp. v akcii B. Pretože investor v čase 0 akcie predáva, tak $x < 0$ i $y < 0$ a navyše $x + y = -m$. Elimináciou rizika dostaneme:

$$x = \frac{(h-g)}{(u-d)}y = \frac{0,6}{0,5}y = 1,2y.$$

Keďže $x + y = -m$, tak $-m = 1,2y + y = 2,2y$. Z toho:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6m}{11} = -600 \text{ p. j.}, \\ y &= \frac{-5m}{11} = -500 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Zhodou okolností investor je v čase 0 držiteľom 30 kusov akcie A v celkovej hodnote 600 p. j. a 10 kusov akcie B, v celkovej hodnote 500 p. j. Všetky svoje akcie môže teda v čase 0 predať, za čo obdrží 1100 p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť H, investor nakúpi späť 30 kusov akcie A v cene 26 p. j. za kus a 10 kusov akcie B v cene 30 p. j. za kus. Celkovo zaplatí $30(26 \text{ p. j.}) + 10(30 \text{ p. j.}) = (780 + 300) \text{ p. j.} = 1080 \text{ p. j.}$

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť D, investor nakúpi späť 30 kusov akcie A v cene 16 p. j. za kus a 10 kusov akcie B v cene 60 p. j. za kus. Celkovo zaplatí $30(16 \text{ p. j.}) + 10(60 \text{ p. j.}) = (480 + 600) \text{ p. j.} = 1080 \text{ p. j.}$

V oboch prípadoch zarobí 20 p. j. a akcie, ktoré v čase 0 predal, má späť v rovnakých množstvách. Na trhu je teda arbitráž a investor ju využil.

Ak má investor v čase 0 k dispozícii nejaké akcie, ktoré môže predať, dokáže vytvoriť arbitráž aj pri akciách, ktorých ceny sú perfektne pozitívne korelované.

Pripomeňme si, že pre všeobecne zadané akcie α, β nastáva perfektná pozitívna korelácia v cenách akcií, ak $u > d$ a súčasne $g > h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g < h$.

Z tvrdenia 4.5 vyplýva, že arbitráž nemožno dosiahnuť, ak platí (4.106). Preto bude pre investorov zaujímavé hľadať arbitrážne príležitosti iba vtedy, keď $uh - dg \neq u - d + h - g$.

Zopakujme stratégiu eliminácia rizika a skúmajme možnosti, ktoré môžu nastať pre perfektne pozitívne korelované ceny akcií α, β.

Z predchádzajúceho vyplýva, že elimináciou rizika dosiahneme:

$$x = \frac{(h-g)}{(u-d)}y,$$

kde x je investícia do nákupu akcie α, ak $x > 0$, resp. peňažné prostriedky získané predajom akcie α, ak $x < 0$, a y je investícia do nákupu akcie β, ak $y > 0$, resp. peňažné prostriedky získané predajom akcie β, ak $y < 0$. Pre perfektnú pozitívnu koreláciu cien akcií α, β bude buď $x > 0$ a súčasne $y < 0$ alebo $x < 0$ a súčasne $y > 0$. Predajom jednej akcie sa teda čiastočne alebo úplne financuje nákup druhej akcie. Závisí to od výšky počiatočnej investície m, kde buď $x + y = m$, ak finančné prostriedky vynaložené na nákup jednej z akcií prevyšujú príjmy z predaja druhej akcie, alebo $x + y = -m$, ak príjmy z predaja jednej akcie prevyšujú náklady na nákup druhej z akcií. Špeciálna situácia nastane, keď $g - h = u - d$. V takom prípade pre pomer investícií do akcií α, β platí $\frac{x}{y} = -1$. Čiže predaj jednej akcie kompletne hradí nákup druhej akcie a nie sú potrebné žiadne ďalšie investície. Dostávame $m = 0$ p. j.

Pre elimináciou určené x, y bude zisk investora rovný:

$$\left(\frac{uh - dg - (u - d) - (h - g)}{u - d}\right) y.$$

Aby bol zisk investora kladný, tak pre $u > d$ a súčasne $g > h$ bude $y > 0$ a $x < 0$, ak $uh - dg > u - d + h - g$, a $y < 0$ a $x > 0$, ak $uh - dg < u - d + h - g$. Pre $u < d$ a súčasne $g < h$ bude $y < 0$ a $x > 0$, ak $uh - dg > u - d + h - g$, a $y > 0$ a $x < 0$, ak $uh - dg < u - d + h - g$.

1. Predpokladajme, že $uh - dg > u - d + h - g$.

   a) Nech najprv $u > d$ a súčasne $g > h$. To znamená, že $y > 0$ a $x < 0$.

   - Ak $g - h < u - d$, t. j. $|y| > |x|$, tak $x + y = m$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α a počiatočného imania m.
   - Ak $g - h > u - d$, t. j. $|y| < |x|$, tak $x + y = -m$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α a to, čo ostane z tohto predaja, tvorí kladný výnos investora.
   - Ak $g - h = u - d$, t. j. $|y| = |x|$, tak $x + y = 0$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α.

   b) Nech teraz $u < d$ a súčasne $g < h$. To znamená, že $y < 0$ a $x > 0$.

   - Ak $g - h > u - d$, t. j. $|y| > |x|$, tak $x + y = -m$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β a to, čo ostane z tohto predaja, tvorí kladný výnos investora.
   - Ak $g - h < u - d$, t. j. $|y| < |x|$, tak $x + y = m$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β a počiatočného imania m.
   - Ak $g - h = u - d$, t. j. $|y| = |x|$, tak $x + y = 0$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β.

2. Predpokladajme, že $uh - dg < u - d + h - g$.

   a) Nech $u > d$ a súčasne $g > h$, tzn. $y < 0$ a $x > 0$.

   - Ak $g - h > u - d$, t. j. $|y| < |x|$, tak $x + y = m$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β a počiatočného imania m.
   - Ak $g - h < u - d$, t. j. $|y| > |x|$, tak $x + y = -m$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β a to, čo ostane z tohto predaja, tvorí kladný výnos investora.

- Ak $g - h = u - d$, t. j. $|y| = |x|$, tak $x + y = 0$ a na nákup akcie α sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie β.

b) Nech $u < d$ a súčasne $g < h$, tzn. $y > 0$ a $x < 0$.

- Ak $g - h < u - d$, t. j. $|y| < |x|$, tak $x + y = -m$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α a to, čo ostane z tohto predaja, tvorí kladný výnos investora.
- Ak $g - h > u - d$, t. j. $|y| > |x|$, tak $x + y = m$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α a počiatočného imania m.
- Ak $g - h = u - d$, t. j. $|y| = |x|$, tak $x + y = 0$ a na nákup akcie β sa použijú finančné prostriedky získané z predaja akcie α.

Na ilustráciu predchádzajúcich záverov uvádzame príklad.

Príklad 4.17. *Uvažujme dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j. a súčasná (v čase 0) cena akcie B je 50 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$
\begin{array}{llllllll}
H: & & & 24 \text{ p. j.} & & & 55 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } p \\
 & & \nearrow & & & \nearrow & & \\
\mathbf{A:} & 20 \text{ p. j.} & & & \mathbf{B:}\ 50 \text{ p. j.} & & & \\
 & & \searrow & & & \searrow & & \\
D: & & & 16 \text{ p. j.} & & & 48 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } 1-p
\end{array}
$$

Nech investor v čase 0 vlastní 35 kusov akcie A, t. j. 700 p. j. má uložených v akcii A. Nech $m = 1300$ p. j. Ukážme, že ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované a že je možné na trhu s týmito akciami utvoriť arbitráž.

Riešenie:

Ak nastane udalosť H, cena akcie A stúpne na 24 p. j. a cena akcie B stúpne na 55 p. j. Máme teda $u = 1,2$ a $g = 1,1$. Ak nastane udalosť D, cena akcie A poklesne na 16 p. j., kým cena akcie B klesne na 48 p. j. Čiže $d = 0,8$ a $h = 0,96$.

Pretože $u > d$ a súčasne $g > h$, ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované. Navyše platí:

$$uh - dg = 1,152 - 0,88 = 0,272 > 0,26 = 0,4 - 0,14 = u - d + h - g.$$

Označme x, peňažný obnos uložený v akcii A a y investíciu do akcie B. Pretože investor v čase 0 akciu A predáva, tak $x < 0$. Pretože investor v čase 0 akciu B kupuje, tak $y > 0$. Navyše $x + y = m$, pretože $g - h = 0,14 < 0,4 = u - d$. Elimináciou rizika dostaneme:

$$x = \frac{(h-g)}{(u-d)}y = \frac{(-0,14)}{0,4}y = -0,35y.$$

Keďže $x + y = m$, tak $m = -0,35y + y = 0,65y$. Z toho:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{7m}{13} = -700 \text{ p. j.}, \\
y &= \frac{20m}{13} = 2000 \text{ p. j.}
\end{aligned}
$$

Pretože investor je v čase 0 držiteľom 35 kusov akcie A v celkovej hodnote práve 700 p. j., môže ich všetky predať a za obdržaných 700 p. j. spolu s počiatočnou investíciou $m = 1300$ p. j., ktorú je investor ochotný/schopný poskytnúť na nákup akcií, dokúpi 40 kusov akcie B v celkovej sume 2000 p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť H, investor nakúpi späť 35 kusov akcie A v cene 24 p. j. za kus a predá 40 kusov akcie B v cene 55 p. j. za kus. Celkovo získa $40(55$ p. j.$)-35(24$ p. j.$) = (2200 - 840)$ p. j. $= 1360$ p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť D, investor nakúpi späť 35 kusov akcie A v cene 16 p. j. za kus a predá 40 kusov akcie B v cene 48 p. j. za kus. Celkovo získa $40(48$ p. j.$)-35(16$ p. j.$) = (1920 - 560)$ p. j. $= 1360$ p. j.

Po odrátaní počiatočnej investície vo výške 1300 p. j. zarobí v oboch prípadoch 60 p. j. a akciu A, ktorú v čase 0 predal, má späť v rovnakom množstve. Na trhu je teda arbitráž a investor ju využil.

Môžeme si všimnúť, že stratégia investora sa vôbec nezmení, ak zameníme hodnoty u a d, resp. g a h z predchádzajúceho príkladu.

Príklad 4.18. *Uvažujme dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j. a súčasná (v čase 0) cena akcie B je 50 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$
\begin{array}{lllllll}
 & H: & & 16 \text{ p. j.} & & 48 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } p \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\textbf{A:} & 20 \text{ p. j.} & & \textbf{B:}\ 50 \text{ p. j.} & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 & D: & & 24 \text{ p. j.} & & 55 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } 1-p
\end{array}
$$

Nech investor v čase 0 vlastní 35 kusov akcie A, t. j. 700 p. j. má uložených v akcii A. Nech $m = 1300$ p. j. Ukážme, že ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované a že je možné na trhu s týmito akciami utvoriť arbitráž.

Riešenie:

V tomto prípade máme $u = 0,8$, $d = 1,2$, $g = 0,96$ a $h = 1,1$.

Pretože $u < d$ a súčasne $g < h$, ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované. Navyše:

$$uh - dg = 0,88 - 1,152 = -0,272 < -0,26 = -0,4 + 0,14 = u - d + h - g.$$

Označme x, peňažný obnos uložený v akcii A a y investíciu do akcie B. Pretože investor v čase 0 akciu A predáva, tak $x < 0$. Pretože investor v čase 0 akciu B kupuje, tak $y > 0$. Navyše $x + y = m$, pretože $g - h = -0,14 > -0,4 = u - d$. Elimináciou rizika dostaneme:

$$x = \frac{(h-g)}{(u-d)} y = \frac{(0,14)}{(-0,4)} y = -0,35y.$$

Keďže $x + y = m$, tak $m = -0,35y + y = 0,65y$. Z toho:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{7m}{13} = -700 \text{ p. j.}, \\ y &= \frac{20m}{13} = 2000 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Pretože investor je v čase 0 držiteľom 35 kusov akcie A v celkovej hodnote práve 700 p. j., môže ich všetky predať a za obdržaných 700 p. j. spolu s počiatočnou investíciou $m = 1300$ p. j., ktorú je investor ochotný/schopný poskytnúť na nákup akcií, dokúpi 40 kusov akcie B v celkovej sume 2000 p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť H, investor nakúpi späť 35 kusov akcie A v cene 16 p. j. za kus a predá 40 kusov akcie B v cene 48 p. j. za kus. Celkovo získa $40(48$ p. j.$)-35(16$ p. j.$) =$ $(1920 - 560)$ p. j. $= 1360$ p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť D, investor nakúpi späť 35 kusov akcie A v cene 24 p. j. za kus a predá 40 kusov akcie B v cene 55 p. j. za kus. Celkovo získa $40(55$ p. j.$)-35(24$ p. j.$) =$ $(2200 - 840)$ p. j. $= 1360$ p. j.

Po odrátaní počiatočnej investície vo výške 1300 p. j. zarobí v oboch prípadoch 60 p. j. a akciu A, ktorú v čase 0 predal, má späť v rovnakom množstve. Na trhu je arbitráž.

Poznámka 4.8. *V predchádzajúcich príkladoch sme hľadali bezarbitrážny zisk pri dvojiciach akcií takých, že kladné koeficienty u, d, g, h spĺňali niektorý z predpokladov 4.102, 4.103, 4.104, 4.105.*

Inými slovami nárast v cene akcie pri vzniku jednej udalosti je sprevádzaný poklesom v cene akcie pri druhej z udalostí, resp. pokles v cene akcie pri vzniku udalosti je sprevádzaný nárastom ceny akcie pri druhej udalosti.

Ak by sme však pracovali so všeobecne zadanými $u \neq d$, kde $u > 0$, $d > 0$, $g \neq h$, kde $g > 0$, $h > 0$, tak všetky závery o arbitrážnych príležitostiach a arbitrážnom zisku ostávajú v platnosti, akurát je v niektorých prípadoch možné arbitrážny zisk navýšiť o nejaký ďalší minimálny kladný príjem plynúci z kúpy, prípadne predaja vhodne zvolenej akcie. Ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.19. *Uvažujme dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j. a súčasná (v čase 0) cena akcie B je 50 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$\begin{array}{lccccccl} H: & & & 18\ p.\ j. & & & 50\ p.\ j. & s\ pp.\ p \\ & & \nearrow & & & \nearrow & & \\ \mathbf{A:} & 20\ p.\ j. & & & \mathbf{B:}\ 50\ p.\ j. & & & \\ & & \searrow & & & \searrow & & \\ D: & & & 22\ p.\ j. & & & 70\ p.\ j. & s\ pp.\ 1-p \end{array}$$

Nech investor v čase 0 vlastní 100 kusov akcie A, t. j. 2000 p. j. má uložených v akcii A. Ukážme, že arbitrážny zisk možno navýšiť o maximálne ďalších 400 p. j. alebo aspoň vyrovnať jeho výšku.

Riešenie:
Máme $u = 0,9$, $d = 1,1$, $g = 1$ a $h = 1,4$. Teda $u < d$ a súčasne $g < h$, a preto sú ceny akcií perfektne pozitívne korelované. Navyše:

$$uh - dg = 1,26 - 1,1 = 0,16 < 0,2 = -0,2 + 0,4 = u - d + h - g.$$

Označme x, peňažný obnos uložený v akcii A a y investíciu do akcie B. Pretože investor v čase 0 akciu A predáva, tak $x < 0$. Pretože investor v čase 0 akciu B kupuje, tak $y > 0$. Elimináciou rizika dostane:

$$x = \frac{(h-g)}{(u-d)}y = \frac{(0,4)}{(-0,2)}y = -2y.$$

Keďže musí voliť $x + y = -m$, tak $m = 2y - y = y$ a $x = -2m$. Na dosiahnutie čo najväčšieho zisku je najvýhodnejšie predať všetky kusy akcie A a nakúpiť akcie B v zodpovedajúcom riziko eliminačnom pomere.

Dostaneme $x = -2000$ p. j., $y = 1000$ p. j., $m = 1000$ p. j., kde m je finančný obnos, ktorý po predaji akcie A a nákupe 20 kusov akcie B ostane investorovi až do času 1 č. j. bez toho, aby s ním investor akokoľvek manipuloval.

Konkrétne, ak v čase 1 č. j. nastane udalosť H, investor nakúpi späť 100 kusov akcie A v cene 18 p. j. za kus a predá 20 kusov akcie B v cene 50 p. j. za kus. Celkovo získa 20(50 p. j.) − 100(18 p. j.) + 1000 p. j. = (2000 − 1800) p. j. = 200 p. j.

Ak v čase 1 č. j. nastane udalosť D, investor nakúpi späť 100 kusov akcie A v cene 22 p. j. za kus a predá 20 kusov akcie B v cene 70 p. j. za kus. Celkovo získa 20(70 p. j.) − 100(22 p. j.) + 1000 p. j. = (2400 − 2200) p. j. = 200 p. j.

Jeho arbitrážny zisk teda činí 200 p. j. bez ohľadu na to, ktorá z udalostí nastala a v oboch prípadoch má akciu A späť v rovnakom množstve.

Ak však namiesto toho, aby investor nechal 1000 p. j. „ležať ladom“, tieto peňažné prostriedky použije na nákup ďalších 20 kusov akcie B, ktoré v čase 1 č. j. neskôr predá, dokáže navýšiť svoj zisk o ďalších maximálne 400 p. j. Ak tak totiž urobí, jeho zisk bude v prípade vzniku udalosti H rovný 40(50 p. j.) − 100(18 p. j.) = (2000 − 1800) p. j. = 200 p. j. Ak však nastane udalosť D jeho zisk bude vyšší, rovný 40(70 p. j.) − 100(22 p. j.) = (2800 − 2200) p. j. = 600 p. j.

Navýšenie zisku bolo možné vďaka tomu, že ostali voľné finančné prostriedky z predaja akcie A čase 0 a že ich bolo možné zainvestovať do nákupu akcie B bez rizika prípadnej straty časti tejto hotovosti. Umožnila to situácia okolo budúcej ceny akcie B, ktorá pri oboch udalostiach je vyššia alebo aspoň taká ako cena akcie v čase 0. Pre tento príklad nastalo $h > g = 1$. Takýto zisk však nemožno považovať za arbitrážny, pretože investor nedosiahne na rovnakú výplatu pri oboch udalostiach.

Hoci v ďalšom pre nás ostáva prioritou nájsť arbitráž a z tejto príležitosti plynúci arbitrážny zisk, predchádzajúci príklad bol poučný z hľadiska uvedomenia si ďalších súvislostí, ktoré treba pri investorovej snahe dosiahnuť čo najväčší zisk vziať v úvahu.

4.3.6 Dve akcie a dlhopis

Pri bezarbitrážnom oceňovaní dvojice akcií sme pracovali s predpokladom, že na trhu spolu s akciami neexistuje diskontný dlhopis s dobou splatnosti rovnou dobe držania akcií, t. j. rovnou 1 č. j. Ak by taký dlhopis na trhu spolu s akciami existoval, jeho výnosová sadzba r_f by bola diskrétnou úrokovou sadzbou na dobu držania. Navyše výnos z takéhoto dlhopisu sa považuje za istý na rozdiel od neistoty spojenej s očakávaniami o budúcich cenách akcií. Absencia dlhopisu na trhu s akciami umožňovala porovnávať peňažné toky plynúce z predaja a kúpy akcií v rozličných časoch (v čase 0 a v čase 1 č. j.) bez ohľadu na časovú hodnotu peňazí. V súvislosti s bezrizikovou úrokovou sadzbou dlhopisu to vlastne znamenalo, že r_f bola nulová. Keďže v tejto časti budeme hovoriť o trhu s dvoma akciami a dlhopisom, budeme ďalej predpokladať, že $r_f > 0$. Investíciou do nákupu dlhopisov v čase 0 získa investor v čase 1 č. j. neskôr svoju pôžičku späť a spolu s ňou aj úrok vo výške r_f-násobku tejto investície. Podobne, ak investor v čase 0 dlhopisy emituje a predá, je povinný v čase 1 č. j. zaplatiť majiteľovi dlhopisov okrem ich nominálnej hodnoty aj kladný úrok. Jedna peňažná jednotka má teda v čase 0 inú hodnotu než v čase 1 č. j., pretože ak by aj investor na takomto trhu vôbec neinvestoval do akcií, stále existuje možnosť zarobiť bez rizika na 1 p. j. obnos r_f p. j. Ak investor zvažuje aj možnosť investície do akcií, prípadne zvažuje predaj niektorých svojich akcií, aj na takomto trhu má pre neho zmysel obzerať sa po arbitrážnych príležitostiach. Akurát je potrebné v úvahách o vzniku arbitrážnej príležitosti počítať s nenulovou bezrizikovou úrokovou sadzbou dlhopisu.

Uvažujme dve akcie α, β opísané v predchádzajúcej sekcii. Nech investícia do akcie α je označovaná ako x p. j. a do akcie β ako y p. j. Nech dlhopis sa podieľa na investíciach v celkovej výške z p. j. Potom $x + y + z = m$, kde $m > 0$ p. j. je počiatočný kapitál investora, ktorý je na investovanie ochotný/schopný poskytnúť. Navyše investor môže dlhopisy aj emitovať (predávať) v ľubovoľnom množstve, teda predpokladáme, že z môže byť aj ľubovoľné záporné číslo.

Urobme predpoklad, že bezriziková úroková sadzba r_f je menšia než minimum z výnosových sadzieb akcií väčších ako nula. Nech napr. u, d, g, h sú také, že $d < 1 < u$, $g < 1 < h$ a $u < h$. Potom požadujeme, aby $r_f < u - 1$, resp. $1 + r_f < u$. Ak by sa totiž stalo, že napr. $u \leq 1 + r_f < h$, potom pre investora nemá zmysel uvažovať nad investíciou do akcie α, keďže väčšia z jej výnosových sadzieb dosiahnutá pri udalosti H je menšia alebo rovná ako bezriziková úroková sadzba plynúca z držby diskontných dlhopisov poskytujúcich výnos, ktorý je istý. Žiadny účastník takéhoto trhu by nemal záujem o kúpu akcií α a uprednostňoval by radšej investíciu do bezrizikových dlhopisov a naopak, každý držiteľ akcií α by sa pokúšal o ich predaj so snahou previesť takto získané finančné prostriedky do dlhopisov.

Pri hľadaní arbitrážnej príležitosti investor eliminuje riziko plynúce z neistoty spojenej so vznikom udalosti H alebo D:

$$\begin{aligned} \left(\frac{uS}{S}\right)x + \left(\frac{gW}{W}\right)y + (1+r_f)z &= \left(\frac{dS}{S}\right)x + \left(\frac{hW}{W}\right)y + (1+r_f)z, \\ (u-d)x + r_f z &= (h-g)y + r_f z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u-d)x &= (h-g)y,\\ x &= \frac{(h-g)}{(u-d)}y.\end{aligned}$$

Výnos z dlhopisu je istý, preto naň nemá vplyv, aká udalosť nastane. To sa prejaví tým, že pomer investícií do akcií α, β sa nezmení oproti situácii, keď dlhopis na trhu nevystupoval. Označme tento pomer ako k, teda nech:

$$k = \frac{h-g}{u-d}.$$

V prípade, že bude skutočne investor kupovať/predávať akcie na tomto trhu a ceny akcií sú perfektne negatívne korelované, to znamená, že buď $x > 0$ a súčasne $y > 0$ alebo $x < 0$ a súčasne $y < 0$. V prípade perfektnej pozitívnej korelácie to znamená, že buď $x > 0$ a súčasne $y < 0$ alebo $x < 0$ a súčasne $y > 0$.

Prepokladajme, že $u-d \neq g-h$. Ak $x+y+z = m$, tak $z = m-x-y$, z čoho po dosadení $x = ky$ za x získame:

$$z = m-(1+k)y,$$

resp.:

$$\begin{aligned}y &= \left(\frac{1}{1+k}\right)(m-z) = \left(\frac{u-d}{u-d+h-g}\right)(m-z),\\ x &= ky = \left(\frac{k}{1+k}\right)(m-z) = \left(\frac{h-g}{u-d+h-g}\right)(m-z).\end{aligned}$$

Zisk investora bude potom rovný

$$\begin{aligned}& ux+gy+(1+r_f)z-m =\\ &= ux+gy+(1+r_f)z-x-y-z = (u-1)x+(g-1)y+r_fz\\ &= \frac{(h-g)(u-1)}{u-d+h-g}(m-z) + \frac{(u-d)(g-1)}{u-d+h-g}(m-z)+r_fz\\ &= \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}\right)(m-z)+r_fz\\ &= \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}\right)m - \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}-r_f\right)z\\ &= \left(\frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}\right)m + \left(r_f - \frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}\right)z.\end{aligned}$$

Označme $J := \frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}$. Ak by investor nemal možnosť kupovať/predávať dlhopisy (teda $z = 0$), jeho zisk by bol Jm p. j. Vzhľadom nato, že investor túto možnosť má, môže svoj zisk navýšiť voľbou z.

Situáciu, v ktorej $x+y+z = -m < 0$ p. j., netreba uvažovať, pretože ak x, y je na elimináciu rizika potrebné voliť tak, aby $x+y > 0$, teda akcie sa v čase 0 iba nakupujú alebo prostriedky potrebné na nákup jednej z akcií v čase 0 sú vyššie než prostriedky získané z predaja druhej akcie, tak počiatočnú hodnotu kapitálu $m \geq 0$ p. j. možno zvýšiť peňažnými prostriedkami z predaja dlhopisov a takto získané prostriedky použiť na dofinancovanie nákupu akcií v zodpovedajúcom riziko eliminujúcom pomere. V tomto prípade $z < 0$ p. j. a $x+y = m-z$.

Ak x, y je na elimináciu rizika potrebné voliť tak, aby $x + y < 0$, teda obe akcie sa v čase 0 predávajú alebo príjem z predaja jednej z akcií prevyšuje finančné prostriedky potrebné na nákup druhej akcie, tak zisk z predaja akcií sa tvorí v čase 0 a v čase 1 č. j. sa iba spätne dokupujú akcie vlastnené a predané v čase 0. Preto je výhodné všetky voľné finančné prostriedky získané predajom akcií spolu s počiatočným imaním investora $m \geq 0$ p. j. použiť na nákup dlhopisov, ktoré poskytnú v čase 1 výplatu úrokov z nich plynúcich. Bolo by síce možné vypísať v čase 0 dlhopisy na získanie ďalších finančných prostriedkov, ktoré by zvýšili množstvo akcií vlastnených investorom na začiatku celého procesu, ibaže tie by sa vzápätí predali za rovnakú cenu, čiže by v čase 0 nezdvihli príjmy z predaja a navyše v čase 1 by bolo potrebné uhradiť úroky majiteľom vypísaných dlhopisov. V tomto prípade preto $z > 0$ p. j. a $z = m - x - y$.

O tom, či na trhu je alebo nie je arbitráž, rozhoduje to, či

$$\left(\frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u - d + h - g}\right) m + \left(r_f - \frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u - d + h - g}\right) z > r_f m$$

alebo nie.

Ak $r_f > J > 0$, tak by na elimináciu rizika bolo potrebné pri investovaní do akcií voliť x, y tak, aby $x + y > 0$ p. j. Výnos z riziko-eliminačnej stratégie je však v tomto prípade nižší než výnos plynúci z predaja dlhopisov, a preto sa investorovi neoplatí investovať do nákupu akcií a všetky počiatočné finančné prostriedky investora m sa použijú na nákup dlhopisov. Investor zvolí $x = y = 0$ p. j. a $z = m > 0$ p. j. Výnos investora sa preto rovná $r_f m$ p. j. a po odrátaní alternatívnych nákladov kapitálu v rovnakej výške je bezrizikový zisk investora nulový. Avšak v prípade, že investor je v čase 0 držiteľom akcií α, β, môže ich predajom (v riziko eliminujúcom pomere) navýšiť množstvo peňažných prostriedkov určených na investovanie do dlhopisov. Hoci opätovným dokupovaním akcií v čase 1 tratí, vyšší výnos z dlhopisov túto stratu pokryje a prevýši i bezrizikový výnos, ktorý by investor mal, keby do nákupu dlhopisov investoval iba m p. j. počiatočného imania. V tomto prípade máme $z = m - x - y > m$ p. j., $Jm + (r_f - J)z > r_f m$ a na trhu existuje arbitrážna príležitosť.

Ak $J > r_f > 0$, tak rovnako ako v predchádzajúcom prípade je na elimináciu rizika potrebné voliť x, y tak, aby $x + y > 0$ p. j. V tomto prípade však dokáže investor navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \to -\infty$. Jeho výška závisí od toho, koľko je investor schopný vypísať a predať v čase 0 dlhopisov na získanie financií potrebných na nákup akcií v zodpovedajúcom riziko eliminujúcom pomere. V prípade, že na vytvorenie arbitráže je potrebné niektorú z akcií v čase 0 predávať, je výška zisku limitovaná množstvom finančných prostriedkov viazaných v tomto čase v tejto akcii. Investor totiž nedokáže predať v čase 0 viac kusov akcie, než má k dispozícii (pozri úloha 4.43 z úloh na precvičenie). Platí $0 < x+y = m-z$ p. j.

Ak $J = r_f$, investor nedokáže žiadnym spôsobom navýšiť svoj zisk. Hodnota z môže byť zvolená ľubovoľne, pretože pre akúkoľvek hodnotu bude profit investora rovný $Jm = r_f m$ p. j. nezávisle od voľby z. V tomto prípade neexistuje arbitrážna príležitosť a bezriziková úroková sadzba dlhopisu je správne (bezarbitrážne) nastavená.

Ak $J < 0 < r_f$, tak x, y je na elimináciu rizika potrebné voliť tak, aby $x + y < 0$ p. j. Investor môže navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \to \infty$. Na financovanie nákupu dlhopisov však potrebuje vlastniť v čase 0 nejaké akcie, ktorých predajom v riziko eliminujúcom pomere spolu s počiatočným kapitálom m p. j. získa finančné prostriedky potrebné na investíciu do dlhopisov. Dostávame $0 < z = m - x - y$ p. j.

Špeciálny prípad, keď $J = 0$, znamená, že nákup/predaj akcií v riziko eliminujúcom pomere neprináša žiadne dodatočné finančné benefity, a preto je v takomto prípade snahou investorov investovať všetky dostupné finančné prostriedky do nákupu dlhopisov. V tomto prípade nemožno na trhu dosiahnuť arbitráž, ak je pri investovaní do akcií potrebné zvoliť hodnoty x a y v riziko eliminujúcom pomere tak, že $x + y > 0$ p. j. Ak $x + y < 0$ p. j., tak predajom akcií získané finančné prostriedky v čase 0 sa použijú na navýšenie počiatočnej investície m p. j. investora do dlhopisov, čo v čase 1 č. j. neskôr prinesie zisk väčší než $r_f m$ p. j.

Predpokladajme teraz, že $u - d = g - h$. Potom riziko-eliminačná stratégia investora určuje, že $x = -y$. Z toho vyplýva, že $z = m$. Čiže nákup jednej akcie kompletne hradí predaj druhej akcie a všetok voľný kapitál investora sa použije na nákup dlhopisov.

Zisk investora sa v tomto prípade rovná

$$\begin{aligned} &ux + gy + (1 + r_f)z - m = ux + gy + (1 + r_f)m - m \\ &= -uy + gy + r_f m = (g - u)y + r_f m = (u - g)x + r_f m. \end{aligned}$$

Ak $g - u = 0$, potom zisk investora je $r_f m$ p. j. Zisk investora nemožno navýšiť pomocou riziko-eliminačnej stratégie, keďže tá vedie len k nulovým príjmom v čase 1 č. j. Na trhu neexistuje arbitráž.

Ak $g - u > 0$, tak $y > 0$, teda zisk investora možno oproti predchádzajúcemu prípadu zvýšiť s využitím riziko-eliminačnej stratégie na $(g - u)y + r_f m$ p. j., kde výšku y určuje množstvo finančných prostriedkov investora uložených v čase 0 v akcii α.

Ak $g - u < 0$, tak je potrebné vlastniť nejaké prostriedky v akciách β, teda $y < 0$. V tomto prípade možno zisk investora zvýšiť s využitím riziko-eliminačnej stratégie opäť na $(g - u)y + r_f m$ p. j., kde výšku $x > 0$ určuje množstvo finančných prostriedkov investora uložených v čase 0 v akcii β.

Príklad 4.20. *Uvažujme dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j. a súčasná (v čase 0) cena akcie B je 40 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$\begin{array}{lccccccc}
H: & & & 24 \text{ p. j.} & & & 36 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } p \\
 & & \nearrow & & & \nearrow & & \\
\boldsymbol{A:} & 20 \text{ p. j.} & & & \boldsymbol{B:}\ 40 \text{ p. j.} & & & \\
 & & \searrow & & & \searrow & & \\
D: & & & 16 \text{ p. j.} & & & 50 \text{ p. j.} & s \text{ pp. } 1-p
\end{array}$$

Nech spolu s akciami A, B vystupuje na trhu dlhopis D s dobou splatnosti rovnou 1 č. j. poskytujúci bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f = 0,03$. Predpokladajme, že investorov počiatočný kapitál, ktorý je ochotný investovať do nákupu akcií či dlhopisov je rovný 1500 p. j. Ukážme, že na takomto trhu dokáže investor vytvoriť arbitráž.

Riešenie:
Ide o dve perfektne negatívne korelované akcie také, že $u = 1,2$, $d = 0,8$, $g = 0,9$ a $h = 1,25$. Máme $u - d + h - g = 0,4 + 0,35 = 0,75$ a $uh - dg = 1,5 - 0,72 = 0,78$, teda $uh - dg > u - d + h - g$. Riziko-eliminačný pomer investícií do nákupu akcií A, B je

$$\frac{h-g}{u-d} = \frac{0,35}{0,4} = \frac{7}{8},$$

teda

$$x = \frac{7}{8}y.$$

Pretože riziko-eliminačná stratégia poskytuje výnosovú sadzbu rovnú

$$\frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u - d + h - g} = \frac{0,03}{0,75} = \frac{1}{25} = 0,04,$$

vyššiu než výnosová sadzba dlhopisov $r_f = 0,03$, je výhodné pre investora využiť núkajúcu sa arbitrážnu príležitosť a emitovať a predať toľko dlhopisov, koľko okolnosti dovolia (potenciálne možno voliť $z \to -\infty$), a utŕžené peniaze spolu s počiatočným kapitálom vložiť do nákupu akcií A, B.

Touto stratégiou dosiahne investor zisk vo výške

$$\left(\frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u - d + h - g}\right) m + \left(r_f - \frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u - d + h - g}\right) z$$
$$= 0,04(1500 \text{ p. j.}) + (0,03 - 0,04)\,(z \text{ p. j.}) = (60 - 0,01z) \text{ p. j.},$$

kde výšku zisku určuje $z < 0$, teda to, koľko sa v čase 0 podarí investorovi predať dlhopisov. Napr. ak $z = -2000$ p. j., tak výška zisku investora bude:

$$(60 - 0,01(-2000)) \text{ p. j.} = (60 + 20) \text{ p. j.} = 80 \text{ p. j.}$$

Tri a viac akcií a arbitráž

Pridanie ďalšej akcie alebo akcií k dvojici akcií na trhu, na ktoré vplývajú dve náhodné udalosti, zlepšuje šance investora na nájdenie arbitrážnej príležitosti. Presnejšie povedané, nedokáže ich zhoršiť a už vôbec nie zmariť. Pri zapojení stratégie eliminácie rizika ďalšia premenná (alebo ďalšie premenné), ktorá pribudne do sústavy dvoch lineárnych rovníc totiž zvýši počet premenných na tri (a viac) pri nezmenenom počte rovníc. Stratégiou eliminácie rizika teda možno vždy nájsť aspoň jedno riešenie sústavy, ktoré určuje v akom pomere investovať do akcií tak, aby bolo možné úplne eliminovať neistotu ohľadom výnosu akcií spojenú s tým, ktorá udalosť nastane. Táto stratégia prinesie investorovi kladný zisk (existuje arbitráž) alebo pri vzniku určitej situácie na trhu aspoň nulový zisk (neexistuje arbitráž). Ukážeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

Príklad 4.21. *Uvažujme tri akcie A, B, C ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j., súčasná cena akcie B je 40 p. j. a súčasná cena akcie C je 50 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\textit{udalosť} & \textit{pp.} & \textbf{\textit{akcia}} & & & \textbf{\textit{akcia}} & & & \textbf{\textit{akcia}} & & \\
H & p & \textbf{\textit{A:}} & & 24\ p.\ j. & \textbf{\textit{B:}} & & 36\ p.\ j. & \textbf{\textit{C:}} & & 65\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & & & \nearrow & & & \nearrow & \\
 & & 20\ p.\ j. & & & 40\ p.\ j. & & & 50\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & \\
D & 1-p & & & 16\ p.\ j. & & & 46\ p.\ j. & & & 45\ p.\ j.
\end{array}
$$

Predpokladajme, že investorov počiatočný kapitál, ktorý je ochotný investovať do nákupu akcií je rovný 1300 p. j. Ukážme, že na takomto trhu dokáže investor vytvoriť arbitráž.

Riešenie:
Označme investíciu do akcie A ako x, investíciu do akcie B ako y a investíciu do akcie C ako z. Potom $x + y + z = m$, kde $m = 1300$ p. j. Investor eliminuje riziko, teda:

$$
\begin{aligned}
1,2x + 0,9y + 1,3z &= 0,8x + 1,15y + 0,9z, \\
0,4x - 0,25y + 0,4z &= 0.
\end{aligned}
$$

Rieši sústavu dvoch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$
\begin{aligned}
0,4x - 0,25y + 0,4z &= 0, \\
x + y + z &= m.
\end{aligned}
$$

Dostane $x = \frac{5}{13}m - z = (500 - z)$ p. j., $y = \frac{8}{13}m = 800$ p. j. a z je možné voliť ľubovoľne (podľa okolností).

Maximalizuje zisk

$$
1,2x + 0,9y + 1,3z - m = \frac{6}{13}m - \frac{6}{5}z + \frac{36}{65}m + \frac{13}{10}z - m = \frac{1}{65}m + \frac{z}{10} = 20 + \frac{z}{10}
$$

voľbou z. Potenciálne dokáže dosiahnuť nekonečne veľký zisk voľbou $z \to \infty$. V čase 0 však investor potrebuje mať k dispozícií $x = 500 - z$ p. j. uložených v akcii A. Nech napr. $x = -1000$ p. j., potom $z = 1500$ p. j. a $y = 800$ p. j. a maximálny zisk, ktorý investor môže dosiahnuť, je 170 p. j.

Ak nemá investor v čase 0 žiadne akcie A, tak maximalizuje svoj zisk voľbou $z = 500$ p. j. V tomto prípade $x = 0$ p. j. a $y = 800$ p. j. Maximálny zisk, ktorý dokáže investor dosiahnuť, je 70 p. j.

Príklad 4.22. *Uvažujme tri akcie A, B, C ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j., súčasná cena akcie B je 40 p. j. a súčasná cena akcie C je 50 p. j. Uvažujme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú dve udalosti H a D tak, že:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\textit{udalosť} & \textit{pp.} & \textbf{\textit{akcia}} & & & \textbf{\textit{akcia}} & & & \textbf{\textit{akcia}} & & \\
H & p & \textbf{\textit{A:}} & & 22\ p.\ j. & \textbf{\textit{B:}} & & 32\ p.\ j. & \textbf{\textit{C:}} & & 55\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & & & \nearrow & & & \nearrow & \\
 & & 20\ p.\ j. & & & 40\ p.\ j. & & & 50\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & \\
D & 1-p & & & 18\ p.\ j. & & & 48\ p.\ j. & & & 40\ p.\ j.
\end{array}$$

Predpokladajme, že investorov počiatočný kapitál, ktorý je ochotný investovať do nákupu akcií je rovný 3000 *p. j. Ukážme, že na takomto trhu nedokáže investor vytvoriť arbitráž.*

Riešenie:
Označme investíciu do akcie A ako x, investíciu do akcie B ako y a investíciu do akcie C ako z. Potom $x+y+z=m$, kde $m=3000$ p. j. Investor eliminuje riziko, teda:

$$\begin{aligned} 1,1x+0,8y+1,1z &= 0,9x+1,2y+0,8z, \\ 0,2x-0,4y+0,3z &= 0. \end{aligned}$$

Riešiac sústavu dvoch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$\begin{aligned} 0,2x-0,4y+0,2z &= 0, \\ x+y+z &= m, \end{aligned}$$

dostane $x=\frac{2}{3}m-z=(2000-z)$ p. j., $y=\frac{1}{3}m=1000$ p. j. a z možno voliť ľubovoľne (podľa okolností).

Zisk investora sa rovná

$$1,1x+0,8y+1,1z-m=\frac{11}{15}m-\frac{11}{10}z+\frac{4}{15}m+\frac{11}{10}z-m=0m+0z=0 \text{ p. j.}$$

bez ohľadu na voľbu z. Hoci investor dokáže eliminovať riziko plynúce z neistoty, ktorá udalosť nastane, kladný zisk pri tom nedosiahne.

Ak na trhu spolu s troma a viacerými akciami vystupuje i bezrizikové aktívum – bezkupónový dlhopis poskytujúci bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f>0$, tak stratégia investora rozvrhnúť investíciu do všetkých aktív tak, aby eliminoval riziko, ostáva nezmenená a vedie buď k vytvoreniu arbitrážnej príležitosti na takomto trhu alebo na takomto trhu arbitráž neexistuje a bezriziková sadzba r_f je správne (bezarbitrážne) nastavená.

4.3.7 Bezarbitrážne oceňovanie akcií na trinárnych stromoch

Bezarbitrážne oceňovanie akcií na trinárnych stromoch je zo svojej podstaty zložitejšie než oceňovanie na binárnych stromoch a vo všeobecnosti je pri dvojici akcií ťažké nájsť arbitrážnu príležitosť (hoci stratégia eliminovať riziko ostáva), pretože na elimináciu rizika je nutné porovnávať výnosy akcií pri troch udalostiach.

Uvažujme napr. dve akcie A, B, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j. a súčasná (v čase 0) cena akcie B je 50 p. j. Predpokladajme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú tri náhodné udalosti $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ tak, že:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\mathcal{U}_1: & & & & 30 \text{ p. j.} & & & & 35 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_1 \\
 & & & \nearrow & & & & \nearrow & & \\
\mathcal{U}_2: & \mathbf{A:} & 20 \text{ p. j.} & \rightarrow & 20 \text{ p. j.} & \mathbf{B:} & 50 \text{ p. j.} & \rightarrow & 45 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_2 \\
 & & & \searrow & & & & \searrow & & \\
\mathcal{U}_3: & & & & 10 \text{ p. j.} & & & & 60 \text{ p. j.} & \text{s pp. } 1-p_1-p_2
\end{array}
$$

Ak označíme investíciu do akcie A ako x a do akcie B ako y, tak pri počiatočnom kapitále investora m platí $x+y=m$.

Eliminácia rizika investorom vedie na sústavu troch lineárnych rovníc o dvoch neznámych:

$$
\begin{aligned}
1,5x+0,7y &= x+0,9y, \\
x+0,9y &= 0,5x+1,2y, \\
0,5x+1,2y &= 1,5x+0,7y,
\end{aligned}
$$

resp.:

$$
\begin{aligned}
0,5x-0,2y &= 0, \\
0,5x-0,3y &= 0, \\
x-0,5y &= 0.
\end{aligned}
$$

Sústava je homogénna, čiže má určite aspoň jedno (nulové) riešenie. Jej nulové riešenie ($x=y=0$ p. j.) je však v tomto prípade jediné (to vidno už z prvých dvoch rovníc). Eliminácia rizika sa nedá uskutočniť inak než nulovými investíciami do oboch akcií. Neinvestovať do nákupu akcií je síce bezriziková činnosť, ale prináša nulový zisk.

Iná situácia nastane, ak by sme predpokladali nasledujúce rozvrhnutie očakávaných cien:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\mathcal{U}_1: & & & & 30 \text{ p. j.} & & & & 40 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_1 \\
 & & & \nearrow & & & & \nearrow & & \\
\mathcal{U}_2: & \mathbf{A:} & 20 \text{ p. j.} & \rightarrow & 20 \text{ p. j.} & \mathbf{B:} & 50 \text{ p. j.} & \rightarrow & 50 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_2 \\
 & & & \searrow & & & & \searrow & & \\
\mathcal{U}_3: & & & & 10 \text{ p. j.} & & & & 60 \text{ p. j.} & \text{s pp. } 1-p_1-p_2
\end{array}
$$

V tomto prípade eliminácia rizika vedie na sústavu nasledujúcich troch lineárnych rovníc o dvoch neznámych:

$$
\begin{aligned}
1,5x+0,8y &= x+y, \\
x+y &= 0,5x+1,2y, \\
0,5x+1,2y &= 1,5x+0,8y.
\end{aligned}
$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} 0,5x - 0,2y &= 0, \\ 0,5x - 0,2y &= 0, \\ x - 0,4y &= 0. \end{aligned}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení takých, že $x = \frac{2}{5}y$. Keďže x a y musia spĺňať $x+y=m$, investor má jediné riešenie voľby rozvrhnutia investície do nákupu akcií také, že $x = \frac{2}{7}m$ p. j. a $y = \frac{5}{7}m$ p. j. Zisk investora je však nulový bez ohľadu na výšku m:

$$1,5x + 0,8y - m = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}m\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{5}{7}m\right) - m = 0.$$

Akcie sú perfektne negatívne korelované bez ohľadu na to, aké hodnoty majú pravdepodobnosti p_1, resp. p_2. Rozvrhnutie cien akcií v čase 1 č. j. je však také, že arbitráž na takomto trhu nevznikne.

Je teda možné, aby na trhu s dvoma akciami, ktorých cenový vývoj je opísaný na trinárnom strome, vznikla arbitráž? Je to možné, ale jej vzniku musia priať priaznivé okolnosti.

Uvažujme napr.:

$$\begin{array}{lllclllcll} \mathcal{U}_1: & & & & 24 \text{ p. j.} & & & & 5 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_1 \\ & & & \nearrow & & & & \nearrow & & \\ \mathcal{U}_2: & \mathbf{A:} & 20 \text{ p. j.} & \rightarrow & 22 \text{ p. j.} & \mathbf{B:} & 10 \text{ p. j.} & \rightarrow & 10 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p_2 \\ & & & \searrow & & & & \searrow & & \\ \mathcal{U}_3: & & & & 16 \text{ p. j.} & & & & 25 \text{ p. j.} & \text{s pp. } 1 - p_1 - p_2 \end{array}$$

Potom eliminácia rizika vedie na:

$$\begin{aligned} 1,2x + 0,5y &= 1,1x + y, \\ 1,1x + y &= 0,8x + 2,5y, \\ 0,8x + 2,5y &= 1,2x + 0,5y, \end{aligned}$$

resp.:

$$\begin{aligned} 0,1x - 0,5y &= 0, \\ 0,3x - 1,5y &= 0, \\ 0,4x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie sústavy je také, že $x = 5y$. Keďže $x + y = m$, tak máme $x = \frac{5}{6}m$ p. j., $y = \frac{1}{6}m$ p. j. a zisk investora je

$$1,2x + 0,5y - m = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}m\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{6}\right) - m = \frac{m}{12}.$$

Vidíme, že jeho výška závisí od m. Čím vyšší je kapitál, ktorý je investor ochotný použiť na investovanie do akcií, tým vyšší bezrizikový zisk dosiahne.

Poznamenajme, že aj v tomto prípade boli ceny akcií perfektne negatívne korelované.

Tri akcie a arbitráž

Ak uvažujeme namiesto dvoch akcií tri akcie, ktorých cenový vývoj opisuje trinárny strom, do riziko eliminujúcich rovníc pribudne ďalšia premenná, ktorá zo sústavy troch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi urobí sústavu troch lineárnych rovníc s troma neznámymi.

Uvažujme napr. tri akcie A, B, C, ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase 0) cena akcie A je 20 p. j., súčasná cena akcie B je 50 p. j. a súčasná cena akcie C je 10 p. j. Predpokladajme, že na cenu akcií v čase 1 č. j. vplývajú tri náhodné udalosti $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ tak, že:

udalosť	pp.	**akcia**			**akcia**			**akcia**		
$\mathcal{U}_1$	p_1	**A:**		30 p. j.	**B:**		35 p. j.	**C:**		25 p. j.
			$\nearrow$			$\nearrow$			$\nearrow$	
$\mathcal{U}_2$	p_2	20 p. j.	$\rightarrow$	20 p. j.	50 p. j.	$\rightarrow$	45 p. j.	10 p. j.	$\rightarrow$	15 p. j.
			$\searrow$			$\searrow$			$\searrow$	
$\mathcal{U}_3$	p_3			10 p. j.			60 p. j.			5 p. j.

kde $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.

Ak označíme investíciu do akcie A ako x, do akcie B ako y a do akcie C ako z, tak pri počiatočnom kapitále investora m platí $x + y + z = m$.

Eliminácia rizika investorom vedie na sústavu troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$\begin{aligned} 1,5x + 0,7y + 2,5z &= x + 0,9y + 1,6z, \\ x + 0,9y + 1,6z &= 0,5x + 1,2y + 0,5z, \\ 0,5x + 1,2y + 0,5z &= 1,5x + 0,7y + 2,5z, \end{aligned}$$

resp.:

$$\begin{aligned} 0,5x - 0,2y + 0,9z &= 0, \\ 0,5x - 0,3y + 1,1z &= 0, \\ x - 0,5y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Riešením sústavy je $x = -z$, $y = 2z$, kde z je ľubovoľné. Pretože $x + y + z = m$, máme $x = -\frac{m}{2}$, $y = m$ a $z = \frac{m}{2}$. Zisk investora je rovný

$$1,5x + 0,7y + 2,5z - m = -\frac{3}{4}m + \frac{7}{10}m + \frac{5}{4}m - m = \frac{m}{5}.$$

Na vytvorenie arbitráže je teda potrebné vlastniť akcie A v hodnote polovica počiatočného kapitálu investora m p. j., ktorých predajom sa získajú finančné prostriedky na nákup akcie C a počiatočný kapitál investora sa celý minie na nákup akcie B. Výsledkom je bezrizikový zisk vo výške $\frac{m}{5}$ p. j.

Aj pre tri bezdividendové akcie s cenovým vývojom zaznamenaným na trinárnom strome by bolo možné spraviť kompletnú analýzu, ktorej výstupom by boli vzťahy pre ceny akcií, ktorých splnením by buď bolo alebo nebolo možné vytvoriť arbitráž. Rovnako by bolo možné pripojiť k trom akciám ďalšie akcie alebo diskontný dlhopis. Úplná analýza aj s ilustračnými príkladmi pre lepšie ozrejmenie by však bola zdĺhavá a zaberala by ďalšie desiatky strán tejto učebnice. Navyše by sa do hľadania spomínaných vzťahov opakovane (a nudne) zapájala eliminačná stratégia investora. Z týchto dôvodov túto analýzu robiť nebudeme a prejdeme k ďalšej kapitole zaoberajúcej sa teóriou portfólia, v ktorej sa k arbitráži na trhu ešte vrátime.

Predchádzajúci text, ktorý sa venoval zapojeniu arbitráže pri oceňovaní akcií, má predovšetkým slúžiť na to, aby na jednoduchých príkladoch demonštroval hľadanie arbitrážnych príležitostí a čitateľom umožnil oboznámiť sa s oceňovaním na bezarbitrážnom princípe ľahšou cestou. Navyše s oceňovaním na tomto princípe na binárnych stromoch sa ešte stretneme v kapitole o finančných derivátoch.

4.4 Úlohy na precvičenie

Úloha 4.1. *Uvažujte nasledujúcu štruktúru diskrétnych úrokových sadzieb:*

obdobie	*1 rok*	*2 roky*	*3 roky*	*4 roky*
úroková sadzba	$r_1 = 0,002$	$r_2 = 0,006$	$r_3 = 0,011$	$r_4 = 0,018$

Vypočítajte súčasnú hodnotu B_D bezkupónového dlhopisu D s dobou splatnosti 3 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p. j. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

Vypočítajte súčasnú hodnotu V_E kupónového dlhopisu E s maturitou 4 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p. j., ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške 4 % z nominálu (t. j. ročná kupónová sadzba $c = 0,04$). Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.
[*Výsledok:* $B_D \doteq 967,71$ *p. j.*, $V_E \doteq 1086,53$ *p. j.*]

Úloha 4.2. *Uvažujte dlhopisový trh s časovou štruktúrou diskrétnych úrokových sadzieb z úlohy 4.1. Určte spojité úrokové sadzby R_n na obdobie $n = 1,2,3,4$ rokov a s takto získanými hodnotami vypočítajte súčasnú hodnotu B_D bezkupónového dlhopisu D s dobou splatnosti 3 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p. j. a súčasnú hodnotu V_E kupónového dlhopisu E s maturitou 4 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p. j., ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške 4 % z nominálu.*
[*Výsledok:* $R_1 = \ln(1+r_1) \doteq 0,002, R_2 = \ln(1+r_2) \doteq 0,006, R_3 = \ln(1+r_3) \doteq 0,011, R_4 = \ln(1+r_4) \doteq 0,018, B_D \doteq 967,71$ *p. j.*, $V_E \doteq 1086,53$ *p. j.*]

Úloha 4.3. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis, ktorý každoročne vypláca kupón vo výške 3 % z nominálu $F = 100$ p. j. Nech spojité ročné úrokové sadzby na jednotlivé obdobia sú $R_1 = 0,0067$, $R_2 = 0,0197$, kde dolný index pri každom R znamená dĺžku obdobia v rokoch. Vypočítajte súčasnú hodnotu V_2 tohto dlhopisu. Výsledok zaokrúhlite na celé čísla.*
[*Výsledok:* $V_2 \doteq 102$ *p. j.*]

Úloha 4.4. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis so súčasnou hodnotou $V_2 = 103$ p. j., ktorý každoročne vypláca kupón vo výške 4 % z nominálu F p. j. Nech spojité ročné úrokové sadzby*

na jednotlivé obdobia sú $R_1 = 0,0218$, $R_2 = 0,0242$, *kde dolný index pri každom* R *znamená dĺžku obdobia v rokoch. Určte* F. *Výsledok zaokrúhlite na celé čísla.*
[*Výsledok:* $F \doteq 100$ *p. j.*]

Úloha 4.5. *Uvažujte nasledujúcu štruktúru spojitých úrokových sadzieb:*

obdobie	*štvrťrok*	*polrok*	*trištvrte roka*	*rok*	*rok a štvrť*
sadzba	$R_{0,25} = 0,001$	$R_{0,5} = 0,002$	$R_{0,75} = 0,004$	$R_1 = 0,007$	$R_{1,25} = 0,012$

Vypočítajte súčasnú hodnotu $V_{1,25}$ *kupónového dlhopisu s dobou splatnosti jeden a štvrť roka a nominálnou hodnotou* $F = 10\ 000$ *p. j., ktorý každý štvrťrok vypláca pravidelný kupón vo výške* 4 % *z nominálu ročne (t. j. ročná kupónová sadzba* $c = 0,04$*). Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $V_{1,25} \doteq 10\ 348,51$ *p. j.*]

Úloha 4.6. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis, ktorý každoročne vypláca kupón vo výške* 3 % *z nominálu* $F = 110$ *p. j. Nech spojité ročné úrokové sadzby na jednotlivé obdobia sú* R_1 *a* $R_2 = 0,0251$, *kde dolný index pri každom* R *znamená dĺžku obdobia v rokoch. Určte hornú hranicu* M *(zaokrúhlenú na tri desatinné miesta) pre hodnotu* R_1 *tak, aby pre* $R_1 \leq M$ *platilo, že súčasná hodnota dlhopisu* V_2 *je väčšia alebo rovná* 111 *p. j.*
[*Výsledok:* $R_1 \leq M \doteq 0,016$]

Úloha 4.7. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis, ktorý každoročne vypláca kupón vo výške* 4 % *z nominálu* $F = 110$ *p. j. Nech spojité ročné úrokové sadzby na jednotlivé obdobia sú* $R_1 = 0,0253$ *a* R_2, *kde dolný index pri každom* R *znamená dĺžku obdobia v rokoch. Určte hornú hranicu* M *(zaokrúhlenú na štyri desatinné miesta) pre hodnotu* R_2 *tak, aby pre* $R_2 \leq M$ *platilo, že súčasná hodnota dlhopisu* V_2 *je väčšia alebo rovná* 113 *p. j.*
[*Výsledok:* $R_2 \leq M \doteq 0,0255$]

Úloha 4.8. *Vypočítajte, akú ročnú kupónovú sadzbu* c *poskytuje dvojročný kupónový dlhopis s nominálnou hodnotou* $F = 100$ *p. j., ak jeho súčasná hodnota* $V_2 = 104$ *p. j. a diskrétne ročné úrokové sadzby na jednotlivé obdobia sú* $r_1 = 0,0101$, $r_2 = 0,0196$, *kde dolný index pri každom* r *znamená dĺžku obdobia v rokoch. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $c \doteq 0,04$]

Úloha 4.9. *Uvažujte trh so štyrmi bezkupónovými dlhopismi s rovnakou nominálnou hodnotou* $F = 10$ *p. j., ale s rôznou dobou splatnosti. Nech* B_n *označuje súčasnú hodnotu dlhopisu* D_n *s dobou splatnosti* n *rokov, kde* $n = 1, 2, 3, 4$. *Vypočítajte diskrétne (ročné) úrokové sadzby* r_n *na jednotlivé obdobia* n *rokov, kde* $n = 1, 2, 3, 4$, *a spojité úrokové sadzby* R_n *na jednotlivé obdobia* n *rokov, kde* $n = 1, 2, 3, 4$, *ak:*

dlhopis	*súčasná hodnota*
D_1	$B_1 = 9,987$ *p. j.*
D_2	$B_2 = 9,912$ *p. j.*
D_3	$B_3 = 9,831$ *p. j.*
D_4	$B_4 = 9,727$ *p. j.*

Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.
[*Výsledok:* $r_1 \doteq 0,0013, r_2 \doteq 0,0044, r_3 \doteq 0,0057, r_4 \doteq 0,0069, R_1 = \ln(1+r_1) \doteq 0,0013,$ $R_2 = \ln(1+r_2) \doteq 0,0044, R_3 = \ln(1+r_3) \doteq 0,0057, R_4 = \ln(1+r_4) \doteq 0,0069$]

Úloha 4.10. *Uvažujte, že na trhu s dlhopismi z úlohy 4.9 sa nachádza kupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou 1000 p. j. a maturitou 4 roky, ktorý vypláca ročný kupón vo výške 5 % z nominálu. Určte jeho súčasnú hodnotu V_4.*
[*Výsledok:* $V_4 = 1169,985$ *p. j.*]

Úloha 4.11. *Majme trh s nasledujúcimi dlhopismi:*

dlhopis	*súčasná hodnota*	*splatnosť*	*ročný kupón*	*nominálna hodnota*
D_1	97 *p. j.*	1 *rok*	0 *p. j.*	100 *p. j.*
D_2	93 *p. j.*	2 *roky*	0 *p. j.*	100 *p. j.*
D_3	89 *p. j.*	3 *roky*	0 *p. j.*	100 *p. j.*

Uvažujte, že na tomto trhu sa nachádza kupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou 100 p. j. a trojročnou maturitou, ktorý každý rok vypláca ročný kupón vo výške 4 % z nominálu a ktorého cena je 100 p. j. Ukážte, že dlhopis D nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nato vytvorte replikačné portfólio pozostávajúce z dlhopisov D_1, D_2 a D_3, ktoré replikuje vlastnosti dlhopisu D, t. j. poskytuje v rovnakých časoch rovnaké výplaty ako dlhopis D. Určte zastúpenie (v počtoch kusov) x_1, x_2 a x_3 dlhopisov D_1, D_2 a D_3 v skladbe portfólia. Akým spôsobom by mohol investor na arbitráži na tomto trhu zbohatnúť? Aká by mala byť bezarbitrážna súčasná hodnota (cena) V_D dlhopisu D?
[*Výsledok:* $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = \frac{1}{25}, x_3 = \frac{26}{25}$, *cena replikačného portfólia* $= 100,16$ *p. j.* $= V_D$, *arbitráž: predať x kusov replikačného portfólia a kúpiť x kusov dlhopisu D, ak napr. $x = 2500$, potom okamžitý zisk investora je 400 p. j. a všetky budúce hotovostné toky sa vynulujú.*]

Úloha 4.12. *Majme trh s nasledujúcimi dlhopismi:*

dlhopis	*súčasná hodnota*	*splatnosť*	*ročný kupón*	*nominálna hodnota*
D_1	98 *p. j.*	1 *rok*	0	100 *p. j.*
D_2	96 *p. j.*	2 *roky*	0	100 *p. j.*
D_3	99 *p. j.*	3 *roky*	3 %	100 *p. j.*

Uvažujte, že na tomto trhu sa nachádza bezkupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou 100 p. j. a trojročnou maturitou, ktorého cena je 92 p. j. Ukážte, že dlhopis D nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nato vytvorte replikačné portfólio pozostávajúce z dlhopisov D_1, D_2 a D_3, ktoré replikuje vlastnosti dlhopisu D, t. j. poskytuje v rovnakých časoch rovnaké výplaty ako dlhopis D. Určte zastúpenie (v počtoch kusov) x_1, x_2 a x_3 dlhopisov D_1, D_2 a D_3 v skladbe portfólia. Akým spôsobom by mohol investor na arbitráži na tomto trhu zbohatnúť? Aká by mala byť bezarbitrážna súčasná hodnota (cena) B_D dlhopisu D?

[*Výsledok:* $x_1 = \frac{-3}{103}, x_2 = \frac{-3}{103}, x_3 = \frac{100}{103}$, *cena replikačného portfólia* $= \frac{9318}{103} \doteq 90,47$ *p. j.* $= B_D$, *arbitráž: predať* x *kusov dlhopisu* D *a kúpiť* x *kusov replikačného portfólia, tzn. nakúpiť* $x\frac{100}{103}$ *kusov dlhopisu* D_3 *a predať po* $x\frac{3}{103}$ *kusoch dlhopisu* D_1 *a* D_2, *ak napr.* $x = 103$, *potom okamžitý zisk investora je* 158 *p. j. a všetky budúce hotovostné toky sa vynulujú.*]

Úloha 4.13. *Uvažujte trh s nasledujúcimi dlhopismi:*

dlhopis	*súčasná hodnota*	*splatnosť*	*ročný kupón*	*nominálna hodnota*
D_1	99,93 *p. j.*	3 *mesiace*	0	100 *p. j.*
D_2	99,61 *p. j.*	6 *mesiacov*	0	100 *p. j.*
D_3	99,01 *p. j.*	12 *mesiacov*	0	100 *p. j.*
D_4	112,89 *p. j.*	18 *mesiacov*	10 %	100 *p. j.*
D_5	112,22 *p. j.*	24 *mesiacov*	8 %	100 *p. j.*
D_6	109,57 *p. j.*	27 *mesiacov*	6 %	100 *p. j.*

Uvažujte, že pri kupónových dlhopisoch je kupón vyplácaný polročne. Zistite, aká je časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb, t. j. vypočítajte spojité úrokové sadzby $R_{0,25}$, $R_{0,5}$, R_1, $R_{1,5}$, R_2, $R_{2,25}$ *pre jednotlivé časové obdobia. Pri výpočte* $R_{2,25}$ *si pomôžte odhadmi sadzieb* $R_{0,75}$, $R_{1,25}$ *a* $R_{1,75}$. *Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*

[*Výsledok:* $R_{0,25} \doteq 0,0028, R_{0,5} \doteq 0,0078, R_1 \doteq 0,0099, R_{1,5} \doteq 0,0131, R_2 \doteq 0,0178, R_{2,25} \doteq 0,0234$, *približné hodnoty:* $R_{0,75} \doteq 0,0089, R_{1,25} \doteq 0,0115, R_{1,75} \doteq 0,0155$]

Úloha 4.14. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis so súčasnou hodnotou* $V_2 = 105$ *p. j., ktorý každoročne vypláca kupón vo výške* 5 % *z nominálu* $F = 100$ *p. j. Vypočítajte výnos do splatnosti* $y > 0$ *tohto dlhopisu za predpokladu, že sa úročí zloženým úrokovaním raz ročne. Výsledok zaokrúhlite na tri desatinné miesta.*

[*Výsledok:* $y \doteq 0,024$]

Úloha 4.15. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis so súčasnou hodnotou* V_2 *p. j. rovnou nominálnej hodnote dlhopisu* F, *Predpokladajte, že dlhopis vypláca raz ročne kupón vo výške* 5 % *z nominálu* F *p. j. Vypočítajte výnos do splatnosti* $y > 0$ *tohto dlhopisu za predpokladu, že sa úročí zloženým úrokovaním raz ročne.*

[*Výsledok:* $y = 0,05$]

Úloha 4.16. *Uvažujte dvojročný kupónový dlhopis so súčasnou hodnotou* V_2 *p. j. rovnou nominálnej hodnote dlhopisu* F, *Predpokladajte, že dlhopis vypláca raz ročne kupón vo výške* 5 % *z nominálu* F *p. j. Vypočítajte výnos do splatnosti* $y > 0$ *tohto dlhopisu za predpokladu, že sa úročí spojitým úrokovaním. Výsledok zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*

[*Výsledok:* $y = \ln(1,05) \doteq 0,0488$]

Úloha 4.17. *Uvažujte trojročný kupónový dlhopis so súčasnou hodnotou* $V_3 = 104$ *p. j., ktorý každoročne vypláca kupón vo výške* 2 % *z nominálu* $F = 100$ *p. j. Vypočítajte výnos do splatnosti* $y > 0$ *tohto dlhopisu za predpokladu, že sa úročí zloženým úrokovaním raz ročne. Výsledok zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*

[*Výsledok:* $y \doteq 0,0065$]

Úloha 4.18. *Uvažujte nasledujúcu štruktúru diskrétnych úrokových sadzieb:*

obdobie	*1 rok*	*2 roky*	*3 roky*	*4 roky*	*5 rokov*
sadzba	$r_1 = 0,0123$	$r_2 = 0,0177$	$r_3 = 0,0222$	$r_4 = 0,0248$	$r_5 = 0,0261$

Určte par yield c_n pre n-ročný kupónový par bond, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.
[*Výsledok:* $c_1 = r_1 = 0,0123, c_2 \doteq 0,0177, c_3 \doteq 0,0221, c_4 \doteq 0,0246, c_5 \doteq 0,0259$]

Úloha 4.19. *Uvažujte nasledujúcu štruktúru spojitých úrokových sadzieb:*

obdobie	*1 rok*	*2 roky*	*3 roky*	*4 roky*	*5 rokov*
sadzba	$R_1 = 0,0123$	$R_2 = 0,0177$	$R_3 = 0,0222$	$R_4 = 0,0248$	$R_5 = 0,0261$

Určte par yield c_n pre n-ročný kupónový par bond, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.
$\big[$*Výsledok:* $c_1 = \mathrm{e}^{R_1} - 1 \doteq 0,0124, c_2 \doteq 0,0178, c_3 \doteq 0,0223, c_4 \doteq 0,0249, c_5 \doteq 0,0262\big]$

Úloha 4.20. *Uvažujte nasledujúce hodnoty par yield c_n pre n-ročný kupónový par bond, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5$:*

obdobie	*1 rok*	*2 roky*	*3 roky*	*4 roky*	*5 rokov*
sadzba	$c_1 = 0,0116$	$c_2 = 0,0128$	$c_3 = 0,0139$	$c_4 = 0,0172$	$c_5 = 0,0203$

Určte časovú štruktúru diskrétnych r_n aj spojitých R_n úrokových sadzieb na obdobie n rokov, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.
[*Výsledok:* $r_1 = c_1 = 0,0116, r_2 \doteq 0,0128, r_3 \doteq 0,0139, r_4 \doteq 0,0173, r_5 \doteq 0,0205,$
$R_1 = \ln(1 + c_1) \doteq 0,0115, R_2 \doteq 0,0127, R_3 \doteq 0,0138, R_4 \doteq 0,0172, R_5 \doteq 0,0203$]

Úloha 4.21. *Nájdite súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) P_0 akcie, ktorá vypláca konštantnú dividendu $D = 4$ p. j. ročne a ktorej výnosová sadzba $r = 0,05$.*
[*Výsledok:* $P_0 = 80$ *p. j.*]

Úloha 4.22. *Vypočítajte výnosovú sadzbu (mieru) r akcie, ktorá vypláca konštantnú dividendu $D = 7$ p. j. ročne a ktorej súčasná hodnota (cena v čase 0) je 100 p. j.*
[*Výsledok:* $r = 0,07$]

Úloha 4.23. *Nájdite súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) P_0 akcie, ktorá vypláca v roku 1 dividendu vo výške $D_1 = D = 1$ p. j., jej výnosová sadzba $r = 0,1$ a očakávaná miera rastu dividendy $g = 0,06$.*
[*Výsledok:* $P_0 = 25$ *p. j.*]

Úloha 4.24. *Vypočítajte výnosovú sadzbu (mieru) r akcie, ktorej súčasná hodnota (cena v čase 0) $P_0 = 25$ p. j., pričom akcia vypláca v roku 1 dividendu vo výške $D_1 = D = 2$ p. j. a očakávaná miera rastu dividendy $g = 0,03$.*
[*Výsledok:* $r = 0,11$]

Úloha 4.25. *Uvažujte akciu, ktorej súčasná hodnota (cena v čase 0)* $P_0 = 25$ *p. j. Určte výšku dividendy* D*, ktorú akcia vypláca v roku* 1*, ak výnosová miera akcie* $r = 0,12$ *a očakávaná miera rastu dividendy akcie* $g = 0,02$.
[*Výsledok:* $D = 2,5$ *p. j.*]

Úloha 4.26. *Vypočítajte očakávanú mieru rastu* g *dividendy akcie, ktorej súčasná hodnota (cena v čase 0)* $P_0 = 25$ *p. j., pričom akcia vypláca v roku* 1 *dividendu vo výške* $D_1 = D = 2$ *p. j. a výnosová miera akcie* $r = 0,12$.
[*Výsledok:* $g = 0,04$]

Úloha 4.27. *Uvažujte akciu, ktorej súčasná hodnota (cena v čase 0)* $P_0 = 50$ *p. j. a ktorá vypláca v roku* 1 *dividendu vo výške* $D_1 = D = 5$ *p. j. Vypočítajte výnosovú sadzbu (mieru)* r *akcie, ak aktivačný pomer je* $b = 0,5$ *a návratnosť vlastného kapitálu* $ROE = 0,08$.
[*Výsledok:* $r = 0,14$]

Úloha 4.28. *Nájdite súčasnú hodnotu (cenu v čase* 0*)* P_0 *akcie, ktorá v nasledujúcich troch rokoch neprinesie žiadnu dividendu, na konci štvrtého roku vyplatí dividendu vo výške* 2 *p. j. a v ďalších rokoch porastie dividenda konštantným tempom rastu* $g = 0,06$. *Uvažujte mieru trhovej kapitalizácie* $r = 0,1$. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $P_0 \doteq 37,57$ *p. j.*]

Úloha 4.29. *Vypočítajte súčasnú hodnotu (cenu v čase* 0*)* P_0 *akcie, ktorá nasledujúci rok prinesie dividendu* $D_1 = D = 1$ *p. j., ktorá počas ďalších troch rokov porastie rýchlosťou rastu* $G = 0,1$ *a od piateho roka počnúc táto rýchlosť klesne na* $g = 0,06$. *Uvažujte* $r = 0,15$. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $P_0 \doteq 12,22$ *p. j.*]

Úloha 4.30. *Vypočítajte súčasnú hodnotu (cenu v čase* 0*)* P_0 *akcie, ktorá nasledujúci rok prinesie dividendu* $D_1 = D = 2$ *p. j., ktorá počas ďalších štyroch rokov porastie rýchlosťou rastu* $G = 0,2$ *a od šiesteho roka počnúc táto rýchlosť klesne na* $g = 0,1$. *Uvažujte* $r = 0,2$. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $P_0 \doteq 26,67$ *p. j.*]

Úloha 4.31. *Vypočítajte súčasnú hodnotu (cenu v čase* 0*)* P_0 *akcie, ktorá nasledujúci rok prinesie dividendu* $D_1 = D = 6$ *p. j., ktorá počas ďalších štyroch rokov porastie rýchlosťou rastu* $G = 0,2$ *a od šiesteho roka počnúc táto rýchlosť klesne na* $g = 0,03$. *Uvažujte* $r = 0,15$. *Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
[*Výsledok:* $P_0 \doteq 81,55$ *p. j.*]

Úloha 4.32. *Uvažujte bezdividendovú akciu* A*, ktorej súčasná cena je* 20 *p. j. Predpokladajte, že investor bude držať túto akciu v období dĺžky rovnej* 1 *jednotka času a potom ju predá za cenu* P_A*, ktorá s pravdepodobnosťou* $p_1 = \frac{1}{4}$ *pri vzniku udalosti* $\mathcal{U}_1$ *bude* 28 *p. j., s pravdepodobnosťou* $p_2 = \frac{1}{2}$ *pri vzniku udalosti* $\mathcal{U}_2$ *bude* 20 *p. j. a s pravdepodobnosťou* $p_3 = \frac{1}{4}$ *pri vzniku udalosti* $\mathcal{U}_3$ *bude* 16 *p. j. Vypočítajte očakávanú (strednú) hodnotu ceny* P_A *a riziko ohľadom týchto*

očakávaní, teda smerodajnú odchýlku P_A (výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta).
$\left[\textit{Výsledok: } \overline{P}_A = 21 \text{ p. j.}, \sigma_{P_A} \doteq 4,36 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 4.33. *Uvažujte bezdividendovú akciu B, ktorej súčasná cena je 50 p. j. Predpokladajte, že investor bude držať túto akciu v období dĺžky rovnej 1 jednotka času a potom ju predá za cenu P_B, ktorá s pravdepodobnosťou $p_1 = \frac{1}{4}$ pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_1$ bude 44 p. j., s pravdepodobnosťou $p_2 = \frac{1}{2}$ pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_2$ bude 50 p. j. a s pravdepodobnosťou $p_3 = \frac{1}{4}$ pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_3$ bude 56 p. j. Vypočítajte očakávanú (strednú) hodnotu ceny P_B a riziko ohľadom týchto očakávaní, teda smerodajnú odchýlku P_B (výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta).*
$\left[\textit{Výsledok: } \overline{P}_B = 50 \text{ p. j.}, \sigma_{P_B} \doteq 4,24 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 4.34. *Vypočítajte kovarianciu $\sigma_{P_AP_B}$ a korelačný koeficient $\rho_{P_AP_B}$ (výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta) cien akcií A a B z úloh 4.32, resp. 4.33.*
$\left[\textit{Výsledok: } \sigma_{P_AP_B} = -18\,(\text{p. j.})^2, \rho_{P_AP_B} \doteq -0,97\right]$

Úloha 4.35. *Uvažujte bezdividendovú akciu A, ktorej súčasná cena je 20 p. j. Predpokladajte, že investor bude držať túto akciu v období dĺžky rovnej 1 jednotka času a potom ju predá za cenu P_A, ktorá s pravdepodobnosťou $p = \frac{2}{3}$ pri vzniku udalosti H bude 22 p. j. a s pravdepodobnosťou $1-p = \frac{1}{3}$ pri vzniku udalosti D bude 19 p. j. Vypočítajte očakávanú (strednú) hodnotu ceny P_A a riziko ohľadom týchto očakávaní, teda smerodajnú odchýlku P_A (výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta).*
$\left[\textit{Výsledok: } \overline{P}_A = 21 \text{ p. j.}, \sigma_{P_A} = \sqrt{2} \doteq 1,41 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 4.36. *Uvažujte bezdividendovú akciu B, ktorej súčasná cena je 50 p. j. Predpokladajte, že investor bude držať túto akciu v období dĺžky rovnej 1 jednotka času a potom ju predá za cenu P_B, ktorá s pravdepodobnosťou $p = \frac{2}{3}$ pri vzniku udalosti H bude 48 p. j. a s pravdepodobnosťou $1-p = \frac{1}{3}$ pri vzniku udalosti D bude 57 p. j. Vypočítajte očakávanú (strednú) hodnotu ceny P_B a riziko ohľadom týchto očakávaní, teda smerodajnú odchýlku P_B (výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta).*
$\left[\textit{Výsledok: } \overline{P}_B = 51 \text{ p. j.}, \sigma_{P_B} = 3\sqrt{2} \doteq 4,24 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 4.37. *Vypočítajte kovarianciu $\sigma_{P_AP_B}$ a korelačný koeficient $\rho_{P_AP_B}$ cien akcií A a B z úloh 4.35, resp. 4.36.*
$\left[\textit{Výsledok: } \sigma_{P_AP_B} = -6\,(\text{p. j.})^2, \rho_{P_AP_B} = -1\right]$

Úloha 4.38. *Uvažujte akcie A, B z úloh 4.35, resp. 4.36. Predpokladajte, že investor je v čase 0 ochotný investovať do kúpy akcií $m = 3300$ p. j. Nech x označuje investíciu do akcie A a y označuje investíciu do akcie B, t. j. $x + y = m$. Ukážte, že je možné na trhu s týmito akciami vytvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase 1 jednotka času neskôr a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x a y.*
$[\textit{Výsledok: } x = 1800 \text{ p. j.}, y = 1500 \text{ p. j.}, \omega = 120 \text{ p. j.}]$

Úloha 4.39. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.38 s tým rozdielom, že na trhu spolu s akciami A, B existuje diskontný dlhopis s dobou splatnosti 1 jednotka času poskytujúci na toto*

obdobie bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f = 0,03$. *Nech* z *označuje investíciu do tohto dlhopisu, t. j.* $x+y+z=m$. *Súčasne predpokladajte, že predajom dlhopisov je možné si v čase* 0 *požičať najviac* 1100 *p. j., čiže* $z \in \langle -1100, 3300 \rangle$. *Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 99 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty* x, y *a* z.
[*Výsledok:* $x = 2400$ *p. j.*, $y = 2000$ *p. j.*, $z = -1100$ *p. j.*, $\omega = 127$ *p. j.*]

Úloha 4.40. *Uvažujte dve akcie* A, B, *ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase* 0*) cena akcie* A *je* 20 *p. j. a súčasná (v čase* 0*) cena akcie* B *je* 50 *p. j. Uvažujte, že na cenu akcií v čase* 1 *č. j. vplývajú dve udalosti* H *a* D *tak, že:*

$$\begin{array}{llllllll}
 & H: & & & 22\ p.\ j. & & & 40\ p.\ j. \quad s\ pp.\ p \\
 & & & \nearrow & & & \nearrow & \\
\boldsymbol{A:} & & 20\ p.\ j. & & & \boldsymbol{B:}\ 50\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & & & \searrow & \\
 & D: & & & 15\ p.\ j. & & & 55\ p.\ j. \quad s\ pp.\ 1-p
\end{array}$$

Nech investor v čase 0 *vlastní* 30 *kusov akcie* A, *t. j.* 600 *p. j. má uložených v akcii* A, *a vlastní* 14 *kusov akcie* B, *t. j. v akcii* B *má uložených* 700 *p. j. Celkovo má akcie v hodnote* 1300 *p. j. Ukážte, že ceny akcií sú perfektne negatívne korelované a že je možné na trhu s týmito akciami utvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora a určte hodnotu* x, y, *kde* $x < 0$ *p. j. určuje, akú časť z počiatočných* 600 *p. j. uložených v akcii* A *je potrebné predať v čase* 0 *za účelom dosiahnutia maximálneho arbitrážneho zisku a* $y < 0$ *p. j. určuje, akú časť z počiatočných* 700 *p. j. uložených v akcii* B *je potrebné predať v čase* 0 *za tým istým účelom.*
[*Výsledok:* $x = -600$ *p. j.*, $y = -700$ *p. j.*, $\omega = 80$ *p. j.*]

Úloha 4.41. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.40 s tým rozdielom, že na trhu spolu s akciami* A, B *existuje diskontný dlhopis s dobou splatnosti* 1 *jednotka času poskytujúci na toto obdobie bezrizikovú úrokovú sadzbu* $r_f = 0,01$. *Nech* z *označuje investíciu do tohto dlhopisu, t. j.* $x+y+z=m$, *kde* $m = 1300$ *p. j. je počiatočné imanie investora mimo hodnoty uloženej v akciách. Súčasne predpokladajte, že predajom dlhopisov je možné si v čase* 0 *požičať najviac* 1300 *p. j., čiže* $z \in \langle -1300, 2600 \rangle$. *Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 13 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty* x, y *a* z.
[*Výsledok:* $x = -600$ *p. j.*, $y = -700$ *p. j.*, $z = 2600$ *p. j.*, $\omega = 106$ *p. j.*]

Úloha 4.42. *Uvažujte dve akcie* A, B, *ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase* 0*) cena akcie* A *je* 20 *p. j. a súčasná (v čase* 0*) cena akcie* B *je* 50 *p. j. Uvažujte, že na cenu akcií v čase* 1 *č. j. vplývajú dve udalosti* H *a* D *tak, že:*

$$\begin{array}{lllllll}
 & H: & & 22\ p.\ j. & & & 60\ p.\ j. \quad s\ pp.\ p \\
 & & \nearrow & & & \nearrow & \\
\boldsymbol{A:} & 20\ p.\ j. & & & \boldsymbol{B:}\ 50\ p.\ j. & & \\
 & & \searrow & & & \searrow & \\
 & D: & & 14\ p.\ j. & & & 45\ p.\ j. \quad s\ pp.\ 1-p
\end{array}$$

Nech investor v čase 0 *vlastní* 150 *kusov akcie* A, *t. j.* 3000 *p. j. má uložených v akcii* A. *Predpokladajte, že investor je v čase* 0 *ochotný investovať do kúpy akcií ďalších* $m = 1000$ *p. j. Nech* x *označuje investíciu do akcie* A *a* y *označuje investíciu do akcie* B, *t. j.* $x + y = m$, *pričom* $x \in \langle -3000, 1000\rangle$ *a* $y \in \langle 0, 4000\rangle$. *Ukážte, že ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované a že je možné na trhu s týmito akciami utvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty* x, y.
[*Výsledok:* $x = -3000$ *p. j.*, $y = 4000$ *p. j.*, $\omega = 500$ *p. j.*]

Úloha 4.43. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.42 s tým rozdielom, že na trhu spolu s akciami* A, B *existuje diskontný dlhopis s dobou splatnosti* 1 *jednotka času poskytujúci na toto obdobie bezrizikovú úrokovú sadzbu* $r_f = 0,05$. *Nech* z *označuje investíciu do tohto dlhopisu, t. j.* $x + y + z = m$, *kde* $m = 1000$ *p. j. je počiatočné imanie investora mimo hodnoty uloženej v akciách* A. *Súčasne predpokladajte, že predajom dlhopisov je možné si v čase* 0 *požičať najviac* 1000 *p. j., čiže* $z \in \langle -1000, 4000\rangle$. *Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 50 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty* x, y *a* z.
[*Výsledok:* $x = -3000$ *p. j.*, $y = 4000$ *p. j.*, $z = 0$ *p. j.*, $\omega = 500$ *p. j.*]

Úloha 4.44. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.43 s tým rozdielom, že* $m = 500$ *p. j. a že predajom dlhopisov je možné si v čase* 0 *požičať najviac* 500 *p. j. Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 25 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit* ω *investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty* x, y *a* z.
[*Výsledok:* $x = -3000$ *p. j.*, $y = 4000$ *p. j.*, $z = -500$ *p. j.*, $\omega = 475$ *p. j.*]

Úloha 4.45. *Uvažujte dve akcie* A, B, *ktoré nevyplácajú dividendy. Nech súčasná (v čase* 0*) cena akcie* A *je* 20 *p. j. a súčasná (v čase* 0*) cena akcie* B *je* 50 *p. j. Uvažujte, že na cenu akcií v čase* 1 *č. j. vplývajú dve udalosti* H *a* D *tak, že:*

$$\begin{array}{lllllll}
 & H: & & 19\ p.\ j. & & & 40\ p.\ j. \quad s\ pp.\ p \\
 & & \nearrow & & & \nearrow & \\
\boldsymbol{A:} & 20\ p.\ j. & & & \boldsymbol{B:}\ 50\ p.\ j. & & \\
 & & \searrow & & & \searrow & \\
 & D: & & 21\ p.\ j. & & & 65\ p.\ j. \quad s\ pp.\ 1-p
\end{array}$$

Nech investor v čase 0 *vlastní* 50 *kusov akcie* A, *t. j.* 1000 *p. j. má uložených v akcii* A, *a nevlastní žiadne akcie* B. *Nech* x *označuje investíciu do akcie* A *a* y *označuje investíciu do akcie* B. *Ukážte, že ceny akcií sú perfektne pozitívne korelované a že je možné na trhu*

s týmito akciami utvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x, y.*
[*Výsledok:* $x = -1000$ *p. j.*, $y = 200$ *p. j.*, $\omega = 10$ *p. j.*]

Úloha 4.46. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.45 s tým rozdielom, že na trhu spolu s akciami A, B existuje diskontný dlhopis s dobou splatnosti* 1 *jednotka času poskytujúci na toto obdobie bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f = 0,01$. Nech z označuje investíciu do tohto dlhopisu, t. j. $x + y + z = m$, kde $m = 0$ p. j. je počiatočné imanie investora mimo hodnoty uloženej v akciách. Súčasne predpokladajte, že predajom dlhopisov je možné si v čase* 0 *požičať najviac* 1000 *p. j., čiže $z \in \langle -1000, 1000 \rangle$. Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 0 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x, y a z.*
[*Výsledok:* $x = -1000$ *p. j.*, $y = 200$ *p. j.*, $z = 800$ *p. j.*, $\omega = 18$ *p. j.*]

Úloha 4.47. *Uvažujte rovnaké zadanie ako v úlohe 4.46 s tým rozdielom, že teraz $m = 1000$ p. j. Ukážte, že na takomto trhu sa dá vytvoriť arbitráž, teda dosiahnuť v čase* 1 *bezrizikový zisk väčší než* 10 *p. j. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase* 1 *a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x, y a z.*
[*Výsledok:* $x = -1000$ *p. j.*, $y = 200$ *p. j.*, $z = 1800$ *p. j.*, $\omega = 28$ *p. j.*]

Úloha 4.48. *Uvažujte akcie A, B z úloh 4.35, resp. 4.36. Nech spolu s akciami A, B existuje na trhu akcia C, ktorej súčasná cena je* 100 *p. j. Ak nastane udalosť H jej cena stúpne na* 103 *p. j., ak nastane udalosť D jej cena klesne na* 96 *p. j. Predpokladajte, že investor je v čase* 0 *ochotný investovať do kúpy akcií $m = 3300$ p. j. Nech x označuje investíciu do akcie A, y označuje investíciu do akcie B a z označuje investíciu do akcie C, t. j. $x + y + z = m$. Ukážte, že je možné na trhu s týmito akciami vytvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase* 1 *jednotka času neskôr a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x, y a z.*
[*Výsledok:* $x = 1800$ *p. j.*, $y = 1500$ *p. j.*, $z = 0$ *p. j.*, $\omega = 120$ *p. j.*]

Úloha 4.49. *Uvažujte arovnaké zadanie ako v úlohe 4.48 s tým rozdielom, že investor je v čase* 0 *držiteľom* 33 *kusov akcie C, t. j. v akciách C má uložených* 3300 *p. j. Ukážte, že je možné na trhu s týmito akciami vytvoriť arbitráž. Vypočítajte maximálny arbitrážny profit ω investora v čase* 1 *jednotka času neskôr a nájdite tomu zodpovedajúce hodnoty x, y a z.*
[*Výsledok:* $x = 4300$ *p. j.*, $y = 2300$ *p. j.*, $z = -3300$ *p. j.*, $\omega = 239$ *p. j.*]

Kapitola 5

Teória portfólia

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali dlhopisom a akciám, ktoré radíme medzi základné finančné nástroje a ekonomická teória ich považuje za základné stavebné kamene ekonomického modelovania. Okrem týchto cenných papierov existujú mnohé iné cenné papiere a investor, ktorý sa obzerá po možnostiach investovania na finančnom trhu, má okrem cenných papierov aj ďalšie možnosti. Môže investovať napr. do nákupu rôznych komodít, ropy, drahých kovov, starožitností, umeleckých diel, nehnuteľností, zahraničných mien atď. Investor má teda možnosť investovať do mnohých rôznych aktív. Súbor týchto investícií nazývame **portfólio** a investor skupovaním aktív skladá svoje portfólio. V jeho záujme je pri opätovnom predaji týchto aktív nadobudnúť kladný výnos, mať kladný zisk. Z toho hľadiska sa obyčajne v teórii portfólia predpokladá istý časový rámec, nazývaný doba držania, na začiatku ktorého sa nachádza investícia do aktív a na jeho konci ich predaj. V predchádzajúcej kapitole sme stanovili 1 časovú jednotku ako dobu držania. Budeme tak robiť aj v tejto.

Investor pri vytváraní portfólia sleduje tri zakladné hľadiská:

1. **výnos** – príjmy, ktoré z investície plynú,

2. **bezpečnosť (riziko)** – stupeň (ne)istoty týkajúci sa očakávaných výnosov z investície,

3. **likvidita** – rýchlosť, ktorou je schopný premeniť investíciu na hotovosť.

Tieto tri hľadiská tvoria tzv. investičný trojuholník. Trojuholník preto, lebo nie je možné všetky tri naraz maximalizovať. **Zlaté pravidlo investovania** hovorí, že neexistuje investícia, ktorá by dosiahla maximum vo všetkých troch ukazovateľoch. Existuje len možnosť optimálneho pomeru výnosov, bezpečnosti a likvidity.

Obyčajne sú menej rizikové aktíva i menej výnosné a viac rizikové aktíva poskytujú vyššie výnosy, ale za cenu prípadných vyšších strát, ak dôjde k pohybu ich cien neželaným smerom. Za bezrizikové aktívum považuje ekonomická teória diskontný (bezkupónový) dlhopis s maturitou rovnou dobe držania. Všetky ostatné aktíva považuje za rizikové. K menej rizikovým investíciam patria aj investície do nehnuteľností, drahých kovov, starožitností alebo zbierok. Akcie či podnikateľské projekty sa vo všeobecnosti považujú za veľmi rizikové. Na rozdiel od napr. nehnuteľností, umeleckých diel, zbierok sú akcie veľmi likvidné a obyčajne existuje na trhu dostatok záujemcov o kúpu akcie, ak ju chce investor predať. Pri nehnuteľnostiach, umeleckých dielach, zbierkach je čas potrebný na ich predaj podstatne dlhší. Najlikvidnejšie sú pochopiteľne peniaze samotné, resp. hotovosť.

5.1 Výnosnosť portfólia

Pravdepodobnostný model z predchádzajúcej kapitoly stanovuje ako určiť očakávanú hodnotu akcie (vo všeobecnosti aktíva) a risk, t. j. stupeň neistoty ohľadom jej dosiahnutia. V teórii portfólia budeme namiesto cien aktív pracovať s ich očakávanými výnosmi. Presnejšie budeme sa v ďalšom zaoberať portfóliami cenných papierov.

Ak označíme P_i hodnotu aktíva i na začiatku sledovaného obdobia a $\overline{P}_i$ očakávanú hodnotu aktíva i na konci sledovaného obdobia, Tak očakávaný výnos, presnejšie očakávaná výnosová sadzba na dobu držania aktíva bude:

$$\overline{r}_i = \frac{\overline{P}_i - P_i}{P_i}. \tag{5.1}$$

Pre jednoduchosť budeme $\overline{r}_i$ nazývať **výnosnosť** aktíva i.

Výnosová sadzba r_i aktíva i je náhodná veličina. Pre krátke periódy $r_i \sim \mathcal{N}(\overline{r}_i, \sigma_i^2)$, teda r_i má normálne rozdelenie, čo sa považuje za experimentálne overený fakt [17]. Pretože hodláme pracovať s aktívami, ktorých výnosy majú normálne rozdelenie, budeme považovať dobu držania za dostatočne krátku. Teda 1 č. j. bude vhodne krátka časová doba.

Ak uvažujeme N zložkové portfólio, tak môžeme určiť výnosnosť celého portfólia $\overline{r}_p$ pomocou výnosností jeho zložiek:

$$\overline{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^N k_i(\overline{P}_i - P_i)}{\sum_{i=1}^N k_i P_i} = \frac{\sum_{i=1}^N k_i P_i \left(\frac{\overline{P}_i - P_i}{P_i}\right)}{\sum_{i=1}^N k_i P_i} = \frac{\sum_{i=1}^N k_i P_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^N k_i P_i}, \tag{5.2}$$

kde k_i reprezentuje počet kusov aktíva i. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že $\overline{r}_i > 0$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, N$. Z toho zároveň vyplýva, že $\overline{r}_p > 0$.

Ak označíme x_i podiel aktíva i na hodnote celého portfólia, t. j.

$$x_i = \frac{k_i P_i}{\sum_{i=1}^N k_i P_i},$$

tak vzťah (5.2) môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\overline{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^N k_i P_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^N k_i P_i} = \sum_{i=1}^N x_i \overline{r}_i. \tag{5.3}$$

Teda výnosnosť portfólia je váženým priemerom výnosností jeho zložiek, kde váhami jednotlivých výnosností sú hodnoty x_i. Z definície x_i navyše vyplýva, že:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1. \tag{5.4}$$

Príklad 5.1. *Uvažujme, že akcie A, B, C tvoria investorovo portfólio. Investor očakáva vzostup ich ceny a o 1 č. j. neskôr ich chce predať. Vypočítajme, aká bude výnosnosť portfólia za dobu držania, ak:*

akcia	*počet kusov*	*cena za kus*	*bežná hodnota*	*očakávaná cena za kus*	*očakávaná hodnota*
A	20	50 $p.\ j.$	1000 $p.\ j.$	55 $p.\ j.$	1100 $p.\ j.$
B	20	35 $p.\ j.$	700 $p.\ j.$	40 $p.\ j.$	800 $p.\ j.$
C	10	30 $p.\ j.$	300 $p.\ j.$	32 $p.\ j.$	320 $p.\ j.$

Riešenie:
Bežná (súčasná) hodnota portfólia je súčtom hodnôt v štvrtom stĺpci tabuľky, teda je rovná 2000 p. j. Očakávaná hodnota portfólia je súčtom hodnôt v poslednom stĺpci tabuľky, teda 2220 p. j. Podľa (5.2) sa výnosnosť portfólia rovná

$$\overline{r}_p = \frac{(2220 - 2000) \text{ p. j.}}{2000 \text{ p. j.}} = 0,11. \tag{5.5}$$

Vypočítajme ešte váhy x_A, x_B, x_C jednotlivých akcií v portfóliu a ukážme, že vážený priemer v (5.3) dáva tú istú hodnotu ako v (5.5).

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1000 \text{ p. j.}}{2000 \text{ p. j.}} = \frac{1}{2}, \\ x_B &= \frac{700 \text{ p. j.}}{2000 \text{ p. j.}} = \frac{7}{20}, \\ x_C &= \frac{300 \text{ p. j.}}{2000 \text{ p. j.}} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Výnosnosti jednotlivých akcií sú:

$$\begin{aligned} \overline{r}_A &= \frac{(55-50) \text{ p. j.}}{50 \text{ p. j.}} = \frac{1}{10}, \\ \overline{r}_B &= \frac{(40-35) \text{ p. j.}}{35 \text{ p. j.}} = \frac{1}{7}, \\ \overline{r}_C &= \frac{(32-30) \text{ p. j.}}{30 \text{ p. j.}} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Výnosnosť portfólia bude:

$$\overline{r}_p = x_A\overline{r}_A + x_B\overline{r}_B + x_C\overline{r}_C = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{100} = 0,11.$$

Vyjadrené v percentách je to 11 %.

5.2 Rizikovosť portfólia

Stupeň neistoty, t. j. riziko spojené s dosiahnutím očakávanej (strednej) hodnoty výnosovej sadzby aktíva i meriame disperziou σ_i^2, resp. smerodajnou odchýlkou σ_i. Pre jednoduchosť zavedieme pojem **rizikovosť** aktíva i, pod ktorým budeme rozumieť σ_i. Ak poznáme rizikovosť aktív tvoriacich portfólio, mali by sme byť schopní vypočítať rizikovosť celého portfólia. Na to však potrebujeme poznať nielen rizikovosti jednotlivých zložiek portfólia, ale aj korelačnú závislosť medzi jednotlivými dvojicami aktív v portfóliu. Kovarianciu dvojice aktív i, j, kde $i \neq j$, budeme označovať σ_{ij} a ich korelačný koeficient budeme označovať ρ_{ij}.

Poznať, aká je korelačná závislosť aktív na trhu, je užitočné, pretože korelačná závislosť všetkých dvojíc aktív v portfóliu umožňuje merať závislosť zmien hodnôt výnosností jednej zložky portfólia od zmien hodnôt výnosností v ostatných zložkách. Napr. investor s odporom k riziku nekúpi akcie áut a pneumatík, pretože sa dá očakávať, že ak nastane pokles hodnoty akcií automobilky, klesnú aj hodnoty akcií pneumatík. Hodnoty týchto cenných papierov sú totiž pozitívne korelované. Opakom pozitívnej korelácie je negatívna korelácia, v prípade ktorej pokles hodnoty jedného aktíva má za následok nárast v hodnote druhého aktíva. V praxi sa najčastejšie vyskytujú investície navzájom nesúvisiace, teda nekorelované.

O interpretácii korelačných vlastností akcií sme písali už v predchádzajúcej kapitole. Dospeli sme k poznaniu, že ak neexistuje možnosť predávať akcie na začiatku celého procesu, najlepšie je investovať do negatívne korelovaných akcií, všeobecne aktív. To môže totiž viesť k vzniku arbitrážnej príležitosti. Ak aktíva nie sú negatívne korelované, na zníženie rizika je vhodné investovať aspoň do nekorelovaných aktív.

Rozkladanie investícií do portfólia sa nazýva **diverzifikácia rizika**. Obyčajne 20 až 30 rôznych cenných papierov postačuje na to, aby sme eliminovali **nesystematické (jedinečné) riziko**, t. j. riziko spojené s každou zložkou portfólia. Diverzifikáciou však nedokážeme eliminovať **systematické (trhové) riziko**, t. j. riziko trhu (ako celku).

Zrodenie teórie portfólia spadá do roku 1952, keď Harry Markowitz vo svojom článku *Portfolio Selection* [21] načrtol, ako robiť diverzifikáciu portfólia a zredukovať jeho rizikovosť výberom vhodných zložiek portfólia.

Ako teda určiť rizikovosť portfólia zloženého z N aktív? Vzťah (5.3) môžeme využiť pri výpočte variancie portfólia σ_p^2:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E\left(r_p - \overline{r}_p\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i r_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{r}_i\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i (r_i - \overline{r}_i)\right)^2 = E\left(\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j (r_i - \overline{r}_i)(r_j - \overline{r}_j)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j E\left((r_i - \overline{r}_i)(r_j - \overline{r}_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Teda pre rizikovosť portfólia platí:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}. \qquad (5.7)$$

Označme vektor váh aktív v N-zložkovom portfóliu ako $\vec{x}$, t. j. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$. Nech Q označuje kovariančnú maticu, teda

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \ldots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

Vzťah (5.6) potom možno prepísať do tvaru:

$$\sigma_p^2 = \vec{x}^T Q \vec{x}. \tag{5.8}$$

Z čoho dostaneme:

$$\sigma_p = \sqrt{\vec{x}^T Q \vec{x}}. \tag{5.9}$$

Príklad 5.2. *Uvažujme akcie A, B, C z príkladu 5.1 tvoriace investorovo portfólio. Vypočítajme rizikovosť portfólia, ak kovariančná matica Q spĺňa:*

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0025 & 0,004 & 0,00001 \\ 0,004 & 0,01 & 0,001 \\ 0,00001 & 0,001 & 0,0003 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:
V príklade 5.1 sme vypočítali váhy jednotlivých akcií na skladbe portfólia:

$$\begin{aligned} x_A &= 0,5, \\ x_B &= 0,35, \\ x_C &= 0,15. \end{aligned}$$

Poznáme teda vektor váh $\vec{x} = (x_A, x_B, x_C)^T = (0,5; 0,35; 0,15)^T$, čo spolu so znalosťou kovariančnej matice Q umožňuje podľa (5.8) vypočítať varianciu portfólia:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= (0,5;0,35;0,15)\begin{pmatrix} 0,0025 & 0,004 & 0,00001 \\ 0,004 & 0,01 & 0,001 \\ 0,00001 & 0,001 & 0,0003 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,35 \\ 0,15 \end{pmatrix} = 0,0025(0,5)^2 + \\ &+2(0,5)(0,35)(0,004) + 2(0,5)(0,15)(0,00001) + 0,01(0,35)^2 + 2(0,35)(0,15)(0,001) + \\ &+0,0003(0,15)^2 = 0,00336325 \end{aligned}$$

Pre smerodajnú odchýlku teda máme:

$$\sigma_p = \sqrt{0,00336325} \doteq 0,058.$$

Vyjadrené v percentách je to približne 5, 8 %.

Poznámka 5.1. *Ako sme mohli vidieť v príklade 5.2 práca s výnosovými sadzbami, čiže s desatinnými číslami, môže byť nepohodlná na zapisovanie, a preto budeme v ďalšom pracovať s výnosovými mierami, teda výnosovými percentami. To znamená, že v ďalšom budeme uvádzať výnosnosť a rizikovosť aktív a portfólia v percentách a prvky kovariančnej matice budú uvádzané v percentách na druhú, aj keď to nebudeme vždy zapisovať.*

Poznamenajme tiež, že v teórii portfólia sa obyčajne predpokladá, že ak pre výnosnosti dvoch rôznych aktív i, j platí $\overline{r}_i < \overline{r}_j$, tak $\sigma_i < \sigma_j$, teda s vyšším výnosom sa spája aj vyššie riziko.

Kovariančná matica Q je zo svojej definície pozitívne semidefinitná. To znamená, že $\vec{x}^T Q\vec{x} \geq 0$ pre akýkoľvek nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$. Ak Q je navyše regulárna, tak je pozitívne definitná, t. j. pre každý nenulový vektor $\vec{x}$ platí: $\vec{x}^T Q\vec{x} > 0$ (pozri [19]). Ak Q je singulárna, tak existuje nenulový vektor $\vec{x}$ taký, že $\vec{x}^T Q\vec{x} = 0$.

Označujme vektor výnosností jednotlivých aktív v N-zložkovom portfóliu ako $\vec{r}$, t. j. $\vec{r} = (\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_N)^T$. Nech ďalej $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$. Potom platí:

$$\vec{x}^T \vec{1} = 1, \tag{5.10}$$

$$\vec{x} \neq \vec{0}, \tag{5.11}$$

$$\vec{x}^T \vec{r} = \overline{r}_p. \tag{5.12}$$

Rovnosť (5.10) vyplýva z (5.4) a jej dôsledkom je tvrdenie v (5.11). Vzťah (5.12) je analogicky zapísaný vzťah (5.3) na výpočet výnosnosti portfólia.

5.3 Množina všetkých prípustných portfólií

Portfólio, na ktorého skladbe sa podieľajú aktíva svojimi váhami, teda možno reprezentovať jeho výnosnosťou a jeho rizikovosťou. Pre rôzne váhy zložiek v portfóliu dostaneme rôzne portfóliá, hoci výnosnosť alebo rizikovosť niektorých portfólií môže byť rovnaká. Všetky portfóliá, ktoré možno vytvoriť z aktív podieľajúcich sa na skladbe portfólia rôznou voľbou ich váh, tvoria **množinu všetkých prípustných portfólií**.

V nasledujúcom príklade skonštruujeme množinu všetkých prípustných portfólií pre dve aktíva – akcie.

Príklad 5.3. *Uvažujme trh s dvoma rizikovými cennými papiermi – akciami A, B takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
A	$\overline{r}_A = 10$ %	$\sigma_A = 5$ %
B	$\overline{r}_B = 15$ %	$\sigma_B = 12$ %

Nech korelačný koeficient výnosov akcií A, B je $\rho_{AB} = -0,2$. Nájdime množinu všetkých prípustných portfólií tvorených akciami A, B.

Riešenie:
Označme váhu akcie A v portfóliu ako x_A a váhu akcie B v portfóliu ako x_B. Keďže ide o váhy aktív tvoriacich portfólio, tak platí $x_A + x_B = 1$.

Z toho dostávame:

$$x_B = 1 - x_A. \tag{5.13}$$

Pretože $\rho_{AB} = -0,2$, tak $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = (-0,2)60 = -12$.

Zo vzťahov (5.3) a (5.7) pre očakávané výnosové percento a rizikovosť portfólia potom získame:

$$\begin{aligned}
\overline{r}_p &= x_A\overline{r}_A + x_B\overline{r}_B = 10x_A + 15x_B = 10x_A + 15\,(1-x_A) = 15 - 5x_A, && (5.14)\\
\sigma_p &= \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2} = \sqrt{25x_A^2 - 24x_A\,(1-x_A) + 144\,(1-x_A)^2}\\
&= \sqrt{193x_A^2 - 312x_A + 144.} && (5.15)
\end{aligned}$$

Z (5.14) máme:

$$x_A = \frac{15-\overline{r}_p}{5}. \tag{5.16}$$

Dosadením (5.16) za x_A do (5.15) dostaneme:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{193(15-\overline{r}_p)^2}{25} - \frac{312(15-\overline{r}_p)}{5} + 144} = \frac{1}{5}\sqrt{193\overline{r}_p^2 - 4230\overline{r}_p + 23625.}$$

Množina všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z akcií A, B je teda tvorená portfóliami, pre ktorých rizikovosť platí $\sigma_p = \frac{1}{5}\sqrt{193\overline{r}_p^2 - 4230\overline{r}_p + 23625}$ pri výnosnosti portfólia $\overline{r}_p \in \langle 10, 15\rangle$.

Postup z príkladu 5.3 možno zovšeobecniť pre portfólia pozostávajúce z dvoch aktív s všeobecne zadanými výnosnosťami a rizikovosťami.

Označme rovinu s horizontálnou osou, na ktorú vynášame hodnoty rizikovosti portfólia, a vertikálnou osou, na ktorú vynášame hodnoty výnosnosti portfólia, ako $\mathcal{O}_{\sigma r}$.

Uvažujme, že na trhu existujú dve rizikové aktíva α, β s výnosnosťami $\overline{r}_\alpha > 0$, resp. $\overline{r}_\beta > 0$ a rizikovosťami $\sigma_\alpha > 0$, resp. $\sigma_\beta > 0$. Bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že $\overline{r}_\alpha < \overline{r}_\beta$, potom $\sigma_\alpha < \sigma_\beta$ a v dvojrozmernom priestore $\mathcal{O}_{\sigma r}$ možno množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z aktív α, β s váhami $x_\alpha \geq 0$, $x_\beta \geq 0$, kde $x_\alpha + x_\beta = 1$, reprezentovať krivkou pozostávajúcou z bodov $(\sigma_p, \overline{r}_p)$, kde $\sigma_p \in \langle 0, \sigma_\beta\rangle$ je rizikovosť portfólia a $\overline{r}_p \in \langle \overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta\rangle$ je výnosnosť portfólia.

Krivku tiež možno chápať ako graf funkcie $\sigma_p = f(\overline{r}_p)$ definovanej na intervale $\langle \overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta\rangle$, kde $f(\overline{r}_p) = \sqrt{K\overline{r}_p^2 + L\overline{r}_p + M}$, teda f je druhá odmocnina z kvadratickej funkcie premennej $\overline{r}_p$ s koeficientami K, L, M.

Zo vzťahov (5.3) a (5.4) totiž máme:

$$\begin{aligned}
\overline{r}_p &= x_\alpha\overline{r}_\alpha + (1-x_\alpha)\overline{r}_\beta = \overline{r}_\beta + x_\alpha(\overline{r}_\alpha - \overline{r}_\beta),\\
x_\alpha &= \frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\beta}{\overline{r}_\alpha - \overline{r}_\beta} = \frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}, && (5.17)\\
x_\beta &= 1 - x_\alpha = \frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}. && (5.18)
\end{aligned}$$

Dosaďme (5.17) za x_α a (5.18) za x_β do (5.7), dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \sqrt{\left(\frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\right)^2\sigma_\alpha^2 + 2\left(\frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\right)\left(\frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\right)\sigma_{\alpha\beta} + \left(\frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\right)^2\sigma_\beta^2}\\
&= \sqrt{\frac{\overline{r}_\beta^2 - 2\overline{r}_\beta\overline{r}_p + \overline{r}_p^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}\sigma_\alpha^2 + \frac{2\left(\overline{r}_\beta\overline{r}_p + \overline{r}_\alpha\overline{r}_p - \overline{r}_\beta\overline{r}_\alpha - \overline{r}_p^2\right)}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\overline{r}_p^2 - 2\overline{r}_\alpha\overline{r}_p + \overline{r}_\alpha^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}\sigma_\beta^2}\\
&= \sqrt{K\overline{r}_p^2 + L\overline{r}_p + M}, && (5.19)
\end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sigma_\alpha^2 - 2\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_\beta^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}, && (5.20)\\ L &= 2\left(\frac{(\overline{r}_\beta + \overline{r}_\alpha)\sigma_{\alpha\beta} - \overline{r}_\beta\sigma_\alpha^2 - \overline{r}_\alpha\sigma_\beta^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}\right), && (5.21)\\ M &= \frac{\overline{r}_\beta^2\sigma_\alpha^2 - 2\overline{r}_\alpha\overline{r}_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \overline{r}_\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}. && (5.22)\end{aligned}$$

Špeciálne, ak $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha\sigma_\beta$, tzn. výnosy akcií sú perfektne pozitívne korelované, tak:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 + 2x_\alpha x_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta + x_\beta^2\sigma_\beta^2} = \sqrt{(x_\alpha\sigma_\alpha + x_\beta\sigma_\beta)^2} = x_\alpha\sigma_\alpha + x_\beta\sigma_\beta\\ &= \frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\sigma_\alpha + \frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\sigma_\beta = \frac{\overline{r}_\beta\sigma_\alpha - \overline{r}_\alpha\sigma_\beta}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha} + \overline{r}_p\frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}, && (5.23)\end{aligned}$$

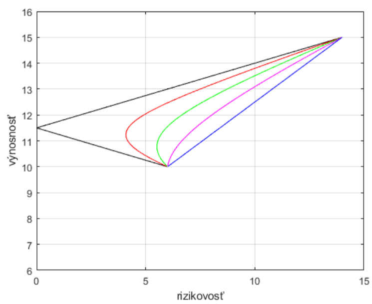
kde $\overline{r}_p \in \langle\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta\rangle$. V tomto prípade je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ množina všetkých prípustných portfólií reprezentovaná úsečkou s koncovými bodmi $(\sigma_\alpha, \overline{r}_\alpha)$, $(\sigma_\beta, \overline{r}_\beta)$.

Ak $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_\alpha\sigma_\beta$, tzn. výnosy akcií sú perfektne negatívne korelované, tak:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 - 2x_\alpha x_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta + x_\beta^2\sigma_\beta^2} = \sqrt{(x_\alpha\sigma_\alpha - x_\beta\sigma_\beta)^2} = |x_\alpha\sigma_\alpha - x_\beta\sigma_\beta|\\ &= \left|\frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\sigma_\alpha - \frac{\overline{r}_p - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\sigma_\beta\right| = \left|\frac{\overline{r}_\beta\sigma_\alpha + \overline{r}_\alpha\sigma_\beta}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha} - \overline{r}_p\frac{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}\right|, && (5.24)\end{aligned}$$

kde $\overline{r}_p \in \langle\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta\rangle$. V tomto prípade je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ množina všetkých prípustných portfólií reprezentovaná dvoma úsečkami, ktoré majú jeden koncový bod spoločný. Jedna z úsečiek má koncové body $(0, \overline{r}_{\text{arb}})$, $(\sigma_\alpha, \overline{r}_\alpha)$ a druhá má koncové body $(0, \overline{r}_{\text{arb}})$, $(\sigma_\beta, \overline{r}_\beta)$. Navyše portfólio s výnosnosťou $\overline{r}_{\text{arb}} = \frac{\overline{r}_\beta\sigma_\alpha + \overline{r}_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha} \in (\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta)$ je arbitrážne portfólio, pretože vhodnou kombináciou váh $x_\alpha = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}$, $x_\beta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}$ aktív α, β v portfóliu možno dosiahnuť kladný výnos pri nulovom riziku.

Na Obr. 5.1 sú znázornené reprezentácie množiny prípustných portfólií pozostávajúcich z dvoch aktív s výnosnosťami 10 % a 15 %, pri rizikovosti 6 % a 14 %, kde korelačný koeficient výnosov aktív je postupne rovný -1, $-0,5$, 0, $0,5$ a 1.



Obr. 5.1: Reprezentácie množiny prípustných portfólií pozostávajúcich z dvoch aktív pre korelačný koeficient postupne rovný: -1 – čierna, $-0,5$ – červená, 0 – zelená, $0,5$ – purpurová, 1 – modrá. [32]

Z Obr. 5.1 vidno, že, ak sa korelačný koeficient rovná -1, možno vytvoriť vhodnou kombináciou (výberom váh) aktív v portfóliu portfólio s nulovou rizikovosťou a kladnou výnosnosťou rovnou v tomto prípade $\frac{\overline{r}_\beta\sigma_\alpha+\overline{r}_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\beta+\sigma_\alpha} = \frac{230}{20}\ \% = 11,5\ \%$. Ak sa korelačný koeficient rovná 1, pre ľubovoľnú kombináciu váh budú všetky prípustné portfólia ležať v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ na úsečke s krajnými bodmi $(6,10)$ a $(14,15)$.

Ak pre dve aktíva tvoriace portfólio predpokladáme, že $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$ pri $\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta$, tak reprezentáciou množiny všetkých prípustných portfólií je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ vodorovná úsečka s krajnými bodmi $(\sigma_{min}, \overline{r}_\alpha)$ a $(\max\{\sigma_\alpha,\sigma_\beta\}, \overline{r}_\alpha)$, kde:

$$\text{ak } \sigma_\alpha < \sigma_\beta \text{ a } \rho_{\alpha\beta} \geq \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}, \text{ tak } \sigma_{min} = \sigma_\alpha \text{ a } \max\{\sigma_\alpha,\sigma_\beta\} = \sigma_\beta;$$
$$\text{ak } \sigma_\beta < \sigma_\alpha \text{ a } \rho_{\alpha\beta} \geq \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}, \text{ tak } \sigma_{min} = \sigma_\beta \text{ a } \max\{\sigma_\alpha,\sigma_\beta\} = \sigma_\alpha;$$
$$\text{ak } \rho_{\alpha\beta} < \min\left\{\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}, \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}\right\}, \text{ tak } \sigma_{min} = \sigma_\alpha\sigma_\beta\sqrt{\frac{1-\rho_{\alpha\beta}^2}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2}} < \min\{\sigma_\alpha,\sigma_\beta\}.$$

Špeciálne, ak $\rho_{\alpha\beta} = -1$, tak $\sigma_{min} = 0$.

Je to preto, lebo každé portfólio tvorené dvoma aktívami s rovnakou výnosnosťou $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$ má výnosnosť $\overline{r}_p = x_\alpha\overline{r}_\alpha + x_\beta\overline{r}_\beta = x_\alpha\overline{r}_\alpha + (1-x_\alpha)\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\alpha$. Rizikovosť takéhoto portfólia dostaneme z

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 + 2x_\alpha x_\beta\sigma_{\alpha\beta} + x_\beta^2\sigma_\beta^2} = \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 + 2x_\alpha(1-x_\alpha)\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + (1-x_\alpha)^2\sigma_\beta^2} \\ &= \sqrt{x_\alpha^2\left(\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2\right) - 2x_\alpha\left(\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\right) + \sigma_\beta^2}. \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Minimum kvadratickej funkcie

$$g(x_\alpha) = x_\alpha^2\left(\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2\right) - 2x_\alpha\left(\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\right) + \sigma_\beta^2$$

sa dosahuje v bode

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2}$$

a jeho hodnota je

$$g(\tilde{x}_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2\left(1-\rho_{\alpha\beta}^2\right)}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} \geq 0.$$

Pre akékoľvek $\rho_{\alpha\beta} \in \langle -1, 1\rangle$ je $g(\tilde{x}_\alpha) < \min\{\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2\}$. Ukážeme, že je to pravda pre $\sigma_\alpha < \sigma_\beta$ (analogicky sa tvrdenie ukáže pre $\sigma_\beta < \sigma_\alpha$):

$$\begin{aligned}0 &\leq (\sigma_\alpha - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\beta)^2 \\ -\rho_{\alpha\beta}^2\sigma_\beta^2 &\leq \sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\ \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}^2\sigma_\beta^2 &\leq \sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2 \\ \frac{\sigma_\beta^2\left(1-\rho_{\alpha\beta}^2\right)}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} &\leq 1 \\ \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2\left(1-\rho_{\alpha\beta}^2\right)}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} &\leq \sigma_\alpha^2.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $0 \leq \sigma_{min} \leq \min\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\}$. Avšak nie pre všetky hodnoty $\rho_{\alpha\beta} \in \langle -1, 1\rangle$ leží $\tilde{x}_\alpha$ v intervale $\langle 0, 1\rangle$.

Ak $\sigma_\alpha < \sigma_\beta$ a $\rho_{\alpha\beta} < \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} < 1 < \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}$, tak:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &< \sigma_\alpha\sigma_\beta\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} = \sigma_\alpha^2 \\
0 = \sigma_\beta\left(\sigma_\beta - \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}\sigma_\alpha\right) < \sigma_\beta\left(\sigma_\beta - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\right) = \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &< \sigma_\beta^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha^2 \\
0 < \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} &< 1
\end{aligned}$$

Ak $\sigma_\beta < \sigma_\alpha$ a $\rho_{\alpha\beta} < \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} < 1 < \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$, tak:

$$\begin{aligned}
-\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &> -\sigma_\alpha\sigma_\beta\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \\
\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2 > \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha^2 - \sigma_\alpha\sigma_\beta\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} = \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &> 0 \\
1 > \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} &> 0
\end{aligned}$$

Ak teda $-1 \leq \rho_{\alpha\beta} < \min\left\{\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}, \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}\right\}$, minimum funkcie $g(x_\alpha)$ sa dosahuje vnútri intervalu $(0, 1)$ a jeho hodnota je menšia než menšia z hodnôt σ_α^2, σ_β^2.

Ak $\sigma_\alpha < \sigma_\beta$ a $\rho_{\alpha\beta} \geq \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$, tak:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &\geq \sigma_\alpha^2 \\
\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &\geq \sigma_\beta^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha^2 \\
\tilde{x}_\alpha = \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\beta^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha^2} &\geq 1
\end{aligned}$$

a funkcia $g(x_\alpha)$ je na intervale $\langle 0, 1\rangle$ klesajúca. Z toho vyplýva, že má minimum v bode $x_\alpha = 1$ s hodnotou rovnou σ_α^2.

Ak $\sigma_\beta < \sigma_\alpha$ a $1 \geq \rho_{\alpha\beta} \geq \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}$, tak:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta &\geq \sigma_\beta^2 \\
0 &\geq \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\
\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2 \geq (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 > 0 &\geq \sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\
0 &\geq \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\beta^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha^2} = \tilde{x}_\alpha
\end{aligned}$$

a funkcia $g(x_\alpha)$ je na intervale $\langle 0, 1\rangle$ rastúca. Z toho vyplýva, že má minimum v bode $x_\alpha = 0$ s hodnotou rovnou σ_β^2.

Ak $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$ a súčasne $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, tak reprezentáciou množiny všetkých prípustných portfólií je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ vodorovná úsečka s krajnými bodmi $(\sigma_\alpha, \overline{r}_\alpha)$ a $\left(\sigma_\alpha\sqrt{\frac{1+\rho_{\alpha\beta}}{2}}, \overline{r}_\alpha\right)$.

Je to preto, lebo každé portfólio tvorené dvoma aktívami s rovnakou výnosnosťou má rovnakú výnosnosť ako aktíva, z ktorých pozostáva. Rizikovosť portfólia dostaneme z

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 + 2x_\alpha x_\beta \sigma_{\alpha\beta} + x_\beta^2\sigma_\beta^2} = \sqrt{x_\alpha^2\sigma_\alpha^2 + 2x_\alpha x_\beta \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha^2 + x_\beta^2\sigma_\alpha^2} \\ &= \sigma_\alpha\sqrt{x_\alpha^2 + 2x_\alpha x_\beta\rho_{\alpha\beta} + x_\beta^2} = \sigma_\alpha\sqrt{(x_\alpha + x_\beta)^2 + 2x_\alpha x_\beta(\rho_{\alpha\beta} - 1)} \\ &= \sigma_\alpha\sqrt{1 + 2x_\alpha(1 - x_\alpha)(\rho_{\alpha\beta} - 1)} = \sigma_\alpha\sqrt{1 + 2(\rho_{\alpha\beta} - 1)(x_\alpha - x_\alpha^2)}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Minimum kvadratickej funkcie

$$h(x_\alpha) = 2x_\alpha^2(1 - \rho_{\alpha\beta}) - 2x_\alpha(1 - \rho_{\alpha\beta}) + 1$$

sa pre $\rho_{\alpha\beta} \neq 1$ dosahuje v bode

$$\hat{x}_\alpha = \frac{1}{2}$$

a jeho hodnota je

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \rho_{\alpha\beta}}{2}.$$

Pre $\rho_{\alpha\beta} = 1$ bude σ_p v (5.26) rovné σ_α a teda množina prípustných portfólií bude pozostávať z jediného bodu $(\sigma_\alpha, \overline{r}_\alpha)$.

Uvedené (hoci sme to riešili ako osobitný prípad) je len špeciálnym prípadom predchádzajúcej analýzy s $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$ aj $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$. Minimum kvadratickej funkcie $g(x_\alpha)$ je totiž pre $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ rovné

$$g(\tilde{x}_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2\left(1 - \rho_{\alpha\beta}^2\right)}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} = \frac{\sigma_\alpha^4\left(1 - \rho_{\alpha\beta}^2\right)}{2\sigma_\alpha^2(1 - \rho_{\alpha\beta})} = \sigma_\alpha^2\left(\frac{1 + \rho_{\alpha\beta}}{2}\right),$$

kde

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{\sigma_\beta^2 - \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2} = \frac{\sigma_\alpha^2(1 - \rho_{\alpha\beta})}{2\sigma_\alpha^2(1 - \rho_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2}$$

s tým, že ak $\rho_{\alpha\beta} = 1$, tak minimálna hodnota je σ_α^2.

Poznámka 5.2. *Poznamenajme, že v teórii portfólia sa zvyčajne predpokladá, že existuje aspoň jedna dvojica aktív s navzájom rôznymi výnosnosťami, t. j. existuje dvojica rôznych aktív i, j taká, že $\overline{r}_i \neq \overline{r}_j$. To znamená, že ak sú na trhu iba dve rizikové aktíva, tak by sme mali predpokladať, že majú rôzne výnosnosti. Do analýzy urobenej pre dvojicu aktív sme však pre jej úplnosť zahrnuli aj možnosť rovnosti výnosností aktív.*

Rovnako tak sa zvykne predpokladať, že kovariančná matica Q je regulárna, čiže pri portfóliu dvoch aktív sa vylučuje perfektná pozitívna i negatívna korelácia výnosností aktív. Pretože sme chceli upozorniť na vznik arbitráže pri perfektnej negatívnej korelácii, zahrnuli sme do predchádzajúcich úvah i tieto možnosti.

Poznámka 5.3. *V súvislosti s arbitrážou dvojice aktív treba poznamenať, že ak pripustíme, že výnosy aktív sú diskrétne náhodné premenné, tak závery o perfektne negatívne korelovaných aktívach urobené na predchádzajúcich stránkach by mali plne súhlasiť so závermi urobenými* *v kapitole o dvojici perfektne negatívne korelovaných akcií bez dividend oceňovaných pravdepodobnostným modelom oceňovania na jednoduchom binárnom strome. Ukážeme, že súhlasia.*

Uvažujme dvojicu akcií bez dividend α, β takých, že:

$$\begin{array}{lcccccc}
H: & & & uS & & & gW \quad s\ pp.\ p \\
 & & \nearrow & & & \nearrow & \\
\alpha: & S & & & \beta: \ W & & \\
 & & \searrow & & & \searrow & \\
D: & & & dS & & & hW \quad s\ pp.\ 1-p
\end{array}$$

kde $u > 1 > d > 0$ a súčasne $0 < g < 1 < h$ alebo $0 < u < 1 < d$ a súčasne $g > 1 > h > 0$, t. j. ceny akcií sú perfektne negatívne korelované.

Nech $r_{\alpha H}$ označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie α pri udalosti H a $r_{\alpha D}$ označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie α pri udalosti D. Podobne nech $r_{\beta H}$ označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie β pri udalosti H a $r_{\beta D}$ označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie β pri udalosti D. Potom:

$$r_{\alpha H} = \frac{uS - S}{S} = u - 1, \tag{5.27}$$

$$r_{\alpha D} = \frac{dS - S}{S} = d - 1, \tag{5.28}$$

$$r_{\beta H} = \frac{gW - W}{W} = g - 1, \tag{5.29}$$

$$r_{\beta D} = \frac{hW - W}{W} = h - 1 \tag{5.30}$$

a očakávané výnosy (výnosové sadzby) pre jednotlivé akcie budú:

$$\overline{r}_{\alpha} = p(u-1) + (1-p)(d-1), \tag{5.31}$$

$$\overline{r}_{\beta} = p(g-1) + (1-p)(h-1). \tag{5.32}$$

Na naplnenie predpokladov modelu uvažujme, že $\overline{r}_{\alpha} > 0$ a súčasne $\overline{r}_{\beta} > 0$.

Smerodajné odchýlky sú nasledujúce:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha} &= \sqrt{p\left((1-p)(u-d)\right)^2 + (1-p)\left((-p)(u-d)\right)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)^2(u-d)^2 + (1-p)p^2(u-d)^2} = \sqrt{p(1-p)(u-d)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)}\,|u-d|, && (5.33) \\
\sigma_{\beta} &= \sqrt{p\left((1-p)(g-h)\right)^2 + (1-p)\left((-p)(g-h)\right)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)^2(g-h)^2 + (1-p)p^2(g-h)^2} = \sqrt{p(1-p)(g-h)^2} \\
&= \sqrt{p(1-p)}\,|g-h|. && (5.34)
\end{aligned}$$

Kovariancia výnosov je:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= p\left((1-p)(u-d)\right)\left((1-p)(g-h)\right) + (1-p)\left((-p)(u-d)\right)\left((-p)(g-h)\right) \\
&= p(1-p)^2(u-d)(g-h) + (1-p)p^2(u-d)(g-h) \\
&= p(1-p)(u-d)(g-h). && (5.35)
\end{aligned}$$

Rovnako ako pri cenách akcií i korelačný koeficient výnosov sa bude rovnať -1, pretože:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{p(1-p)(u-d)(g-h)}{p(1-p)\,|u-d|\,|g-h|} = \frac{(u-d)(g-h)}{|u-d|\,|g-h|}. \tag{5.36}$$

Zatiaľ sme teda ukázali, že akcie sú perfektne negatívne korelované, či už ide o ceny alebo výnosy.

Nech m p. j. je počiatočné imanie investora, ktoré je ochotný/schopný investovať do nákupu akcií. Nech tak ako v predošlom x označuje proporciu z m, ktorá je investovaná do nákupu akcií α a y označuje proporciu z m p.j investovanú do nákupu akcií β. Potom $x + y = m$, $x_\alpha = \frac{x}{m}$ je váha aktíva α a $x_\beta = \frac{y}{m}$ je váha aktíva β v portfóliu akcií α, β. Platí $x_\alpha + x_\beta = 1$.

Stratégia eliminácie rizika určuje pomer váh, v ktorom budú akcie do portfólia nakupované v čase 0. Postupným výpočtom získame:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{uS}{S}\right)x + \left(\frac{gW}{W}\right)y - m &= \left(\frac{dS}{S}\right)x + \left(\frac{hW}{W}\right)y - m \\
ux + gy - x - y &= dx + hy - x - y \\
(u-1)x_\alpha + (g-1)x_\beta &= (d-1)x_\alpha + (h-1)x_\beta \\
(u-d)x_\alpha &= (h-g)x_\beta \\
x_\alpha &= \left(\frac{h-g}{u-d}\right)x_\beta
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Inými slovami akcie sú do portfólia nakupované v rovnakom pomere ako určuje vzťah (4.107) *pre x a y. Pretože $x_\alpha + x_\beta = 1$, tak z* (5.37) *ďalej získame:*

$$x_\alpha = \frac{h-g}{u-d+h-g}, \tag{5.38}$$

$$x_\beta = \frac{u-d}{u-d+h-g}. \tag{5.39}$$

Ak $u > d$ a $g < h$, potom z (5.38) *a* (5.39) *dostaneme:*

$$\begin{aligned}
x_\alpha &= \frac{|g-h|}{|u-d|+|g-h|} = \frac{\sqrt{p(1-p)}|g-h|}{\sqrt{p(1-p)}\,(|u-d|+|g-h|)} = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}, \\
x_\beta &= \frac{|u-d|}{|u-d|+|g-h|} = \frac{\sqrt{p(1-p)}|u-d|}{\sqrt{p(1-p)}\,(|u-d|+|g-h|)} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}.
\end{aligned}$$

Ak $u < d$ a $g > h$, potom z (5.38) *a* (5.39) *máme:*

$$\begin{aligned}
x_\alpha &= \frac{-|g-h|}{-|u-d|-|g-h|} = \frac{\sqrt{p(1-p)}|g-h|}{\sqrt{p(1-p)}\,(|u-d|+|g-h|)} = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}, \\
x_\beta &= \frac{-|u-d|}{-|u-d|-|g-h|} = \frac{\sqrt{p(1-p)}|u-d|}{\sqrt{p(1-p)}\,(|u-d|+|g-h|)} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}.
\end{aligned}$$

V oboch prípadoch teda platí:

$$x_\alpha = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}, \tag{5.40}$$

$$x_\beta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}, \tag{5.41}$$

čo sú presne tie isté váhy, ktoré minimalizujú hodnotu rizikovosti portfólia do nuly v (5.24), *resp. v* (5.25), *resp. v* (5.26).

Pre takto navolené váhy nezávisí výnosnosť portfólia $\overline{r}_p$ *od pravdepodobnosti* p *a vzhľadom k predpokladom* $\overline{r}_\alpha > 0$, $\overline{r}_\beta > 0$ *je kladná:*

$$\begin{aligned}
\overline{r}_p &= x_\alpha \overline{r}_\alpha + x_\beta \overline{r}_\beta = \frac{\overline{r}_\alpha \sigma_\beta + \overline{r}_\beta \sigma_\alpha}{\sigma_\alpha + \sigma_\beta} \\
&= \frac{(p(u-1)+(1-p)(d-1))\,|g-h| + (p(g-1)+(1-p)(h-1))\,|u-d|}{|u-d|+|g-h|} \\
&= \frac{(p(u-1)+(1-p)(d-1))\,(h-g) + (p(g-1)+(1-p)(h-1))\,(u-d)}{(u-d)+(h-g)} \\
&= \frac{(p(u-d)+d-1)\,(h-g) + (p(g-h)+h-1)\,(u-d)}{(u-d)+(h-g)} \\
&= \frac{p(u-d)(h-g)+(d-1)(h-g)+p(g-h)(u-d)+(h-1)(u-d)}{(u-d)+(h-g)} \\
&= \frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{(u-d)+(h-g)}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Navyše dostávame, že výnosnosť portfólia je práve taká, akú sme zistili v (4.108).

Je teda jedno, či budeme váhy dvojice bezdividendových akcií v portfóliu určovať eliminovaním rizika porovnaním výnosov pre jednotlivé udalosti na ne vplývajúce alebo minimalizáciou rizikovosti portfólia do nuly. Obe cesty povedú k nájdeniu arbitrážneho portfólia.

Arbitráž zaniká v tom prípade, ak pri nulovej rizikovosti je výnosnosť portfólia tiež nulová. To je však možné pre váhy eliminujúce riziko vyplývajúce z náhodnosti v pohybe ceny aktív dosiahnuť iba vtedy, keď niektorá z výnosností dvojice akcií α, β *je záporná (a druhá kladná) alebo triviálne obe výnosnosti sú nulové.*

Ak je jedna z výnosností kladná a druhá záporná, tak výnosnosť portfólia $\overline{r}_p$ *je nulová vtedy a len vtedy, keď*

$$0 = \frac{\overline{r}_\alpha \sigma_\beta + \overline{r}_\beta \sigma_\alpha}{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}.$$

Čiže práve vtedy, keď

$$\frac{\overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta} = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}. \tag{5.43}$$

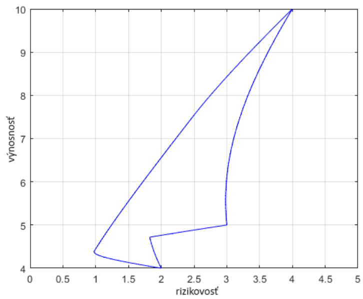
Dosadením (5.31), (5.32), (5.33), (5.34) *do* (5.43) *dostaneme:*

$$\begin{aligned}
\frac{p(u-1)+(1-p)(d-1)}{p(g-1)+(1-p)(h-1)} &= -\frac{\sqrt{p(1-p)}|u-d|}{\sqrt{p(1-p)}|g-h|} \\
\frac{p(u-d)+d-1}{p(g-h)+h-1} &= -\frac{u-d}{h-g} \\
(p(u-d)+d-1)\,(h-g) + (p(g-h)+h-1)\,(u-d) &= 0 \\
uh-dg-(u-d)-(h-g) &= 0
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Uvedené možno získať aj priamo z rovnosti $\overline{r}_p = 0$ *v* (5.42).

Vidíme, že zistenia z (5.44) *plne súhlasia so závermi z tvrdenia 4.5 a arbitráž zaniká pre také hodnoty* u, d, g, h, *ktoré spĺňajú vzťah v* (5.44), *resp.* (4.106).

Pre tri a viac aktív v portfóliu nie je množina prípustných portfólií (až na výnimočné prípady) v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ reprezentovaná krivkou, ale množinou s vnútrom v dvojrozmernom priestore ohraničenou krivkami.



Obr. 5.2: Reprezentácia množiny prípustných portfólií pozostávajúcich z troch aktív s regulárnou kovariačnou maticou. [32] [33]

Na Obr. 5.2 vidíme krivky ohraničujúce množinu prípustných portfólií (podobnú *žraločej plutve*) pozostávajúcich z troch aktív α, β, γ s výnosnosťami $\overline{r}_\alpha = 4$ %, $\overline{r}_\beta = 5$ %, $\overline{r}_\gamma = 10$ % a s regulárnou kovariančnou maticou:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

5.4 Efektívna množina portfólií

5.4.1 Vzťah investorov k riziku

Investori sú rôzni, ale maloktorého v súvislosti s jeho investíciou zaujíma celá množina prípustných portfólií. Uprednostňovať budú určite tie, ktoré pri rovnakom riziku prinášajú vyššiu výnosnosť. To platí pre všetkých investorov.

Na druhej strane nie každý investor uprednostní pri rovnakej výnosnosti menšiu rizikovosť. Investori, ktorí si vyberú pri rovnakej výnosnosti portfólio s nižšou rizikovosťou, sa nazývajú **riziko averzní**. Majú k riziku odpor.

Investori, ktorí naopak uprednostnia pri rovnakej výnosnosti vyššiu rizikovosť, sa nazývajú **riziko milujúci** alebo **riziko obľubujúci**. Riziko obľubujúci investor rád riskuje predpokladajúc, že skutočne vysoké výnosy dokážu priniesť iba veľmi rizikové aktíva. Prípadnú vysokú stratu, ktorá pri takýchto aktívach môže vzniknúť, títo investori nevnímajú. Zaujíma ich iba vidina vysokého zisku.

Rizikovo neutrálny investor nemá k riziku žiadny postoj, nezaujíma ho σ_p portfólia. Vníma iba výnosnosť.

Vysvetliť rozdiely medzi investormi môžeme na nasledujúcom jednoduchom príklade.

Zahrajme sa nasledujúcu hru G. Hodíme raz mincou. Keď padne hlava, vyhráme 50 p. j. Keď padne znak, prehráme 50 p. j.

Očakávaná výplata z takejto hry je nulová, pretože $(50 \text{ p. j.})\frac{1}{2} + (-50 \text{ p. j.})\frac{1}{2} = 0$ p. j. Ak túto hru nebudeme hrať, máme rovnako 0 p. j.

Investor s odporom k riziku si radšej zvolí nič nerobenie pred hraním tejto hry, pretože padnutím znaku hrozí strata 50 p. j. Variancia výplat z hry G je $\sigma^2(G) = 2500\frac{1}{2} + 2500\frac{1}{2} = 2500$ a teda smerodajná odchýlka $\sigma(G) = 50$ p. j., kým pri nič nerobení je smerodajná odchýlka 0 p. j. Zárobok 0 p. j. je pri nič nerobení bezrizikový.

Obe možnosti prinášajú rovnaký výnos, ale hrať hru s mincou je rizikovejšie. Investor milujúci riziko však uprednostní hrať hru, pretože vidí možný kladný výnos a nedbá príliš na možnú stratu.

Rizikovo neutrálny investor je medzi hraním a nehraním tejto hry indiferentný, pretože obe hry prinášajú rovnaký očakávaný výnos.

5.4.2 Efektívna množina portfólií rizikových aktív

Model predpokladá iba riziko averzných investorov. Títo investori si z množiny všetkých prípustných portfólií vyberajú tie, ktoré pri danom riziku poskytujú najvyššiu výnosnosť a pri rozličných úrovniach výnosnosti ponúkajú najnižšiu rizikovosť. Podmnožina množiny všetkých prípustných portfólií, portfólia z ktorej spĺňajú tieto podmienky, sa nazýva **efektívna množina**.

Úloha, ktorú Markowitz riešil, bolo nájsť efektívnu množinu a z nej vybrať optimálne portfólio na základe preferencií toho ktorého investora, kde všetci investori sú riziko averzní a predpokladá sa, že kovariačná matica Q je regulárna, tzn. kladne definitná.

Úlohu nájdenia efektívnej množiny na množine všetkých prípustných riešení možno redukovať na úlohu nájdenia množiny portfólií, ktoré pre danú výnosnosť poskytujú minimálnu rizikovosť a potom z takto získanej množiny vybrať tie portfólia, ktoré majú pri danom riziku najvyššiu výnosnosť.

Predpokladajme, že $\hat{r}_p \in \langle \overline{r}_{min}, \overline{r}_{max} \rangle$, kde $\overline{r}_{min}$, resp. $\overline{r}_{max}$ je minimálny, resp. maximálny z prvkov vektora $\vec{r}$ v N zložkovom portfóliu, je fixná hodnota výnosnosti portfólia. Pre túto hodnotu nájdime minimálnu rizikovosť portfólia pri kladne definitnej kovariančnej matici Q, teda:

$$\begin{array}{ll} \min_{\vec{x} \geq \vec{0}} & \sqrt{\vec{x}^T Q \vec{x}} \\ & \\ \text{za podmienok:} & \vec{x}^T \vec{r} = \hat{r}_p, \\ & \vec{x}^T \vec{1} = 1. \end{array}$$

Úloha nájsť všetky portfóliá poskytujúce pre danú výnosnosť minimálnu rizikovosť je ekvivalentná s úlohou minimalizácie druhej mocniny rizika pri danej výnosnosti portfólia. Ide o úlohu kvadratického programovania *(U)*:

$$\begin{array}{ll} \min_{\vec{x} \geq \vec{0}} & \vec{x}^T Q \vec{x} \\ & \\ \text{za podmienok:} & \vec{x}^T \vec{r} = \hat{r}_p, \\ & \vec{x}^T \vec{1} = 1. \end{array}$$

Na nájdenie riešenia úlohy *(U)* možno použiť Wolfeovu simplexovú metódu pre kvadratické programovanie [25]. Výhodou je, že touto metódou možno úlohu kvadratického programovania previesť na sériu dvoch úloh lineárneho programovania a riešiť jednoducho simplexovou metódou. Ide o numerické, programovateľné hľadanie riešenia.

Akokoľvek jednoduchá je simplexová metóda, vzhľadom nato, že ide o hľadanie minima konvexnej funkcie na konvexnej množine, je často efektívnejšie zapojiť do hľadania optimálneho riešenia modernejšie metódy, medzi ktoré patria napr. metódy vnútorného bodu. Z praktického hľadiska je samozrejme najjednoduchšie využiť dostupné optimalizačné softvérové nástroje, v ktorých sú tieto metódy implementované.

V mnohých úlohách (hlavne pri menšom počte aktív) býva jednoduchšie riešiť úlohu *(U)* bez podmienky $\vec{x} \geq \vec{0}$ ako úlohu na viazaný extrém a dodatočne overiť, či vypočítaný vektor váh, v ktorom sa dosiahne extrém, spĺňa $\vec{x} \geq \vec{0}$.

Navyše, ak predpokladáme, že $\vec{x}$ možno vyberať z priestoru $\mathbb{R}^N$ ľubovoľne tak, aby bolo splnené $\vec{x}^T\vec{1} = 1$, aktíva možno v čase 0 nielen kupovať, ale ich aj predávať. Každé aktívum i, pre ktoré $x_i < 0$, investor v čase 0 predáva. Vypustením obmedzenia $\vec{x} \geq \vec{0}$ teda dosiahneme isté zovšeobecnenie oproti pôvodnému modelu. Podmienka $\vec{x}^T\vec{1} = 1$ v tomto prípade znamená, že pri tvorbe portfólia v čase 0 je aj napriek možnosti akcie predávať potrebné, aby investor disponoval nejakým počiatočným kapitálom, keďže náklady na kúpu akcií do portfólia prevyšujú príjmy z predaja.

Riešme úlohu *(U)* pre $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ako úlohu na viazaný extrém. Napíšme Lagrangeovu funkciu pre túto úlohu:

$$L(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{x}^T Q \vec{x} + \lambda_1(\hat{r}_p - \vec{x}^T\vec{r}) + \lambda_2(1 - \vec{x}^T\vec{1}), \tag{5.45}$$

kde $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú Lagrangeove multiplikátory.

Nutné podmienky na nájdenie extrému sú:

$$2Q\vec{x} - \lambda_1\vec{r} - \lambda_2\vec{1} = \vec{0}, \tag{5.46}$$

$$\vec{x}^T\vec{r} = \hat{r}_p, \tag{5.47}$$

$$\vec{x}^T\vec{1} = 1. \tag{5.48}$$

Z rovnosti (5.46) po prenásobení Q^{-1} a ďalšej úprave dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\Big(\lambda_1 Q^{-1}\vec{r} + \lambda_2 Q^{-1}\vec{1}\Big). \tag{5.49}$$

Dosadením (5.49) do (5.47) a (5.48) získame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{r}^T Q^{-1}\vec{r} + \lambda_2\vec{1}^T Q^{-1}\vec{r} &= 2\hat{r}_p, \\ \lambda_1\vec{r}^T Q^{-1}\vec{1} + \lambda_2\vec{1}^T Q^{-1}\vec{1} &= 2. \end{aligned}$$

Označme $u = \vec{r}^T Q^{-1}\vec{r}$, $v = \vec{r}^T Q^{-1}\vec{1}$, $w = \vec{1}^T Q^{-1}\vec{1}$, potom môžeme sústavu prepísať ako:

$$\begin{aligned} u\lambda_1 + v\lambda_2 &= 2\hat{r}_p, \\ v\lambda_1 + w\lambda_2 &= 2, \end{aligned}$$

kde neznáme sú λ_1, λ_2.

Riešením sústavy sú:

$$\lambda_1 = \frac{2(w\hat{r}_p - v)}{uw - v^2}, \tag{5.50}$$

$$\lambda_2 = \frac{2(u - v\hat{r}_p)}{uw - v^2}. \tag{5.51}$$

Dosadením (5.50), (5.51) späť do (5.49) dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{(w\hat{r}_p - v)}{uw - v^2} Q^{-1}\vec{r} + \frac{(u - v\hat{r}_p)}{uw - v^2} Q^{-1}\vec{1}. \tag{5.52}$$

Skutočnosť, že vo vypočítanom $\vec{x}$ účelová funkcia naozaj dosahuje svoje minimum, ktoré je navyše globálnym minimom, zabezpečuje požiadavka kladnej definitnosti matice Q.

Minimálna hodnota účelovej funkcie bude:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{w}{uw - v^2}\right)\hat{r}_p^2 - \left(\frac{2v}{uw - v^2}\right)\hat{r}_p + \left(\frac{u}{uw - v^2}\right). \tag{5.53}$$

Pre dané $\hat{r}_p$ bude minimálna hodnota rizikovosti portfólia:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{w}{uw - v^2}\right)\hat{r}_p^2 - \left(\frac{2v}{uw - v^2}\right)\hat{r}_p + \left(\frac{u}{uw - v^2}\right)}. \tag{5.54}$$

Situácia, v ktorej $v^2 = uw$, nastane práve vtedy, keď všetky aktíva v portfóliu majú rovnakú výnosnosť $\hat{r}_p$, t. j. $\overline{r}_1 = \overline{r}_2 = \ldots = \overline{r}_N = \hat{r}_p$. Za tohto predpokladu možno zredukovať podmienky z formulácie úlohy *(U)* na jedinú: $\vec{x}^T\vec{1} = 1$.

Riešiac potom úlohu *(U)* pre $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ s jednou väzbou $\vec{x}^T\vec{1} = 1$ prídeme k nasledujúcemu optimálnemu vektoru váh

$$\vec{x} = \frac{Q^{-1}\vec{1}}{\vec{1}Q^{-1}\vec{1}}.$$

Minimálna hodnota účelovej funkcie potom bude

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{\vec{1}Q^{-1}\vec{1}} = \frac{1}{w}.$$

V tomto prípade riziko optimálneho portfólia nadobúda konštantnú hodnotu a vôbec nezávisí od výnosnosti $\hat{r}_p$ zložiek portfólia. Je determinované iba vzájomnou koreláciou aktív vyjadrenou v kovariančnej matici.

Poznámka 5.4. *Pre prípad s dvoma aktívami α, β na trhu predstavuje* (5.54) *vzťah* (5.19) *s vypočítanými K, L, M v* (5.20), (5.21), *resp.* (5.22). *Je to skutočne tak.*

Ak $\overline{r}_\alpha$, $\overline{r}_\beta$ sú navzájom rôzne výnosnosti aktív α, β a kovariančná matica

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{pmatrix}$$

je kladne definitná, tak existuje inverzná matica k matici Q:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}\begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & -\sigma_{\alpha\beta} \\ -\sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix},$$

pričom hodnoty u, v, w sú takéto:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}(\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta)\begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & -\sigma_{\alpha\beta} \\ -\sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{r}_\alpha \\ \overline{r}_\beta \end{pmatrix} = \frac{\overline{r}_\alpha^2\sigma_\beta^2 - 2\overline{r}_\alpha\overline{r}_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \overline{r}_\beta^2\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}, \\
v &= \frac{1}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}(\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta)\begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & -\sigma_{\alpha\beta} \\ -\sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\overline{r}_\alpha\sigma_\beta^2 - (\overline{r}_\alpha + \overline{r}_\beta)\sigma_{\alpha\beta} + \overline{r}_\beta\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}, \\
w &= \frac{1}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}(1, 1)\begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & -\sigma_{\alpha\beta} \\ -\sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_\beta^2 - 2\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}.
\end{aligned}$$

Z toho máme:

$$uw - v^2 = \frac{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}$$

a preto:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{w}{uw - v^2} = \frac{\sigma_\beta^2 - 2\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_\alpha^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}, \\
L &= \frac{-2v}{uw - v^2} = 2\left(\frac{(\overline{r}_\alpha + \overline{r}_\beta)\sigma_{\alpha\beta} - \overline{r}_\alpha\sigma_\beta^2 - \overline{r}_\beta\sigma_\alpha^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}\right), \\
M &= \frac{u}{uw - v^2} = \frac{\overline{r}_\alpha^2\sigma_\beta^2 - 2\overline{r}_\alpha\overline{r}_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \overline{r}_\beta^2\sigma_\alpha^2}{(\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

Podobne ak $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$, tak minimálna hodnota rizikovosti, ktorú môže investor v portfóliu z dvoch aktív dosiahnuť, je určená ako

$$\frac{1}{w} = \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 - \sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma_\beta^2 - 2\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_\alpha^2},$$

čo je hodnota minima funkcie $g(x_\alpha)$ uvádzanej vyššie, teda hodnota

$$g(\tilde{x}_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2\left(1 - \rho_{\alpha\beta}^2\right)}{\sigma_\alpha^2 - 2\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2},$$

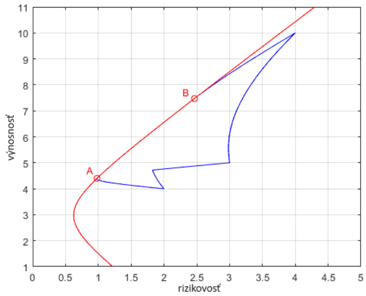
ak $\tilde{x}_\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Na množine bodov roviny $\mathcal{O}_{\sigma r}$ určenej krivkou (5.54) môžu ležať mnohé prípustné portfóliá tvoriace efektívnu množinu, ale nemusia na nej ležať všetky takéto portfóliá (pozri Obr. 5.3). Môže sa dokonca stať, že na nej nebudú ležať žiadne prípustné portfóliá, pretože aspoň jedna z váh aktív v portfóliu bude pre každé $\hat{r}_p \in \langle \overline{r}_{min}, \overline{r}_{max}\rangle$ záporné číslo.

V takom prípade určiť efektívnu množinu reprezentovanú v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ bodmi s charakteristikami portfólií σ a r vyžaduje okrem prípadnej identifikácie krivky reprezentujúcej vzťah

(5.54) nájdenie bodov prípustných portfólií, ktoré síce neležia na krivke, ale poskytujú pri danej výnosnosti minimálnu rizikovosť a potom zo všetkých týchto bodov vybrať tie, ktoré majú pre danú rizikovosť najvyššiu výnosnosť.

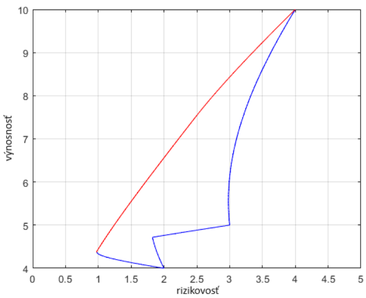
V prípade vypustenia podmienky, aby váhy aktív v portfóliu boli nezáporné čísla, je efektívna množina jednoznačne určená krivkou reprezentujúcou vzťah (5.54) a v tomto prípade nie je ani potrebné držať sa obmedzenia $\hat{r}_p \in \langle \overline{r}_{min}, \overline{r}_{max} \rangle$.



Obr. 5.3: Krivka reprezentujúca vzťah (5.54) (červenou), opúšťajúca efektívnu množinu v dotykových bodoch A, B. [32] [33]

Na Obr. 5.3 krivka reprezentujúca funkciu vo vzťahu (5.54) opúšťa efektívnu množinu portfólií pozostávajúcich z troch aktív s charakteristikami opísanými vyššie v bodoch A, resp. B. V bode A sa tak deje preto, lebo váha aktíva γ – x_γ prechádza cez nulovú hodnotu (v bode A) do záporných hodnôt, kým v bode B je to tak preto, lebo do záporných hodnôt prechádza váha aktíva β – x_β. Záporná hodnota niektorej z váh je vzhľadom na pôvodnú formuláciu úlohy neprípustná, čo znamená, že iba časť efektívnej množiny možno opísať pomocou vzťahu (5.54).

Na druhej strane, ako uvidíme neskôr, je možné sa obmedziť na tú časť efektívnej množiny, ktorú možno opísať krivkou zo vzťahu (5.54) pre vhodné $\overline{r}_p$, pretože práve z tejto časti budú investori vyberať svoje optimálne portfólio. Vhodné $\overline{r}_p$ v tomto kontexte znamená, že každé aktívum na trhu bude zastúpené na skladbe portfólia kladnou váhou.



Obr. 5.4: Reprezentácia efektívnej množiny (červená krivka) na množine všetkých prípustných portfólií. [32] [33]

Nájsť efektívnu množinu pre malý počet aktív na trhu sa však dá aj výpočtom „na kolene“ využívajúc pritom vzťah (5.53), resp. (5.54). Na Obr. 5.4 môžeme vidieť reprezentáciu efektívnej množiny na množine všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z troch aktív α, β, γ s charakteristikami opísanými vyššie.

Pre dve aktíva na trhu je určenie reprezentácie efektívnej množiny krivkou v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ najjednoduchšie, pretože z predchádzajúceho vyplýva, že ak výnosnosti aktív $\overline{r}_\alpha < \overline{r}_\beta$, tak všetky prípustné portfóliá ležia na krivke (5.19) pre $\overline{r}_p \in \langle \overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta \rangle$. Portfóliá z efektívnej množiny budú zrejme ležať na tej časti krivky (5.19), na ktorej $\overline{r}_p \in \langle \overline{r}_{min}, \overline{r}_\beta \rangle$. Hodnota $\overline{r}_{min}$ závisí od korelačného koeficientu $\rho_{\alpha\beta}$.

Ak $\overline{r}_\alpha < \overline{r}_\beta$, tak $\sigma_\alpha < \sigma_\beta$ a funkcia v (5.19) dosahuje minimum v bode $\overline{r}_\alpha$ alebo v bode

$$\tilde{r}_p = \frac{v}{w} = \frac{\left(\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta\right)\overline{r}_\alpha + \left(\sigma_\alpha^2 - \sigma\alpha\beta\right)\overline{r}_\beta}{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta + \sigma_\alpha^2} = \left(\frac{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta}{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta + \sigma_\alpha^2}\right)\overline{r}_\alpha + \left(\frac{\sigma_\alpha^2 - \sigma\alpha\beta}{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta + \sigma_\alpha^2}\right)\overline{r}_\beta,$$

ktorý je stacionárnym bodom kvadratickej funkcie ležiacej pod odmocninou v (5.19).

V predchádzajúcom sme označovali

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta}{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta + \sigma_\alpha^2}.$$

Táto hodnota reprezentovala váhu aktíva α v portfóliu s minimálnou rizikovosťou, ak pravda $\tilde{x}_\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Z toho vyplýva, že

$$\tilde{x}_\beta = \frac{\sigma_\alpha^2 - \sigma\alpha\beta}{\sigma_\beta^2 - \sigma\alpha\beta + \sigma_\alpha^2} = 1 - \tilde{x}_\alpha$$

je váha aktíva β v portfóliu s minimálnou rizikovosťou, ak $\tilde{x}_\beta \in \langle 0, 1 \rangle$.

Z analýzy urobenej vyššie vyplýva, že $0 < \tilde{x}_\alpha < 1$, ak $\rho_{\alpha\beta} < \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$ a $\tilde{x}_\alpha \geq 1$, ak $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} \leq \rho_{\alpha\beta} \leq 1$. Čiže ak $\rho_{\alpha\beta} < \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$, tak $\tilde{x}_\alpha \in (0, 1)$, $\tilde{x}_\beta \in (0, 1)$ a $\tilde{r}_p = \tilde{x}_\alpha \overline{r}_\alpha + \tilde{x}_\beta \overline{r}_\beta \in (\overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta)$. Potom $\overline{r}_{min} = \tilde{r}_p$. Ak $\rho_{\alpha\beta} \geq \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$, tak $\tilde{r}_p \leq \overline{r}_\alpha$. V tomto prípade $\overline{r}_{min} = \overline{r}_\alpha$.

Ak uvažujeme $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$, tak reprezentáciou množiny všetkých prípustných portfólií je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ vodorovná úsečka rovnobežná s osou $\mathcal{O}_\sigma$. V tomto prípade pozostáva efektívna množina z jediného bodu. Je ním ľavý koncový bod úsečky.

Ak $\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$, tak množinu všetkých prípustných portfólií môže v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ reprezentovať jediný bod. V takomto prípade je samozrejme efektívna množina identická s množinou všetkých prípustných portfólií.

Ak uvažujeme, že efektívna množina je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ reprezentovaná krivkou a nie iba bodom, funkcia, ktorá ju opisuje je rastúca a konkávna. Vyplýva to z jej konštrukcie.

Pripomeňme si, že na efektívnej množine ležia iba tie portfóliá, ktoré pri danom riziku prinášajú najvyššiu výnosnosť a súčasne sú pri danej výnosnosti najmenej rizikové. To znamená, že ak porovnávame dve portfóliá na nej ležiace, majúce navzájom rôznu rizikovosť, tak portfólio s vyššou rizikovosťou musí prinášať vyšší očakávaný výnos. Ak by totiž prinášalo rovnaké alebo nižšie očakávané percento, tak by nemohlo ležať na efektívnej množine.

Z definície konkávnej funkcie vyplýva, že ak spojíme spomínané dve portfóliá z efektívnej množiny úsečkou, celá leží pod grafom funkcie (prípadne sa s ním prekrýva, ak je grafom priamka). Akékoľvek portfólio ležiace na tejto úsečke má teda pri danom riziku nižšiu nanajvýš rovnakú výnosnosť než portfólio ležiace na efektívnej množine a súčasne pri danej výnosnosti má rizikovosť vyššiu alebo rovnakú ako portfólio z efektívnej množiny.

Situácia, v ktorej by aspoň na nejakom intervale bola funkcia reprezentujúca efektívnu množinu konvexná, nemôže nastať (samozrejme s výnimkou prípadu, keď je celá efektívna množina reprezentovaná úsečkou). Pre konvexné funkcie by totiž úsečka s koncovými bodmi ležiacimi na efektívnej množine ležala nad grafom funkcie a každý bod na nej ležiaci by poskytoval väčší alebo rovnaký očakávaný výnos pri danom riziku a súčasne pri danej výnosnosti menšiu alebo rovnakú rizikovosť. Inými slovami portfóliá ležiace na krivke reprezentujúcej efektívnu množinu by aspoň pre tento interval nemohli byť z efektívnej množiny portfólií.

Príkladom, v ktorom by časť efektívnej množiny mohla byť reprezentovaná úsečkou, je situácia, v ktorej kovariančná matica Q nie je regulárna. Nájdime efektívnu množinu pre tri akcie z nasledujúceho príkladu.

Príklad 5.4. *Uvažujme, že akcie A, B, C tvoria investorovo portfólio, kde výnosnosti a rizikovosti akcií sú tieto:*

akcia	*výnosnosť*	*rizikovosť*
A	$\overline{r}_A = 5$ %	$\sigma_A = 3$ %
B	$\overline{r}_B = 9$ %	$\sigma_B = 4$ %
C	$\overline{r}_C = 10$ %	$\sigma_C = 5$ %

Na množine všetkých prípustných portfólií nájdime reprezentáciu efektívnej množiny v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$, ak kovariančná matica Q spĺňa:

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 16 & -12 \\ -12 & -12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Najprv ukážeme, že matica Q je singulárna, kladne semidefinitná. Označme $\vec{x} = (x_A, x_B, x_C)^T$, potom:

$$\begin{aligned} \vec{x}^T Q \vec{x} &= (x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 16 & -12 \\ -12 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \\ &= 9x_A^2 + 16x_B^2 + 25x_C^2 - 24x_A x_C - 24x_B x_C \\ &= 9x_A^2 - 24x_A x_C + 16x_C^2 + 16x_B^2 - 24x_B x_C + 9x_C^2 \\ &= (3x_A - 4x_C)^2 + (4x_B - 3x_C)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pričom pre $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$ iba vtedy, keď $3x_A = 4x_C$ a súčasne $4x_B = 3x_C$.

Ak predpokladáme, že x_A, x_B, x_C sú váhy jednotlivých akcií v portfóliu, tak $x_A+x_B+x_C = 1$ a platí:

$$1 = \frac{4}{3}x_C + \frac{3}{4}x_C + x_C = \frac{37}{12}x_C.$$

To znamená, že pre váhy $x_C = \frac{12}{37}$, $x_B = \frac{9}{37}$ a $x_A = \frac{16}{37}$ bude mať portfólio nulovú rizikovosť pri kladnej výnosnosti

$$x_A\overline{r}_A + x_B\overline{r}_B + x_C\overline{r}_C = \frac{281}{37} \doteq 7,59\ \%.$$

Takto vytvorené portfólio je teda arbitrážne, pretože, hoci samo tvorené iba rizikovými cennými papiermi, poskytuje kladný očakávaný výnos pri nulovom riziku. Na trhu existuje arbitráž aj napriek tomu, že neexistuje perfektná záporná korelácia medzi žiadnou z dvojíc cenných papierov A, B, C.

Nájsť v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ efektívnu množinu pomocou postupu využívajúceho inverznú maticu Q^{-1} v tomto prípade nie je možné, pretože matica Q nie je regulárna a teda k nej neexistuje inverzná matica. Zapojiť musíme iné nástroje.

Z toho, že $x_A + x_B + x_G = 1$ a $\overline{r}_p = x_A\overline{r}_A + x_B\overline{r}_B + x_C\overline{r}_C$, dostávame:

$$\begin{aligned} \overline{r}_p &= x_A\overline{r}_A + x_B\overline{r}_B + (1 - x_A - x_B)\overline{r}_C \\ &= \overline{r}_C + x_A(\overline{r}_A - \overline{r}_C) + x_B(\overline{r}_B - \overline{r}_C). \end{aligned}$$

Odtiaľ máme:

$$x_B = \left(\frac{\overline{r}_C - \overline{r}_p}{\overline{r}_C - \overline{r}_B}\right) + x_A\left(\frac{\overline{r}_A - \overline{r}_C}{\overline{r}_C - \overline{r}_B}\right) = 10 - \overline{r}_p - 5x_A, \tag{5.55}$$

$$x_C = \left(\frac{\overline{r}_p - \overline{r}_B}{\overline{r}_C - \overline{r}_B}\right) + x_A\left(\frac{\overline{r}_B - \overline{r}_A}{\overline{r}_C - \overline{r}_B}\right) = \overline{r}_p + 4x_A - 9. \tag{5.56}$$

Dosadením (5.55) a (5.56) do $\vec{x}^T Q\vec{x}$ získame:

$$\begin{aligned} \vec{x}^T Q\vec{x} &= (3x_A - 4x_C)^2 + (4x_B - 3x_C)^2 \\ &= (36 - 4\overline{r}_p - 13x_A)^2 + (67 - 7\overline{r}_p - 32x_A)^2 \\ &= 5785 - 1226\overline{r}_p - 5224x_A + 552\overline{r}_p x_A + 65\overline{r}_p^2 + 1193x_A^2 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Pre danú hodnotu $\overline{r}_p \in \langle 5, 10\rangle$ môžeme pravú stranu rovnice v (5.57) chápať ako funkciu premennej x_A. Keďže úlohou je nájsť efektívnu množinu, je potrebné nájsť minimum tejto funkcie. Označme:

$$F_{\overline{r}_p}(x_A) = 5785 - 1226\overline{r}_p - 5224x_A + 552\overline{r}_p x_A + 65\overline{r}_p^2 + 1193x_A^2.$$

Zderivujme $F_{\overline{r}_p}$ podľa x_A, dostaneme:

$$F'_{\overline{r}_p}(x_A) = 2386x_A - 5224 + 552\overline{r}_p.$$

Platí $F'_{\overline{r}_p}(\tilde{x}_A) = 0$, ak

$$\tilde{x}_A = \frac{2612 - 276\overline{r}_p}{1193}.$$

V tomto bode dosahuje funkcia $F_{\overline{r}_p}$ svoje (absolútne) minimum s hodnotou:

$$\begin{aligned} F_{\overline{r}_p}\left(\tilde{x}_A\right) &= (36-4\overline{r}_p-13\tilde{x}_A)^2+(67-7\overline{r}_p-32\tilde{x}_A)^2 \\ &= \frac{1}{1193^2}\left((8992-1184\overline{r}_p)^2+(481\overline{r}_p-3653)^2\right) \\ &= \frac{1}{1193^2}\left(32^2\left(281-37\overline{r}_p\right)^2+13^2\left(37\overline{r}_p-281\right)^2\right) \\ &= \frac{1193}{1193^2}\left(281-37\overline{r}_p\right)^2=\frac{\left(281-37\overline{r}_p\right)^2}{1193} \end{aligned} \tag{5.58}$$

Pretože je potrebné splniť podmienku $\tilde{x}_A \in \langle 0,1\rangle$, nie je možné vyberať $\overline{r}_p$ z celej množiny $\langle 5,10\rangle$. Je nutné urobiť obmedzenie na interval $\langle\frac{473}{92},\frac{653}{69}\rangle$. V skutočnosti treba upraviť aj tento interval, pretože sa vyžaduje, aby $x_B \in \langle 0,1\rangle$ a tiež $x_C \in \langle 0,1\rangle$.

Ak $\tilde{x}_A=\frac{2612-276\overline{r}_p}{1193}$, potom z (5.55) a z (5.56) dostaneme:

$$\tilde{x}_B = 10-\overline{r}_p-5\left(\frac{2612-276\overline{r}_p}{1193}\right)=\frac{187\overline{r}_p-1130}{1193}, \tag{5.59}$$

$$\tilde{x}_C = \overline{r}_p+4\left(\frac{2612-276\overline{r}_p}{1193}\right)-9=\frac{89\overline{r}_p-289}{1193}. \tag{5.60}$$

Z (5.59) máme:

$$\frac{1130}{187}\leq\overline{r}_p\leq\frac{2323}{187}.$$

Z (5.60) máme:

$$\frac{289}{89}\leq\overline{r}_p\leq\frac{1482}{89}.$$

Najvyššia z hodnôt $\frac{473}{92}$, $\frac{1130}{187}$, $\frac{289}{89}$ je $\frac{1130}{187}\doteq 6,04$. Najnižšia z hodnôt $\frac{653}{69}$, $\frac{2323}{187}$, $\frac{1482}{89}$ je $\frac{653}{69}\doteq 9,46$. Takže, aby hodnoty všetkých váh neboli záporné alebo neprekročili hodnotu 1, je nutné vyberať $\overline{r}_p$ z intervalu $\langle\frac{1130}{187},\frac{653}{69}\rangle$. Pre $\overline{r}_p$ z tohto intervalu bude funkcia v (5.58) druhou mocninou najnižšej možnej rizikovosti portfólia s výnosnosťou rovnou $\overline{r}_p$ a teda rizikovosť portfólia bude:

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{\left(281-37\overline{r}_p\right)^2}{1193}}=\frac{|281-37\overline{r}_p|}{\sqrt{1193}}. \tag{5.61}$$

Vidíme, že vezmúc $\overline{r}_p=\frac{281}{37}$ bude hodnota rizikovosti nulová. Portfóliá s výnosnosťami menšími než $\frac{281}{37}$ nebudú ležať na efektívnej množine, pretože pre rovnakú rizikovosť možno z (5.61) dosiahnuť vyššiu výnosnosť. Zhrnúc všetky tieto informácie môžeme urobiť záver, že časť efektívnej množiny bude pre $\overline{r}_p\in\langle\frac{281}{37},\frac{653}{69}\rangle$ ležať na grafe funkcie v (5.61), t. j. funkcie s predpisom $\frac{37\overline{r}_p-281}{\sqrt{1193}}$. Špeciálne, ak $\overline{r}_p=\frac{653}{69}$, hodnota váhy akcie A na skladbe portfólia je nulová a pri prekročení hodnoty $\frac{653}{69}$ výnosnosťou portfólia, klesne na krivke opísanej v (5.61) hodnota x_A do záporných čísel.

Zvyšná časť portfólií z efektívnej množiny bude preto ležať na krivke:

$$\sigma_p=\sqrt{65\overline{r}_p^2-1226\overline{r}_p+5785}, \tag{5.62}$$

kde $\overline{r}_p\in\langle\frac{653}{69},10\rangle$ a $x_A=0$.

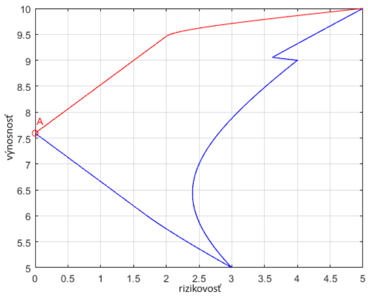
Ak by sme hľadali prienik krivky v (5.62) a krivky v (5.61), dostali by sme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(281-37\overline{r}_p)^2}{1193}} &= \sqrt{65\overline{r}_p^2-1226\overline{r}_p+5785}\\
\frac{(281-37\overline{r}_p)^2}{1193} &= 65\overline{r}_p^2-1226\overline{r}_p+5785\\
78961-20794\overline{r}_p+1369\overline{r}_p^2 &= 77545\overline{r}_p^2-1462618\overline{r}_p+6901505\\
76176\overline{r}_p^2-1441824\overline{r}_p+6822544 &= 0\\
69^2\overline{r}_p^2-2.69.653\overline{r}_p+653^2 &= 0\\
(69\overline{r}_p-653)^2 &= 0
\end{aligned}$$

To znamená, že hodnota rizikovosti je v bode $\frac{653}{69}$ pre obe funkcie rovnaká, rovná $\frac{4772}{69\sqrt{1193}} = \frac{4\sqrt{1193}}{69} \doteq 2{,}0023$ % a navyše majú tieto funkcie v tomto bode rovnakú aj prvú deriváciu. Inými slovami, obe hladké krivky je možné v bode $\left(\frac{653}{69}, \frac{4\sqrt{1193}}{69}\right)$ hladko zlepiť.

Každé portfólio ležiace na krivke (5.62) pozostáva iba z aktív B, C. Akcia A sa nepodieľa na skladbe portfólia ležiacom na tejto krivke.

Obr. 5.5 zachytáva nájdenú efektívnu množinu zobrazenú na množine všetkých prípustných portfólií.



Obr. 5.5: Reprezentácia efektívnej množiny (červená krivka) na množine všetkých prípustných portfólií. Bod A označuje arbitrážne portfólio. [32] [33]

Poznámka 5.5. *Ako sme mali možnosť vidieť v príklade 5.4, singulárnosť kovariančnej matice umožnila vznik arbitrážneho portfólia. Vytvoriť takéto portfólio bolo možné vhodným výberom váh jednotlivých aktív.*

Singulárnosť kovariančnej matice nemusí existenciu arbitráže zaručovať, pretože sa môže stať, že do arbitrážneho portfólia nebude možné vybrať váhy tak, aby sa ich súčet rovnal jednej, prípadne niektoré z váh nebudú spĺňať obmedzenia stanovujúce, že každá váha aktíva v portfóliu je väčšia alebo rovná 0 *a súčasne menšia alebo rovná* 1*. Napríklad, ak by sme uvažovali kovariančnú maticu v predchádzajúcom príklade rovnú*

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 12\\ 0 & 16 & 12\\ 12 & 12 & 25 \end{pmatrix},$$

bola by síce singulárna kladne semidefinitná:

$$\begin{aligned}
\vec{x}^T Q \vec{x} &= (x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 16 & 12 \\ 12 & 12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \\
&= 9x_A^2 + 16x_B^2 + 25x_C^2 + 24x_A x_C + 24x_B x_C \\
&= 9x_A^2 + 24x_A x_C + 16x_C^2 + 16x_B^2 + 24x_B x_C + 9x_C^2 \\
&= (3x_A + 4x_C)^2 + (4x_B + 3x_C)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

ale na dosiahnutie nulovej rizikovosti portfólia by bolo potrebné zvoliť aspoň jednu z váh zápornú.

Toto obmedzenie možno zrušiť, ak v čase 0 *umožníme aktíva aj predávať, t. j. uvažovať záporné hodnoty váh, resp. hodnoty váh väčšie ako* 1.

Poznámka 5.6. *Arbitrážne portfólio je pre riziko averzného investora veľmi lákavé, pretože poskytuje kladný očakávaný výnos pri nulovom riziku. Odhliadnuc od možných odchýliek skutočného výnosu od toho odhadovaného vznik arbitrážnej príležitosti, ako sme vysvetlili v predchádzajúcich kapitolách, naštartuje procesy, ktoré vedú k jej okamžitému zániku.*

Navyše, ak by sme uvažovali, že na trhu s tromi akciami z predchádzajúceho príkladu existuje bezrizikové aktívum – diskontný dlhopis s maturitou 1 *č. j. a bezrizikovou úrokovou sadzbou* $r_f = (281/37)\,\%$*, arbitráž na trhu by neexistovala.*

Práve princíp žiadnej arbitráže tlačí na to, aby bezriziková úroková sadzba diskontného dlhopisu bola rovná presne $(281/37)\,\%$*. Existencia arbitráže vedie totiž k tomu, že dôjde k prerovnaniu cien a ich nastaveniu takým spôsobom, že arbitráž zanikne.*

5.4.3 Arbitrážne portfóliá

Z úvah z príkladu 5.4 možno vydedukovať, že na nájdenie arbitráže na trhu s rizikovými cennými papiermi je nutné, aby kovariančná matica bola singulárna. Zosumarizujeme to v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 5.1. *Ak existuje na trhu s rizikovými aktívami* $i = 1, 2, \ldots, N$ *arbitrážne portfólio, potom kovariančná matica* Q *je singulárna.*

Dôkaz. Ak totiž Q je regulárna, teda kladne definitná, tak pre každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ také, že $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí:

$$\vec{x}^T Q \vec{x} > 0$$

a pre žiadny vektor váh aktív v portfóliu nemožno dosiahnuť nulovú rizikovosť portfólia. □

Nie je to postačujúca podmienka, pretože sa môže stať, že nebude možné vybrať váhy aktív x_i do arbitrážneho portfólia také, že $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, N$ spĺňajúce $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ (pozri poznámku 5.5).

Ak pripustíme možnosť záporných váh, resp. váh aktív väčších ako 1, singulárnosť kovariančnej matice Q umožňuje nájsť vektor váh $\vec{x} \neq \vec{0}$ taký, že $\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$. Taký vektor však nemusí byť jediný. Sústava rovníc

$$\begin{aligned} \vec{x}^T \vec{1} &= 1, & (5.63) \\ \vec{x}^T Q \vec{x} &= 0, & (5.64) \end{aligned}$$

môže mať nekonečne veľa riešení, ale tiež nemusí mať žiadne.

Riešiť sústavu nelineárnych rovníc (5.63), (5.64) môže byť nepohodlné. Avšak hľadať riešenie tejto sústavy je ekvivalentné hľadaniu riešenia sústavy lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} \vec{1}^T \vec{x} &= 1, \\ Q\vec{x} &= \vec{0}. & (5.65) \end{aligned}$$

Tento záver je dôsledkom nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 5.2. *Nech Q je kladne semidefinitná kovariačná matica. Ak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je vektor váh aktív v N zložkovom portfóliu spĺňajúci* (5.63) *a taký, že $\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$, potom $Q\vec{x} = \vec{0}$.*

Dôkaz. Ak Q je kladne semidefinitná, potom existuje jediná horná trojuholníková matica U taká, že $Q = U^T U$ (Choleského rozklad, dôkaz sa nachádza napr. v [19]).
Ak teda $\vec{x} \neq \vec{0}$ je taký, že $\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$, potom:

$$0 = \vec{x}^T Q \vec{x} = \vec{x}^T U^T U \vec{x}. \tag{5.66}$$

Označme $\vec{y} = U\vec{x}$, potom z (5.66) dostaneme:

$$\vec{y}^T \vec{y} = 0.$$

To platí vtedy a len vtedy, ak $\vec{y} = \vec{0}$. Z toho máme $U^T \vec{y} = \vec{0}$, čiže $Q\vec{x} = \vec{0}$. □

Poznámka 5.7. *Poznamenajme, že tvrdenie 5.2 platí pre vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ aj bez podmienky* (5.63).

Na nájdenie arbitrážneho portfólia teda stačí vyriešiť sústavu $(N + 1)$ lineárnych rovníc (5.63), (5.65) o N neznámych $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Ak riešenie tejto sústavy existuje, potom je buď jediné alebo sústava má nekonečne veľa riešení. Ak má sústava nekonečne veľa riešení, tak sa vyberie také riešenie, ktoré poskytuje najväčšiu výnosnosť, čiže také, ktoré maximalizuje $\vec{r}^T \vec{x}$ pripúšťajúc aj nekonečne veľkú výnosnosť.

Príklad 5.5. *Uvažujme, že akcie A, B, C tvoria investorovo portfólio, kde výnosnosti a rizikovosti akcií sú tieto:*

akcia	*výnosnosť*	*rizikovosť*
A	$\overline{r}_A = 4$ %	$\sigma_A = 1$ %
B	$\overline{r}_B = 5$ %	$\sigma_B = 2$ %
C	$\overline{r}_C = 8$ %	$\sigma_C = 3$ %

Na množine všetkých prípustných portfólií nájdime arbitrážne portfólio poskytujúce najväčšiu možnú výnosnosť, ak kovariančná matica Q spĺňa:

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Riešme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} x_A + x_B + x_C &= 1, \\ x_A - 2x_B - 3x_C &= 0, \\ -2x_A + 4x_B + 6x_C &= 0, \\ -3x_A + 6x_B + 9x_C &= 0, \end{aligned}$$

napr. Gaussovou eliminačnou metódou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Úlohu parametra zohrá váha aktíva C, t. j. $x_C \in \mathbb{R}$. Potom riešením sústavy je vektor váh $\vec{x} = (x_A, x_B, x_C)^T$, kde $x_A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_C$, $x_B = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_C$, $x_C \in \mathbb{R}$. To, že ide o vektor váh aktív v portfóliu, kladie obmedzenie na voľbu x_C. Musí súčasne platiť:

$$\begin{aligned} 0 \le \quad & x_A = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_C & \le 1, \\ 0 \le \quad & x_B = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}x_C & \le 1, \\ 0 \le \quad & \qquad x_C & \le 1. \end{aligned}$$

To je splnené len vtedy, ak

$$0 \le x_C \le \frac{1}{4}.$$

Z toho súčasne vyplýva, že

$$\frac{2}{3} \le x_A \le \frac{3}{4},\ 0 \le x_B \le \frac{1}{3}.$$

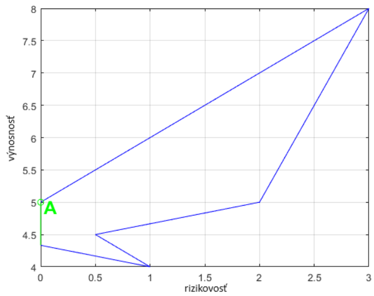
Maximalizujme výnosnosť arbitrážneho portfólia voľbou $x_C \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$, t. j.:

$$\max_{x_C \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle} \overline{r}_A x_A + \overline{r}_B x_B + \overline{r}_C x_C = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x_C + \frac{5}{3} - \frac{20}{3}x_C + 8x_C = \frac{13}{3} + \frac{8}{3}x_C$$

Zrejme maximálnu výnosnosť bude mať to arbitrážne portfólio, na ktorého skladbe sa podieľajú akcie A, B, C váhami $x_A = \frac{3}{4}$, $x_B = 0$, $x_C = \frac{1}{4}$ a jej hodnota bude 5 %.

Obr. 5.6 znázorňuje množinu všetkých prípustných portfólií a množinu všetkých arbitrážnych portfólií aj s portfóliom s maximálnou hodnotou výnosnosti rovnou 5 %.

Poznámka 5.8. *Ak pripustíme i možnosť predaja akcií v čase* 0*, teda jediným obmedzením na voľbu váh do portfólia bude rovnosť* $x_A + x_B + x_C = 1$*, tak výnosnosť, ktorú arbitrážne portfólio môže dosiahnuť, môže byť potenciálne nekonečne veľká. Stačí voliť* $x_C \to \infty$ *pri splnení* $x_A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_C$*,* $x_B = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_C$*.*



Obr. 5.6: Reprezentácia množiny všetkých arbitrážnych portfólií (zelenou) na množine všetkých prípustných portfólií v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$. Bod A označuje arbitrážne portfólio s maximálnou výnosnosťou. [32] [33]

Poznámka 5.9. *Pre možnosť predaja akcií v čase* 0 *je však podmienka* $x_A + x_B + x_C = 1$ *zbytočným obmedzením, pretože predpokladá, že investorovo portfólio má v čase* 0 *kladnú hodnotu, t. j. nákup akcií do portfólia prevyšuje ich predaj v tomto čase. Niektoré úlohy sa tým pre investora stávajú neriešiteľnými, keďže sústava rovníc* (5.63)*,* (5.65) *nemusí mať riešenie. Uvažujme napr. singulárnu kladne semidefinitnú kovariančnú maticu*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1+2\sqrt{6} \\ 1 & 1+2\sqrt{6} & 9 \end{pmatrix}$$

pre trojicu akcií na trhu. Potom sústave rovníc

$$\begin{aligned} x_A + x_B + x_C &= 1, \\ x_A + x_B + x_C &= 0, \\ x_A + 4x_B + (1+2\sqrt{6})x_C &= 0, \\ x_A + (1+2\sqrt{6})x_B + 9x_C &= 0, \end{aligned}$$

nevyhovuje žiadne $(x_A, x_B, x_C) \in \mathbb{R}^3$*.*

Ak by sme v čase 0 *predpokladali* $x_A + x_B + x_C = 0$ $\Big($*vo všeobecnosti* $\sum_{i=1}^{N} x_i = 0\Big)$*, čiže nákup niektorých akcií do portfólia je plne hradený predajom akcií, ktoré mal investor v čase* 0 *v držbe, tak sústava v predchádzajúcom príklade má nekonečne veľa riešení.*

Poznámka 5.10. *Podľa potrieb úlohy možno tiež voliť* $\sum_{i=1}^{N} x_i = -1$*, teda investor v čase* 0 *portfólio predáva, resp. predaj akcií prevyšuje ich nákup do portfólia. Uvedené môžeme ilustrovať na nasledujúcom jednoduchom prípade dvoch akcií na trhu.*

Uvažujme dve perfektne pozitívne korelované akcie A, B s nasledujúcimi výnosnosťami a rizikovosťami:

akcia	*výnosnosť*	*rizikovosť*
A	$\overline{r}_A = 2\ \%$	$\sigma_A = 1\ \%$
B	$\overline{r}_B = 8\ \%$	$\sigma_B = 3\ \%$

Ak by sme predpokladali $x_A + x_B = 1$ a zahrnuli i predaj akcií v čase 0, tak množina všetkých prípustných portfólií charakterizovanými výnosnosťou $\overline{r}_p$ a rizikovosťou $\sigma_p \geq 0$ je určená ako:

$$\sigma_p = \frac{|\overline{r}_p + 1|}{3}.$$

Čiže arbitrážne portfólio dosahuje pri nulovej rizikovosti zápornú výnosnosť -1 %, kde arbitrážnymi váhami sú $x_A = 1,5$ a $x_B = -0,5$. Žiadny arbitražér nebude v čase 0 konštruovať svoje portfólio tak, aby dosiahol v čase 1 č. j. neskôr istú stratu.

Ak však zvolí $x_A = -1,5$ a $x_B = 0,5$, t. j. $x_A + x_B = -1$, výnosnosť portfólia v čase 1 bude

$$\overline{r}_p = -1,5(2\ \%) + 0,5(8\ \%) = 1\ \%$$

pri nulovej rizikovosti:

$$\sigma_p = \sqrt{2,25 - 4,5 + 2,25} = 0\ \%.$$

Hľadanie arbitrážneho portfólia na množine všetkých prípustných portfólií pre nezáporné váhy s hodnotou menšou alebo rovnou 1 možno s uplatnením záverov v tvrdení 5.2 previesť na úlohu lineárneho programovania (U_L):

$$\max_{\vec{x} \geq \vec{0}} \quad \vec{r}^T \vec{x}$$

$$\text{za podmienok:} \quad \vec{1}^T \vec{x} = 1, \quad Q\vec{x} = \vec{0}.$$

Pretože uvažujeme maticu Q singulárnu, z homogénnej sústavy rovníc $Q\vec{x} = \vec{0}$ možno Gaussovou eliminačnou metódou eliminovať niektoré rovnice, čím zo sústavy:

$$\vec{1}^T \vec{x} = 1, \quad Q\vec{x} = \vec{0},$$

dostaneme sústavu $D\vec{x} = \vec{d}$, kde matica sústavy D má $M \leq N$ riadkov a N (dĺžka vektora $\vec{x}$) stĺpcov a pravá strana $\vec{d} = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T$ je vektor s dĺžkou rovnou M.

Úlohu lineárneho programovania:

$$\max_{\vec{x} \geq \vec{0}} \quad \vec{r}^T \vec{x}$$

$$\text{za:} \quad D\vec{x} = \vec{d}$$

možno potom po ďalších drobných úpravách riešiť napríklad simplexovou metódou dvojfázovo. Výhodou je možnosť naprogramovania algoritmu, ktorý bude schopný riešiť túto úlohu pre akýkoľvek (rozumný) počet N aktív v portfóliu a príslušnú singulárnu kladne semidefinitnú kovariančnú maticu Q. Ďalšie možnosti rýchleho a efektívneho hľadania riešenia poskytujú v časti 5.4.2 spomínané metódy vnútorného bodu.

5.5 Preferencie investora

Portfóliá ležiace na efektívnej množine sú pre riziko averzných investorov z hľadísk pomenovaných vyššie tou najvhodnejšou voľbou na investíciu, ale pre konkrétneho investora nie sú všetky rovnako dobré. To, ktoré si investor nakoniec vyberie a do ktorého bude investovať, závisí od investorových preferencií ohľadom výnosnosti a rizikovosti. Existujú teda rozdiely aj medzi riziko averznými investormi a závisia od toho, aká je funkcia užitočnosti konkrétneho investora.

V rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ možno vyjadriť hladiny preferencií investora ako **krivky indiferencie**, t. j. krivky, na ktorých ležia pre investora portfóliá rovnako žiaduce. Pretože každé dve portfóliá ležiace na jednej krivke indiferencie sú pre investora rovnako dobré, investor je medzi nimi indiferentný, nepreferuje jedno pred druhým. Z toho vychádza aj pomenovanie týchto kriviek.

Investor veľmi podobne ako pri konštrukcii efektívnej množiny uplatňuje dva princípy, na základe ktorých sa rozhoduje, ktoré portfólio bude ležať na ktorej krivke indiferencie. Pri tom istom riziku preferuje investor portfólio s vyšším výnosom a pri tej istej výnosnosti preferuje investor portfólio s nižším rizikom.

Portfóliá ležiace na rôznych krivkách indiferencie nie sú pre investora rovnako dobré. Investor uprednostňuje portfólio ležiace na vyššej krivke indiferencie (na vyššej preferenčnej hladine). Reláciu preferencie budeme značiť $\succ$. Čiže ak $P_1 \succ P_2$, tak portfólio P_1 je preferované (investorom) pred portfóliom P_2. Ak sú portfóliá P_1 a P_2 pre investora rovnako žiaduce, teda ležia na rovnakej krivke indiferencie, tak to zapíšeme ako $P_1 \sim P_2$. Obe relácie sú tranzitívne.

Krivky indiferencie sa nepretínajú. Ak by sa totiž pretínali, tak nie je možné portfóliá zoradiť podľa investorových preferencií. Uvažujme dve portfóliá P_1 a P_2 ležiace na hladine preferencie c_1 a portfóliá P_2 a P_3 ležiace na nižšej hladine preferencie $c_2 < c_1$. Portfólio P_2 je teda spoločné obom hladinám (je v ňom bod prieniku). Zrejme $P_1 \succ P_3$, pretože portfólio P_1 leží na vyššej krivke indiferencie. Na druhej strane $P_1 \sim P_2$ a rovnako tak $P_2 \sim P_3$. Čiže $P_1 \sim P_3$, čo je spor s $P_1 \succ P_3$.

Krivky indiferencie možno v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ opísať rastúcou a rýdzo konvexnou funkciou, pričom, čím je rast krivky strmší, tým väčší je investorov odpor k riziku. Táto funkcia je rastúca preto, lebo reflektuje uplatnenie pricípov riziko averzného investora pri tvorbe kriviek indiferencie. Teda pri dvoch rôznych rizikovostiach portfólií riziko averzný investor vyžaduje vyššiu výnosnosť pri portfóliu s vyššou rizikovosťou. Zároveň pri opakovanej rovnakej kladnej zmene rizikovosti investor v súlade so svojim odporom k riziku požaduje vyšší nárast výnosnosti, teda konvexnosť funkcie.

Ak poznáme investorove krivky indiferencie (jeho preferencie ohľadom výnosu a rizika), tak môžeme určiť investorov výber optimálneho portfólia. Spomedzi všetkých portfólií tvoriacich efektívnu množinu to bude zrejme to, ktoré leží na najvyššej možnej krivke indiferencie investora. Keďže krivka reprezentujúca efektívnu množinu portfólií je konkávna a krivky indiferencie riziko averzného investora majú kladný sklon a sú rýdzo konvexné, možno ho nájsť a bude ležať v bode, v ktorom sa investorova indiferenčná krivka dotýka krivky efektívnej množiny.

Poznámka 5.11. *Poznamenajme, že ak je efektívna množina reprezentovaná v rovine* $\mathcal{O}_{\sigma r}$ *jediným bodom, tak investor nemá na výber iné možnosti a tento bod je na základe investorových preferencií zároveň jeho (jedinou možnou) optimálnou voľbou.*

Príklad 5.6. *Uvažujme trh s dvoma rizikovými cennými papiermi – akciami A, B z príkladu 5.3, t. j. takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú tieto:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
A	$\overline{r}_A = 10$ %	$\sigma_A = 5$ %
B	$\overline{r}_B = 15$ %	$\sigma_B = 12$ %

a korelačný koeficient výnosov akcií A, B je $\rho_{AB} = -0,2$. *Nájdime na krivke reprezentujúcej efektívnu množinu bod optimálneho portfólia, ak investorove preferencie možno vyjadriť ako* $\overline{r}_p = c + \frac{(5\sigma_p)^2}{1174}$, *kde c je hladina preferencie.*

Riešenie:

V riešení príkladu 5.3 sme dospeli k záveru, že množina všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z akcií A, B je tvorená portfóliami, pre ktorých rizikovosť platí:

$$\sigma_p = \frac{1}{5}\sqrt{193\overline{r}_p^2 - 4230\overline{r}_p + 23625} \tag{5.67}$$

pri výnosnosti portfólia $\overline{r}_p \in \langle 10, 15\rangle$.

Na tejto množine ľahko nájdeme efektívnu množinu. Stačí nájsť $\tilde{r}$, v ktorom portfólio ležiace na krivke v (5.67) dosahuje minimálnu hodnotu rizikovosti. Zderivujme funkciu v (5.67) podľa $\overline{r}_p$ a deriváciu postavme rovnú nule, dostaneme:

$$\frac{193\overline{r}_p - 2115}{5\sqrt{193\overline{r}_p^2 - 4230\overline{r}_p + 23625}} = 0. \tag{5.68}$$

Výnosnosť, ktorá vyhovuje (5.68), je zrejme hľadaná hodnota $\tilde{r}$. Máme $\tilde{r} = \frac{2115}{193} \doteq 10,96$ %. Efektívnu množinu teda v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ reprezentuje množina bodov $(\sigma_p, \overline{r}_p)$ ležiacich na krivke (5.67) pre $\overline{r}_p \in \langle \tilde{r}, 15\rangle$.

Vyjadrime investorove preferencie pomocou inverznej funkcie ako funkciu premennej $\overline{r}_p$:

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{1174}}{5}\sqrt{\overline{r}_p - c}, \tag{5.69}$$

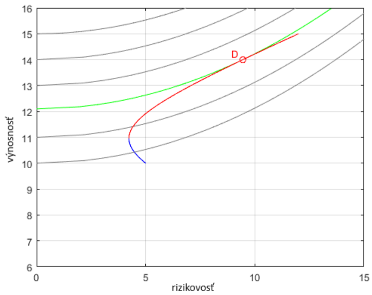
kde $\overline{r}_p \geq c$.

V bode optimálneho portfólia $(\overline{r}_p^*, \sigma_p^*)$ sa dotýka krivka indiferencie investora krivky efektívnej množiny. Musí preto súčasne platiť:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1174}}{5}\sqrt{\overline{r}_p^* - c^*} &= \frac{1}{5}\sqrt{193(\overline{r}_p^*)^2 - 4230\overline{r}_p^* + 23625} \\
\frac{\sqrt{1174}}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{\overline{r}_p^* - c^*}}\right) &= \frac{2}{5}\left(\frac{193\overline{r}_p^* - 2115}{2\sqrt{193(\overline{r}_p^*)^2 - 4230\overline{r}_p^* + 23625}}\right)
\end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je $\overline{r}_p^* = 14$ % ($\sigma_p^* \doteq 9,45$ %), $c^* \doteq 12,1$. To znamená, že investorova optimálna hladina preferencie je približne 12,1 a lepšiu pre kombináciu rizikových cenných papierov A, B nedosiahne. Očakávaný výnos optimálneho portfólia je 14 % a rizikovosť je asi 9,45 %. Optimálne portfólio je kombináciou akcií A a B takou, že váha akcie A v portfóliu je $x_A^* = \frac{\overline{r}_B - \overline{r}_p^*}{\overline{r}_B - \overline{r}_A} = \frac{1}{5}$ a váha akcie B je $x_B^* = \frac{\overline{r}_p^* - \overline{r}_A}{\overline{r}_B - \overline{r}_A} = \frac{4}{5}$.

Krivky indiferencie investora, krivku efektívnej množiny a optimálne portfólio zachytáva Obr. 5.7.



Obr. 5.7: Reprezentácia efektívnej množiny (červenou), krivky indiferencie investora (sivou) a krivka indiferencie investora na optimálnej preferenčnej hladine (zelenou) v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$. Bod D označuje optimálne portfólio. [32] [33]

5.6 Efektívna množina pri existencii bezrizikového aktíva

Zlepšiť svoju hladinu preferencie môže investor investovaním do kombinácie rizikových aktív a bezrizikového cenného papiera, za ktorý sa považuje diskontný štátny dlhopis s dobou splatnosti rovnou dobe držania portfólia, t. j. 1 č. j. Výnos takéhoto aktíva je istý. V prípade štátnych dlhopisov určený bezrizikovou úrokovou sadzbou (mierou) r_f na príslušné časové obdobie. Rizikovosť aktíva je nulová. Teda ak označíme smerodajnú odchýlku takéhoto aktíva ako σ_f, tak $\sigma_f = 0$. V rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ bude bezrizikový cenný papier reprezentovaný bodom so súradnicami $(0, r_f)$. Keďže kovarianciu dvoch aktív i, j možno vypočítať ako $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, tak kovariancia akéhokoľvek aktíva i s bezrizikovým aktívom je nulová ($\sigma_{if} = \rho_{if}\sigma_i\sigma_f = 0$).

Uvažujme portfólio, ktoré pozostáva z bezrizikového cenného papiera (s váhou x) a nejakého rizikového aktíva, resp. kombinácie rizikových aktív (s váhou $1-x$), s výnosnosťou $\overline{r}_i$ a rizikovosťou σ_i. Potom pre výnosnosť takéhoto portfólia platí:

$$\overline{r} = xr_f + (1-x)\overline{r}_i. \tag{5.70}$$

Rizikovosť takéhoto portfólia je:

$$\sigma = \sqrt{x^2\sigma_f^2 + 2x(1-x)\sigma_{if} + (1-x)^2\sigma_i^2} = (1-x)\sigma_i. \tag{5.71}$$

Z (5.71) získame:

$$1 - x = \frac{\sigma}{\sigma_i}, \tag{5.72}$$
$$x = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_i}. \tag{5.73}$$

Dosadením rovnosti (5.73) za x, resp. (5.72) za $(1-x)$ do (5.70) dostaneme:

$$\overline{r} = r_f + \left(\frac{\overline{r}_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma, \tag{5.74}$$

kde $\sigma \in \langle 0, \sigma_i \rangle$. Pre rôzne hodnoty $x \in \langle 0, 1 \rangle$ teda všetky možné portfólia tohto typu ležia na úsečke reprezentovanej rovnicou (5.74).

Ak uvažujeme aj možnosť bezrizikového zapožičiavania pri tej istej bezrizikovej úrokovej sadzbe, môžu byť váhy x aj záporné čísla. Napr. predpokladajme, že investor si požičia 3000 p. j. a investuje v celkovej výške 15 000 p. j. do rizikových cenných papierov (t. j. 12 000 p. j. mal a 3000 p. j. si požičal), potom:

$$x_f = \tfrac{-3000}{12000} = -\tfrac{1}{4} \text{ a } x_{CP} = \tfrac{15000}{12000} = \tfrac{5}{4},$$

kde x_f je váha bezrizikového aktíva a x_{CP} je váha portfólia rizikových cenných papierov. V súčte máme $x_f + x_{CP} = 1$.

Predpoklad požičiavania si pri bezrizikovej úrokovej sadzbe nie je v modeli nijako obmedzujúci, pretože to znamená len toľko, že príslušné bezrizikové aktívum sa nebude v čase 0 do portfólia nakupovať. Naopak, jeho predajom v tomto čase sa získajú finančné prostriedky, ktoré sa použijú na nákup rizikových aktív. Samozrejme predajom bezrizikového dlhopisu vzniká povinnosť investora zaplatiť držiteľovi dlhopisu v čase 1 č. j. úrok. Inými slovami výnos z tohto aktíva bude záporný.

Všetky možné portfóliá ako kombinácie bezrizikového zapožičiavania (s váhou $x < 0$) a nejakého rizikového aktíva alebo ich kombinácie (s váhou $1 - x > 1$) potom ležia na polpriamke:

$$\overline{r} = r_f + \left(\frac{\overline{r}_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma, \tag{5.75}$$

kde $\sigma \geq \sigma_i$.

Kombinovanie bezrizikového aktíva s portfóliom rizikových aktív umožňuje investorovi vylepšiť (z pohľadu jeho preferencií) efektívnu množinu. Vzhľadom na uvedené nová efektívna množina portfólií reprezentovaná bodmi $(\sigma, \overline{r})$ v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ vznikne ako kombinácia bezrizikového aktíva a tzv. **dotykového portfólia** s výnosnosťou $\overline{r}_t$ a rizikovosťou σ_t. V rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ budú tieto reprezentácie portfólií ležať na polpriamke:

$$\overline{r} = r_f + \left(\frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t}\right)\sigma, \tag{5.76}$$

kde $\sigma \geq 0$, ktorá sa dotýka krivky pôvodnej efektívnej množiny v bode $(\sigma_t, \overline{r}_t)$. Pričom ak $\sigma \in \langle 0, \sigma_t \rangle$ ide o kombináciu nákupu bezrizikového aktíva a dotykového portfólia a ak $\sigma \geq \sigma_t$, tak ide o kombináciu bezrizikového zapožičiavania (predaja bezrizikového aktíva) s dotykovým portfóliom.

Vzhľadom nato, že hodnota r_f je určite nižšia (v špeciálnych prípadoch rovnaká) ako minimálna z hodnôt výnosností portfólií ležiacich na pôvodnej efektívnej množine, je smernica $k_t = \frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t}$ polpriamky v (5.76) kladné číslo. Čiže lineárna funkcia v (5.76) je rastúca.

Ak by sme uvažovali o novej efektívnej množine reprezentovanej polpriamkou spájajúcou body bezrizikového portfólia a portfólia rizikových aktív s inými charakteristikami, než má dotykové portfólio, a teda so smernicou $k < k_t$, nevytvorili by sme efektívnu množinu, pretože body na takejto polpriamke ležiace by s výnimkou bodu $(0, r_f)$ mali pri rovnakom riziku nižšiu výnosnosť a pri rovnakej výnosnosti vyššiu rizikovosť než body z polpriamky (5.76).

Rovnako je nová efektívna množina reprezentovaná polpriamkou (5.76) pre $\sigma \geq 0$ množinou portfólií pre investora výhodnejšia než pôvodná efektívna množina, pretože je dotyčnicou ku grafu konkávnej funkcie reprezentujúcej pôvodnú efektívnu množinu v bode $(\sigma_t, \overline{r}_t)$, a teda s výnimkou bodov $(0, r_f)$ a $(\sigma_t, \overline{r}_t)$ každý bod na nej ležiaci má pri rovnakom riziku vyšší očakávaný výnos a pri rovnakej výnosnosti nižšiu rizikovosť než bod z krivky pôvodnej efektívnej množiny (v špeciálnych prípadoch by sa nová a pôvodná efektívna množina prekrývali).

Takže, ak existuje na trhu spolu s rizikovými aktívami bezrizikový cenný papier, investor bude na základe svojich preferencií vyberať optimálne portfólio z novej efektívnej množiny reprezentovanej pre $\sigma \geq 0$ polpriamkou (5.76), pričom ak smerodajná odchýlka optimálneho portfólia $\sigma^* \in \langle 0, \sigma_t \rangle$, tak investorovo optimálne portfólio je kombináciou nákupu bezrizikového aktíva a dotykového portfólia a ak $\sigma^* \geq \sigma_t$, tak investorovo optimálne portfólio je kombináciou predaja bezrizikového aktíva a nákupu dotykového portfólia. Navyše, v prvom prípade má zrejme investor väčší odpor k riziku ako v druhom prípade.

Príklad 5.7. *Uvažujme trh s dvoma rizikovými cennými papiermi – akciami A, B z príkladu 5.3, resp. 5.6. Nech spolu s akciami existuje na trhu bezrizikový dlhopis s $r_f = 3$ %. Nájdime krivku novej efektívnej množiny a na nej bod optimálneho portfólia investora, ktorého krivky indiferencie spĺňajú:*

$$\overline{r} = c + \frac{\sigma^2}{6}, \tag{5.77}$$

kde c je hladina preferencie.

Riešenie:

Zo vzťahu (5.76) máme, že nová efektívna množina bude v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ reprezentovaná polpriamkou:

$$\overline{r} = r_f + k_t\sigma, \tag{5.78}$$

kde $\sigma \geq 0$ a $k_t = \frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t}$ je jej smernica. Hodnotu výnosnosti r_t, ani rizikovosti σ_t dotykového portfólia nepoznáme, vieme však, že v tomto bode sa bude polpriamka z (5.78) dotýkať krivky pôvodnej efektívnej množiny opísanej pre $\overline{r} \in \langle \tilde{r}, 15 \rangle$ v (5.67). Bod $(\sigma_t, \overline{r}_t)$ teda musí spĺňať:

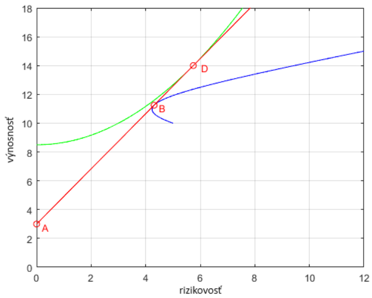
$$\begin{aligned}
\frac{r_t - r_f}{k_t} &= \sigma_t = \frac{1}{5}\sqrt{193r_t^2 - 4230r_t + 23\,625}, \\
\frac{1}{k_t} &= \frac{193r_t - 2115}{5\sqrt{193r_t^2 - 4230r_t + 23\,625}}.
\end{aligned}$$

Sústava má riešenie $r_t = 11,25$ %, $\sigma_t \doteq 4,31$ % a $k_t \doteq 1,91$. Našli sme teda bod dotykového portfólia i smernicu polpriamky v (5.78). Teraz na nej nájdime bod optimálneho portfólia

$(\overline{r}^*, \sigma^*)$ investora, ktorého krivky indiferencie vyhovujú (5.77). Pre $\overline{r}^*$, σ^* bude zrejme platiť:

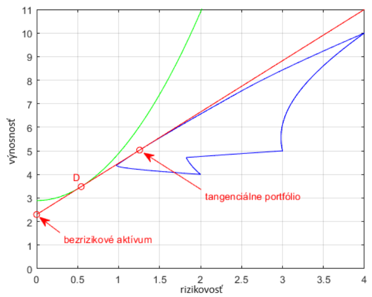
$$\begin{aligned} c^* + \frac{1}{6}(\sigma^*)^2 &= \overline{r}^* = && 3 + k_t\sigma^*, \\ \frac{1}{3}\sigma^* &= && k_t. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice bezprostredne získame $\sigma^* = 3k_t \doteq 5,74$ %. Z toho $\overline{r}^* = 3 + 3k_t^2 = 14$ %. Optimálna preferenčná hladina investora je $c^* = 8,5$. Pretože $\sigma^* > \sigma_t$, optimálne portfólio je zložené z dotykového portfólia kombinovaného s bezrizikovým požičiavaním si (predajom bezrizikového aktíva).



Obr. 5.8: Krivka novej efektívnej množiny (červenou), krivka indiferencie investora na optimálnej preferenčnej hladine (zelenou). Bod A – bezrizikové aktívum, bod B – dotykové portfólio, bod D – optimálne portfólio investora. [32] [33]

Na Obr. 5.9 je znázornená polpriamka novej efektívnej množiny portfólií pre tri rizikové aktíva α, β, γ s charakteristikami opísanými vyššie a bezrizikové aktívum. Optimálne portfólio investora je v tomto prípade kombináciou dotykového portfólia a nákupu bezrizikových dlhopisov.



Obr. 5.9: D – bod optimálneho portfólia. [32] [33]

Poznámka 5.12. *Ak uvažujeme spolu s dvojicou perfektne negatívne korelovaných akcií bez dividend α, β, ktorých ceny (a teda i výnosy) chápeme ako diskrétne náhodné premenné také, že:*

$$\begin{array}{llllll} & H: & & uS & & gW \quad s\ pp.\ p \\ & & \nearrow & & \nearrow & \\ \alpha: & S & & \beta: \quad W & & \\ & & \searrow & & \searrow & \\ & D: & & dS & & hW \quad s\ pp.\ 1-p \end{array}$$

kde $u > 1 > d > 0$ a súčasne $0 < g < 1 < h$ alebo $0 < u < 1 < d$ a súčasne $g > 1 > h > 0$, bezrizikové aktívum poskytujúce bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f > 0$ na dobu držania portfólia 1 č. j., tak je možné vhodnou kombináciou akcií α, β vytvoriť arbitrážne portfólio s výnosnosťou $\overline{r}_p = J := \frac{uh-dg-(u-d)-(h-g)}{u-d+h-g}$ (pozri poznámka 5.3), ktoré sa nachádza medzi portfóliami efektívnej množiny rizikových portfólií ako portfólio s najnižšou možnou výnosnosťou. Platí $r_f \leq J$.

Ak $r_f < J$, tak možno vytvoriť arbitráž. Nato zostrojme portfólio pozostávajúce z bezrizikového aktíva a arbitrážneho portfólia. Nech x_f označuje váhu bezrizikového aktíva v tomto portfóliu, potom výnosnosť portfólia sa rovná:

$$x_f r_f + (1 - x_f)J = J + x_f(r_f - J)$$

a je možné ju potenciálne maximalizovať do nekonečna voľbou $x_f \to -\infty$.

Ak $r_f = J$, tak arbitráž na trhu s akciami α, β a bezrizikovým aktívom neexistuje a výnosnosť portfólia pozostávajúceho z bezrizikového aktíva a arbitrážneho portfólia je rovná:

$$J + x_f(r_f - J) = J = r_f.$$

Čiže presne taká, akú poskytuje bezrizikové aktívum samotné.

Uvedené závery plne korešpondujú so závermi urobenými v sekcii 4.3.6 Dve akcie a dlhopis z podkapitoly 4.3 o ohodnocovaní akcií.

5.7 Model oceňovania kapitálových aktív

Na Markowitzov model nadväzuje model oceňovania kapitálových aktív (bližšie v [17]), pre ktorý budeme používať tiež skratku CAPM z anglického *capital asset pricing model*. Predpoklady modelu sú tieto:

1. investori ohodnocujú svoje portfólio podľa výnosnosti a rizika v horizonte jedného obdobia,

2. investori majú homogénne očakávania, t. j. nikto nepredpokladá inú výnosnosť, riziko či kovarianciu aktív než niekto iný,

3. informácie sú voľne a okamžite dostupné všetkým investorom,

4. existuje bezrizikové aktívum majúce bezrizikovú sadzbu rovnakú pre všetkých, pri ktorej môže investor požičiavať alebo si požičiavať,

5. jednotlivé aktíva sú nekonečne deliteľné,

6. trh je v rovnováhe, teda ponuka sa rovná dopytu,

7. dane a transakčné náklady sú zanedbané.

V dôsledku predpokladov modelu si všetci investori (homogénne očakávania) vyberú trhové (dotykové) portfólio, ktoré potom nakombinujú s bezrizikovým aktívom alebo požičiavaním si podľa svojich preferencií. To znamená, že optimálna kombinácia rizikových aktív môže byť stanovená bez akýchkoľvek znalostí investorových postojov k výnosnosti a rizikovosti. V rovnováhe bude mať každé rizikové aktívum nenulový podiel na skladbe trhového portfólia. Trhové portfólio je tvorené investíciami do všetkých rizikových aktív v takom pomere, že proporcia investovaná do jednotlivého aktíva zodpovedá jeho relatívnej trhovej hodnote. Ak označíme x_{Mi} váhu aktíva i podieľajúceho sa na skladbe trhového portfólia, tak $x_{Mi} = \frac{\text{celková hodnota aktíva } i \text{ na trhu}}{\text{kapitalizácia celého trhu}}$.

Príklad 5.8. *Predpokladajme, že celý trh je tvorený tromi akciami A, B, C, emitovanými v počtoch* 10 000 *kusov,* 30 000 *kusov, resp.* 40 000 *kusov. Nájdime váhy jednotlivých akcií v trhovom portfóliu.*

Riešenie:
Riešenie sa nachádza v nasledujúcej prehľadnej tabuľke:

akcia	počet kusov	cena za kus	kapitalizácia	váhy
A	10 000	10 p. j.	100 000 p. j.	$x_{MA} = \frac{1}{5} = 0,2$
B	30 000	5 p.j	150 000 p. j.	$x_{MB} = \frac{3}{10} = 0,3$
C	40 000	6, 25 p. j.	250 000 p. j.	$x_{MC} = \frac{1}{2} = 0,5$
súčty:	80 000		500 000 p. j.	1

Predstava, ktorá stojí za tým, že na skladbe trhového portfólia sa podieľajú všetky rizikové aktíva v takom pomere, v akom sa nachádzajú na trhu, vychádza z toho, že prerovnávania cien aktív vedú k trhovej rovnováhe, a je približne takáto. Ak by na trhu existovalo aktívum, ktoré by malo na skladbe portfólia väčší podiel, než je jeho podiel na trhovej kapitalizácii, teda dopyt po aktíve by prevyšoval jeho ponuku, tak trh by nebol v rovnováhe, pretože ponuka by sa pre toto konkrétne aktívum nerovnala dopytu. Veľký záujem o jeho kúpu by spôsoboval nárast jeho aktuálnej ceny, čo by viedlo k poklesu jeho očakávaného výnosu. To by však viedlo k zníženiu jeho atraktivity pre investorov a k prehodnoteniu ich postojov. Strata záujmu o jeho kúpu by viedla k ďalšiemu prerovnávaniu cien na trhu až dovtedy, kým by sa na trhu nedosiahla rovnováha a váha aktíva v trhovom portfóliu by sa neustálila na hodnote pomeru kapitalizácie aktíva voči celému trhu. Podobne, ale v opačnom smere by sa vyvíjala zmena ceny aktíva, pri ktorom by jeho ponuka prevyšovala dopyt po ňom.

V praxi sa trhové portfólio nahrádza indexami, napr. *Standard & Poor's* 500 *Stock Price Index* (S&P 500), čo je akciový index z americkej burzy obsahujúci 500 najvýznamnejších akcií, kde váhy sú rátané tak ako v príklade 5.8, alebo *DowJones*, ktorý obsahuje 30 akcií, ale váhy sú rátané iným spôsobom.

Na zjednodušenie vyjadrovania a úsporu miesta budeme v ďalšom voľne zamieňať pojem portfólio s jeho reprezentáciou v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ pomocou usporiadanej dvojice jeho charakteristík $(\sigma, \overline{r})$.

5.7.1 Priamka kapitálového trhu

V predchádzajúcej podkapitole sme hovorili o polpriamke (5.76), ktorá pre $\sigma \geq 0$ predstavovala efektívnu množinu portfólií tvorených investíciou do dotykového portfólia a bezrizikového cenného papiera. Keďže model predpokladá, že dotykovým portfóliom je trhové portfólio, prejdeme k novému vzťahu pre túto polpriamku, ktorý bude obsahovať nové označenia:

$$\overline{r} = r_f + \left(\frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M} \right) \sigma, \tag{5.79}$$

kde $\overline{r}_M$ – výnosnosť trhového portfólia, σ_M – riziko (smerodajná odchýlka) trhového portfólia a r_f – bezriziková sadzba (miera). Priamka v (5.79) sa zvykne nazývať **priamka kapitálového trhu** (z anglického *capital market line*). My budeme používať aj označenie CML, keď budeme hovoriť o tejto priamke. Na CML ležia všetky efektívne portfóliá a všetky portfóliá na nej ležiace sú lineárnou kombináciou trhového portfólia a bezrizikového požičiavania alebo požičiavania si.

5.7.2 Priamka cenných papierov

Predpokladajme, že trhové portfólio je N zložkové, teda pozostáva z N cenných papierov, z ktorých každý má na skladbe portfólia nenulový podiel, potom pre smerodajnú odchýlku trhového portfólia platí:

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} x_{Mi} x_{Mj} \sigma_{ij}} = \sqrt{x_{M1} \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \sigma_{1j} + x_{M2} \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \sigma_{2j} + \ldots + x_{MN} \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \sigma_{Nj}}$$

Označme kovarianciu aktíva i s trhovým portfóliom ako σ_{iM}, t. j.:

$$\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \sigma_{ij}, \tag{5.80}$$

potom:

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_{Mi} \sigma_{iM}}. \tag{5.81}$$

Vzťah (5.81) hovorí, že rizikovosť trhového portfólia je druhou odmocninou z váženého priemeru kovariancií jednotlivých aktív s trhovým portfóliom, kde váhami sú podiely aktív na trhovom portfóliu.

Uvažujme teraz všetky portfóliá, ktoré vzniknú kombináciou aktíva i a trhového portfólia. Nech x označuje váhu cenného papiera i v takomto portfóliu, potom $(1 - x)$ je váha trhového portfólia v takomto portfóliu. Označme krivku, na ktorej ležia, ako Mi. Dostaneme ju pre rôzne hodnoty $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pre výnosnosť $\overline{r}$ a rizikovosť σ portfólií ležiacich na krivke Mi platí:

$$\begin{aligned} \overline{r} &= f(x) = x\overline{r}_i + (1 - x)\overline{r}_M, \\ \sigma &= g(x) = \sqrt{x^2 \sigma_i^2 + 2x(1 - x)\sigma_{iM} + (1 - x)^2 \sigma_M^2}, \end{aligned}$$

Skúmajme smernicu dotyčnice ku krivke Mi v bode trhového portfólia, t. j. v bode $(\overline{r}_M, \sigma_M)$ (čiže keď $x = 0$).

Ak je funkcia g invertovateľná, tak hodnotu výnosnosti $\overline{r}$ portfólia ležiaceho na krivke Mi môžeme vyjadriť ako funkciu rizika σ tohto portfólia:

$$\overline{r} = f(x) = f(g^{-1}(\sigma)) := h(\sigma).$$

Funkcia g je určite invertovateľná aspoň na nejakom okolí bodu $x = 0$. Navyše $g(0) = \sigma_M > 0$ a keďže je spojitá, pre každé x z vhodne malého okolia bodu 0 platí $g(x) > 0$. Z toho tiež vyplýva, že pre každé x z tohto okolia existuje spojitá derivácia funkcie g:

$$g'(x) = \frac{x\sigma_i^2 + \sigma_{iM} - 2x\sigma_{iM} - \sigma_M^2 + x\sigma_M^2}{\sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)\sigma_{iM} + (1-x)^2\sigma_M^2}} = \frac{x\left(\sigma_i^2 - 2\sigma_{iM} + \sigma_M^2\right) + \sigma_{iM} - \sigma_M^2}{g(x)}.$$

Ak predpokladáme $\sigma_{iM} \neq \sigma_M^2$, tak $g'(0) = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \neq 0$ a pre každé x z dostatočne malého okolia bodu 0 platí $g'(x) \neq 0$.

Vypočítajme deriváciu funkcie h:

$$h'(\sigma) = \left(f(g^{-1}(\sigma))\right)' = f'\left(g^{-1}(\sigma)\right)\left(g^{-1}\right)'(\sigma) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(\overline{r}_i - \overline{r}_M)g(x)}{x\left(\sigma_i^2 - 2\sigma_{iM} + \sigma_M^2\right) + \sigma_{iM} - \sigma_M^2}.$$

Špeciálne:

$$h'(\sigma_M) = \frac{(\overline{r}_i - \overline{r}_M)g(0)}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{(\overline{r}_i - \overline{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}.$$

V tomto prípade $h'(\sigma_M)$ je smernica dotyčnice ku krivke Mi v bode trhového portfólia.

Využijúc potom, že smernica dotyčnice ku krivke Mi v bode trhového portfólia (trhové portfólio je efektívne portfólio) sa rovná smernici CML, t. j.:

$$\frac{(\overline{r}_i - \overline{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M},$$

dostávame vzťah pre výnosnosť cenného papiera i:

$$\overline{r}_i = r_f + \left(\frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{iM}. \tag{5.82}$$

Ide o lineárnu závislosť $\overline{r}_i$ od kovariancie cenného papiera i s trhovým portfóliom σ_{iM}. Priamka v (5.82) sa nazýva priamka cenných papierov (z anglického *security market line*). Budeme tiež používať označenie SML.

Rovnica (5.82) hovorí, že cenný papier s vyššou σ_{iM} bude mať vyšší očakávaný výnos (pretože $\overline{r}_M > r_f$). Špeciálne, ak $\sigma_{iM} = 0$, tak $\overline{r}_i = r_f$, čiže cenný papier, ktorý má nulovú kovarianciu s trhovým portfóliom, neprispieva k riziku trhového portfólia, a preto je jeho očakávaný výnos rovnaký ako výnos r_f bezrizikového cenného papiera. Ak by sme pripustili i možnosť $\sigma_{iM} = \sigma_M^2$, tak z (5.82) by sme dostali $\overline{r}_i = \overline{r}_M$. Takýto cenný papier by prispieval priemernou hodnotou k riziku trhového portfólia.

5.7.3 Beta parameter

Iný spôsob vyjadrenia SML je nasledujúci:

$$\overline{r}_i = r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i, \tag{5.83}$$

kde

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

je parameter (faktor) beta cenného papiera i. Je to významný parameter, ktorý vyjadruje, ako veľmi je cenný papier naviazaný na trh.

Ak uvažujeme portfólio s N cennými papiermi a váhami x_1, x_2,..., x_N, tak beta portfólia:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i. \tag{5.84}$$

Ukážeme, že je to skutočne tak. S využitím vzťahu (5.80) máme:

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{\sigma_{pM}}{\sigma_M^2} = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{j=1}^{N} x_{Mj}\sigma_{pj} = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{j=1}^{N} x_{Mj}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\sigma_{ij}\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\sum_{j=1}^{N} x_{Mj}\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\sigma_{iM} = \sum_{i=1}^{N} x_i\beta_i. \end{aligned}$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že ak na SML leží každý cenný papier, tak na nej leží aj každé portfólio:

$$\begin{aligned} \overline{r}_p &= \sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{N} x_i\left(r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i\right) = r_f + (\overline{r}_M - r_f)\sum_{i=1}^{N} x_i\beta_i \\ &= r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_p. \end{aligned} \tag{5.85}$$

Názov oceňovanie (*pricing*) kapitálových aktív má svoje opodstatnenie. Z (5.1) totiž máme:

$$\overline{r}_i = \frac{\overline{P}_i}{P_i} - 1, \tag{5.86}$$

kde P_i je hodnota (cena) aktíva i na začiatku sledovaného obdobia a $\overline{P}_i$ je očakávaná hodnota (cena) aktíva i na konci sledovaného obdobia. Z (5.83) potom dostaneme:

$$\overline{r}_i = \frac{\overline{P}_i}{P_i} - 1 = r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i. \tag{5.87}$$

Odtiaľ po úprave získame:

$$P_i = \frac{\overline{P}_i}{1 + r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i}. \tag{5.88}$$

Teda na ocenenie každého aktíva i na trhu N aktív stačí odhadnúť cenu aktíva $\overline{P}_i$ na konci sledovaného obdobia, t. j. určiť jeho očakávanú hodnotu, poznať výnosnosť trhového portfólia $\overline{r}_M$ a beta parameter β_i aktíva i.

5.7.4 Charakteristická priamka

Podľa CAPM sa budú ceny aktív nastavovať tak dlho, kým sa nedosiahne rovnováha, pri ktorej bude ležať každý cenný papier na SML. Ekvivalentne bude výnosnosť cenného papiera i v nasledujúcej perióde držania daná ako v (5.82). Skutočná výnosnosť cenného papiera i v nasledujúcej perióde držania bude daná charakteristickou priamkou:

$$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i, \tag{5.89}$$

kde $\varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_{\varepsilon i})$ je náhodná chyba. Napr. v prípade akcie môže ε_i predstavovať dianie vo firme, ktoré nesúvisí s okolím. Preto sa obyčajne predpokladá, že komponenty náhodných chýb výnosností nie sú korelované, t. j. kovariancia $\sigma_{\varepsilon i, \varepsilon j} = 0$ pre každé $i \neq j$. Z toho dôvodu sa tiež zvykne predpokladať, že $\sigma_{M\varepsilon i} = 0$.

5.7.5 Trhové a jedinečné riziko

Beta je dôležitá miera rizika cenného papiera, preto je vhodné vyšetriť vzťah medzi ňou a celkovým rizikom cenného papiera.

Celkové riziko cenného papiera i môžeme rozložiť na dve zložky: *trhové (systematické) riziko*, ktoré sa vzťahuje k trhovému portfóliu a *jedinečné (nesystematické) riziko*, ktoré sa spája s konkrétnym cenným papierom. Pre riziko cenného papiera i platí:

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2}. \tag{5.90}$$

Vzťah (5.90) vychádza z (5.89), resp. (5.82). Máme:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= Var(r_i) = E\left(r_i - \overline{r}_i\right)^2 = E\left(r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i - (r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i)\right)^2 \\
&= E\left((r_M - \overline{r}_M)\beta_i + \varepsilon_i\right)^2 = E\left((r_M - \overline{r}_M)^2 \beta_i^2 + 2\left(r_M - \overline{r}_M\right)\beta_i \varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) \\
&= \beta_i^2 Var(r_M) + Var(\varepsilon_i) = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2.
\end{aligned}$$

Trhové riziko $\beta_i^2 \sigma_M^2$ je spojené s rizikom trhového portfólia a parametrom beta cenného papiera i. Ak cenný papier i leží na SML, tak čím vyššia je beta cenného papiera i, tým vyššia je aj výnosnosť takéhoto cenného papiera, resp. portfólia cenných papierov. Jedinečné riziko $\sigma_{\varepsilon i}^2$ nesúvisí s beta a teda cenný papier s väčším množstvom jedinečného rizika nemusí dávať aj vyšší očakávaný výnos.

Ak uvažujme N zložkové portfólio cenných papierov s váhami x_1, x_2,..., x_N jednotlivých zložiek, potom pre jeho výnosnosť s využitím (5.89) dostaneme:

$$\begin{aligned}
r_p &= \sum_{i=1}^{N} x_i r_i = \sum_{i=1}^{N} x_i (r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i) = \\
&= r_f + \sum_{i=1}^{N} x_i (r_M - r_f)\beta_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_p + \varepsilon_p,
\end{aligned} \tag{5.91}$$

kde $\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i$ je náhodná chyba portfólia, pričom $\sigma_{\varepsilon p} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2}$ je nesystematické riziko portfólia. S využitím (5.91) a (5.85) teda pre riziko portfólia platí:

$$\sigma_p = \sqrt{\beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2}. \tag{5.92}$$

5.7.6 Diverzifikácia rizika

Uvažujme n-zložkové portfólio cenných papierov, kde $n < N$ (N je počet zložiek v trhovom portfóliu). Nech váhy jednotlivých cenných papierov v tomto portfóliu sú $x_i = \frac{1}{n}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že každý cenný papier má na skladbe portfólia rovnaký podiel a beta portfólia je aritmetickým priemerom biet jednotlivých cenných papierov:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \beta_i.$$

Ak zväčšíme počet zložiek portfólia o jednu (t. j. máme $n+1$ miesto n zložiek), tak o tom, či sa beta portfólia zväčší, či zmenší, rozhodne dodatočná hodnota β_{n+1}. Zvýšenie počtu zložiek portfólia teda vedie len k spriemerovaniu trhového rizika portfólia, keďže o ňom rozhoduje súčin $\beta_p^2 \sigma_M^2$.

Na druhej strane nesystematické riziko portfólia je určené ako:

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 + \ldots + \sigma_{\varepsilon n}^2}{n} \right).$$

Preto pri zvýšení počtu zložiek portfólia klesá jedinečné riziko, inými slovami diverzifikácia vedie k zníženiu jedinečného rizika.

Vidíme, že aj takéto jednoduché rozvrhnutie investície znižuje nesystematické riziko portfólia s rastúcim počtom cenných papierov v portfóliu.

5.7.7 Nerovnováha na trhu cenných papierov

Veľa investorov trávi mnoho času vyhľadávaním cenných papierov, ktoré sa zdajú byť nesprávne ohodnotené, t. j. buď je cenný papier **podhodnotený**, čo znamená, že jeho očakávaný výnos je vyšší než očakávaný výnos cenných papierov s porovnateľnými podstatnými atribútmi alebo je cenný papier **nadhodnotený**, čiže jeho očakávaný výnos je nižší než očakávaný výnos cenných papierov s porovnateľnými podstatnými atribútmi. Pre CAPM je jediný podstatný atribút beta a príslušný očakávaný výnos je daný SML. Ceny cenných papierov a ich očakávané výnosy sú buď v zhode s danou rovnovážnou teóriou alebo nie sú, teda existuje **nerovnováha**.

Pravdepodobnejšie je, že táto teória nie je platná a platí nejaká iná (možno zatiaľ neobjavená) rovnovážna teória. Nájsť túto teóriu je veľmi obtiažna (ak nie nemožná) úloha a investori namiesto toho, aby túto teóriu hľadali, radšej predpokladajú, že väčšina cenných papierov je ohodnotená podľa nejakej rovnovážnej teórie a ostatné sú ohodnotené nesprávne a sú v nerovnováhe. Investori sa nebudú zhodovať v tom, ktorý cenný papier je ohodnotený správne a ktorý nie. Dokonca sa môže stať, že o niektorom z cenných papierov sa budú domnievať, že je nesprávne ohodnotený, hoci bude ohodnotený správne.

Pod označením α budeme rozumieť rozdiel medzi výnosnosťou cenného papieru i a jeho rovnovážnou výnosnosťou, teda:

$$\alpha_i = r_i - \overline{r}_i.$$

Ak $\alpha_i = 0$, tak cenný papier i je v rovnováhe.

Pretože pre $\overline{r}_i$ platí (5.83), tak:

$$\alpha_i = r_i - r_f - (\overline{r}_M - r_f)\beta_i,$$

z čoho:

$$r_i = \alpha_i + r_f + (\overline{r}_M - r_f)\beta_i. \tag{5.93}$$

Pridaním náhodnej chyby dostávame skutočnú výnosnosť cenného papiera i:

$$r_i = \alpha_i + r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i. \tag{5.94}$$

5.7.8 Porovnanie dvoch prístupov

Urobme porovnanie dvoch prístupov doteraz spomínaných v tejto kapitole. Ide konštrukciu efektívnej množiny a prístup založený na charakteristických priamkach.

Ak uvažujeme N cenných papierov, potom pri konštrukcii efektívnej množiny potrebuje investor odhadnúť:

výnosnosť každého cenného papiera	N parametrov
rozptyl (varianciu) každého cenného papiera	N parametrov
kovarianciu medzi všetkými dvojicami cenných papierov	$\frac{N^2-N}{2}$ parametrov
určiť bezrizikovú sadzbu	1 parameter
spolu:	$\frac{N^2+3N+2}{2}$ parametrov

Napr. ak by $N = 100$, tak je potrebné odhadnúť $\frac{(100)^2+3(100)+2}{2} = 5151$ parametrov.

Pri charakteristických priamkach treba odhadnúť:

bezrizikovú sadzbu, výnosnosť a rozptyl trhového portfólia	3 parametre
alfa a beta koeficienty každého cenného papiera	$2N$ parametrov
rozptyl náhodnej chyby	N parametrov
spolu:	$3N + 3$ parametrov

V tomto prípade, ak $N = 100$, tak je potrebné odhadnúť $3(100) + 3 = 303$ parametrov.

5.8 Faktorové modely

Pri CAPM sme predpokladali, že výnosy cenných papierov sú závislé len od pohybu trhového portfólia. Existujú modely, v ktorých je výnos cenného papiera závislý od viacerých faktorov:

$$r_i = a_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} F_j + \varepsilon_i, \tag{5.95}$$

kde a_i je očakávaný výnos cenného papiera i pri nulovej hodnote všetkých faktorov, F_j je j-ty faktor vplývajúci na výnos cenného papiera i, kde $j = 1, 2, \ldots, k$ a k označuje počet faktorov, b_{ij} vyjadruje citlivosť cenného papiera i na faktor F_j, ε_i reprezentuje náhodnú chybu.

Príklady faktorov, ktoré môžu vplývať na výnosnosť cenného papiera sú tempo rastu HDP, pohyb úrokových sadzieb, inflácia, cena ropy atď. Pri týchto modeloch sa obyčajne predpokladá, že kovariancia $\sigma_{\varepsilon i,\varepsilon j} = 0$ pre každé $i \neq j$ a tiež $\sigma_{\varepsilon i,F_j} = 0$ pre každé i, j.

V niektorých modeloch sa tiež zvykne predpokladať, že stredná hodnota náhodnej premennej F_j je nulová pre každé j, teda $\overline{F}_j = 0$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$. Pri tomto predpoklade máme:

$$\overline{r}_i = a_i \tag{5.96}$$

pre každý cenný papier i.

5.8.1 Jednofaktorový model

Ak uvažujeme len jeden faktor F, tak z (5.95) dostaneme:

$$r_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i \tag{5.97}$$

a pre očakávaný výnos cenného papiera i platí:

$$\overline{r}_i = a_i + b_i \overline{F}. \tag{5.98}$$

Rozptyl (varianciu) cenného papiera i dostaneme z nasledujúceho výpočtu:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= Var(r_i) = E\left(r_i - \overline{r}_i\right)^2 = E\left(a_i + b_i F + \varepsilon_i - (a_i + b_i\overline{F})\right)^2 \\ &= E\left(b_i\left(F - \overline{F}\right) + \varepsilon_i\right)^2 = E\left(b_i^2\left(F - \overline{F}\right)^2 + 2b_i\left(F - \overline{F}\right)\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) \\ &= b_i^2 Var(F) + Var(\varepsilon_i) = b_i^2\sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2. \end{aligned} \tag{5.99}$$

Z toho získame:

$$\sigma_i = \sqrt{b_i^2\sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2}. \tag{5.100}$$

Pre kovarianciu cenných papierov $i \neq j$ platí:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E\left(r_i - \overline{r}_i\right)\left(r_j - \overline{r}_j\right) = E\left(b_i\left(F - \overline{F}\right) + \varepsilon_i\right)\left(b_j\left(F - \overline{F}\right) + \varepsilon_j\right) \\ &= E\left(b_i b_j\left(F - \overline{F}\right)^2 + b_i\left(F - \overline{F}\right)\varepsilon_j + b_j\left(F - \overline{F}\right)\varepsilon_i + \varepsilon_i\varepsilon_j\right) \\ &= b_i b_j Var(F) + 0 = b_i b_j \sigma_F^2. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Špeciálnym prípadom jednofaktorového modelu je CAPM, v ktorom je faktorom rozdiel $(r_M - r_f)$ a citlivosť cenného papiera i na tento faktor je meraná cez β_i. Hodnotu a_i pre CAPM dostaneme ako $a_i = \alpha_i + r_f$ pre každé i.

Očakávaný výnos cenného papiera i bude podľa (5.98):

$$\overline{r}_i = a_i + b_i\overline{F} = \alpha_i + r_f + \beta_i(\overline{r}_M - r_f), \tag{5.102}$$

čo korešponduje so vzťahom (5.93).

Pretože $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$, tak riziko cenného papiera i bude $\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2}$, ako bolo odvodené vyššie (vzťah (5.90)), ale vyplýva to aj zo vzťahu (5.100). Vychádzajúc z rovnosti (5.101) pre kovarianciu cenných papierov $i \neq j$ dostávame:

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_M^2. \tag{5.103}$$

5.8.2 Teória bezarbitrážneho oceňovania

Uvažujme jednofaktorový model a dve dobre diverzifikované portfóliá, ktoré sú obe citlivé na faktor F, každé inou nenulovou mierou $b_1 \neq b_2$, pričom tiež platí, že $a_1 \neq a_2$. Predpokladajme ďalej, že $\overline{F} = 0$. V rovnováhe dostaneme pre výnosy portfólií: $r_1 = a_1 + b_1 F$, $r_2 = a_2 + b_2 F$ a pretože $\overline{F} = 0$, tak $\overline{r}_1 = a_1$, $\overline{r}_2 = a_2$ (to vyplýva z (5.96)).

Investujme do týchto portfólií tak, že podiely (váhy) portfólií budú x a $1 - x$. Potom pre výnos takto zloženého portfólia dostaneme:

$$r_p = xr_1 + (1-x)r_2 = xa_1 + (1-x)a_2 + (xb_1 + (1-x)b_2)\,F. \tag{5.104}$$

Nech je toto portfólio bezrizikové, t. j. nájdime hodnoty váh x^*, resp. $(1 - x^*)$ tak, aby $x^* b_1 + (1 - x^*)b_2 = 0$. Tomu vyhovuje:

$$x^* = \frac{b_2}{b_2 - b_1}, \tag{5.105}$$

$$1 - x^* = \frac{b_1}{b_1 - b_2}, \tag{5.106}$$

Aby nebola arbitráž, musí platiť: $x^* a_1 + (1 - x^*)a_2 = r_f$, kde r_f je bezriziková úroková sadzba. Z toho po dosadení (5.105) za x^*, resp. (5.106) za $(1 - x^*)$ dostávame:

$$\frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{b_2 - b_1} = \frac{b_2 r_f - b_1 r_f}{b_2 - b_1}$$

Úpravou získame:

$$\frac{a_1 - r_f}{b_1} = \frac{a_2 - r_f}{b_2},$$

čo nech sa rovná nejakej konštante λ. Potom:

$$\overline{r}_1 = a_1 = r_f + b_1\lambda, \text{ resp. } \overline{r}_2 = a_2 = r_f + b_2\lambda.$$

Inými slovami bezarbitrážne oceňovanie určuje, že hodnoty a_1, a_2, b_1, b_2 a r_f nebudú stanovené ľubovoľne, ale tak, aby platilo:

$$\frac{a_1 - r_f}{b_1} = \lambda = \frac{a_2 - r_f}{b_2}.$$

Zo vzťahu (5.85) vyplýva, že pre CAPM v rovnováhe by hľadané λ malo byť také, že $\lambda = \overline{r}_M - r_f$. To však nemožno splniť, pretože CAPM je síce jednofaktorový model s faktorom $F = r_M - r_f$, ale neplatí, že $\overline{F} = 0$, t. j. neplatí, že $\overline{r}_M = r_f$.

Závery z jednofaktorového modelu možno rozšíriť pre ľubovoľný počet N cenných papierov a počet faktorov $k < N$ (bližšie v [17], resp. [22]), t. j. existujú konštanty λ_1,λ_2,…,λ_k také, že: $\overline{r}_i = r_f + \sum_{i=1}^{k} b_{ij}\lambda_j$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, N$.

Na lepšiu ilustráciu predchádzajúcich tvrdení uvedieme jednoduchý príklad pracujúci s dvoma bezdividendovými akciami A, B. Hoci tieto akcie nie sú dve dobre diverzifikované portfóliá, na lepšie pochopenie problematiky budú úplne postačujúce.

Nech cena akcie A v čase 0 je 20 p. j. a cena akcie B je 50 p. j. Nech na ceny (a teda aj na výnosy) akcií v čase 1 č. j. (doba držania portfólia tvoreného akciami A, B) vplývajú dve náhodné udalosti H, D, obe nastávajúce s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ tak, že:

$$
\begin{array}{lllllll}
 & \text{H:} & & 29 \text{ p. j.} & & 45 \text{ p. j.} & \text{s pp. } \frac{1}{2} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \\
A\textbf{:} & 20 \text{ p. j.} & & B\textbf{:} \ \ 50 \text{ p. j.} & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 & \text{D:} & & 17 \text{ p. j.} & & 65 \text{ p. j.} & \text{s pp. } \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Nech spolu s akciami vystupuje na trhu diskontný dlhopis s dobou splatnosti 1 č. j. poskytujúci bezrizikovú úrokovú sadzbu $r_f = 0,12$.

Nech r_{AH} označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie A pri udalosti H a r_{AD} označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie A pri udalosti D. Podobne nech r_{BH} označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie B pri udalosti H a r_{BD} označuje výnos (výnosovú sadzbu) akcie B pri udalosti D. Potom:

$$
\begin{aligned}
r_{AH} &= \frac{29-20}{20} = 0,45, \\
r_{AD} &= \frac{17-20}{20} = -0,15, \\
r_{BH} &= \frac{45-50}{50} = -0,1, \\
r_{BD} &= \frac{65-50}{50} = 0,3
\end{aligned}
$$

a očakávané výnosy (výnosové sadzby) akcií A, B spĺňajú:

$$
\begin{aligned}
\overline{r}_A &= \frac{1}{2}(r_{AH} + r_{AD}) = \frac{1}{2}(0,45 - 0,15) = 0,15, \\
\overline{r}_B &= \frac{1}{2}(r_{BH} + r_{BD}) = \frac{1}{2}(-0,1 + 0,3) = 0,1.
\end{aligned}
$$

Predpokladajme, že na výnosy akcií vplýva bližšie nešpecifikovaný faktor F, ktorého hodnota v čase 1 je taktiež ovplyvňovaná udalosťami H, D tak, že $F_H = 0,1$ a $F_D = -0,1$. Potom $E(F) = 0$.

Nech b_A je citlivosť výnosov akcie A na faktor F a b_B je citlivosť výnosov akcie B na faktor F. Potom musí byť splnené $b_A = 3$ a $b_B = -2$, aby bolo naplnené zadanie príkladu:

$$
\begin{aligned}
0,45 = r_{AH} &= \overline{r}_A + b_A F_H = 0,15 + 3(0,1), \\
-0,15 = r_{AD} &= \overline{r}_A + b_A F_D = 0,15 + 3(-0,1), \\
-0,1 = r_{BH} &= \overline{r}_B + b_B F_H = 0,1 - 2(0,1), \\
0,3 = r_{BD} &= \overline{r}_B + b_B F_D = 0,1 - 2(-0,1).
\end{aligned}
$$

Zvoľme váhy x_A^*, x_B^* akcií A, B v portfóliu tak, aby bolo vzniknuté portfólio bezrizikové. Vzhľadom na teoretické odvodenia uvedené vyššie (vzťahy (5.105), (5.106)) musíme dostať:

$$
x_A^* = \frac{b_B}{b_B - b_A} = \frac{2}{5}, \tag{5.107}
$$

$$
x_B^* = 1 - x_A^* = \frac{3}{5}. \tag{5.108}
$$

Aby nevznikla arbitráž, musí podľa záverov uvádzaných vyššie platiť $x_A^* \overline{r}_A + (1 - x_A^*)\overline{r}_B = r_f$. To je zrejme splnené, pretože:

$$
x_A^* \overline{r}_A + x_B^* \overline{r}_B = \frac{2}{5}(0,15) + \frac{3}{5}(0,1) = 0,12 = r_f.
$$

Konštanta λ je potom rovná

$$\lambda = \frac{\overline{r}_A - r_f}{b_A} = \frac{0,15 - 0,12}{3} = \frac{1}{100} = \frac{0,1 - 0,12}{(-2)} = \frac{\overline{r}_B - r_f}{b_B}.$$

Na záver poznamenajme, že ak by sme sa snažili skonštruovať bezrizikové portfólio pozostávajúce z akcií A, B a bezrizikového cenného papieru podieľajúcimi sa na jeho skladbe váhami x_A, x_B, x_f maximalizujúc jeho výnos technikou eliminácie rizika plynúceho zo vzniku udalostí H, D opisovanou v podkapitole 4.3 Ako ohodnocovať akcie, resp. v poznámke 5.12, tak z eliminácie dostaneme:

$$\begin{aligned} 0,45x_A - 0,1x_B &= -0,15x_A + 0,3x_B \\ 0,6x_A &= 0,4x_B \\ x_A &= \frac{2}{3}x_B \end{aligned} \tag{5.109}$$

Dosadením (5.109) do vzťahu $x_A + x_B + x_f = 1$ získame:

$$x_A = \frac{2}{5}(1 - x_f), \tag{5.110}$$

$$x_B = \frac{3}{5}(1 - x_f). \tag{5.111}$$

Z rovností (5.110) a (5.111) pre $x_f = 0$ dostávame váhy x_A^*, resp. x_B^*. Navyše výnosová sadzba takéhoto portfólia sa rovná r_f:

$$0,45x_A - 0,1x_B + r_f x_f = 0,12(1 - x_f) + 0,12x_f = 0,12 = r_f$$

a nezávisí od toho, ktorá z udalostí H, D nastane, ani od voľby x_f.

5.9 Úlohy na precvičenie

Úloha 5.1. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
cenný papier A	$r_A = 3\ \%$	$\sigma_A = 1\ \%$
cenný papier B	$r_B = 6\ \%$	$\sigma_B = 2\ \%$

Vypočítajte kovarianciu σ_{AB} výnosov cenných papierov A a B, ak korelačný koeficient ρ_{AB} výnosov cenných papierov A, B je postupne rovný $1,\ 0,5,\ 0,\ -0,5,\ -1$.
$\left[\text{\textit{Výsledok:} } \sigma_{AB} = 2(\%)^2, \sigma_{AB} = 1(\%)^2, \sigma_{AB} = 0(\%)^2, \sigma_{AB} = -1(\%)^2, \sigma_{AB} = -2(\%)^2\right]$

Úloha 5.2. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov A, B v portfóliu s celkovou hodnotou 1000 p. j., ak cenný papier A sa podieľa na skladbe portfólia v celkovej výške 230 p. j. a cenný papier B sa podieľa na skladbe portfólia v celkovej výške 770 p. j.*
$[\text{\textit{Výsledok:} } x_A = 0,23, x_B = 0,77]$

Úloha 5.3. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Zistite výnosnosť $\overline{r}_p$ portfólia cenných papierov A a B s váhami x_A, x_B vypočítanými v úlohe 5.2.*
[*Výsledok:* $\overline{r}_p = 5,31$ %]

Úloha 5.4. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Zistite rizikovosť σ_p portfólia cenných papierov A, B s váhami x_A, x_B vypočítanými v úlohe 5.2, ak $\rho_{AB} = -0,5$. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\left[\text{Výsledok: } \sigma_p = \sqrt{2,0703} \doteq 1,44\ \%\right]$

Úloha 5.5. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov A, B v portfóliu, ktorého výnosnosť je $\overline{r}_p = 4,5$ %.*
[*Výsledok:* $x_A = 0,5 = x_B$]

Úloha 5.6. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov A, B s $\rho_{AB} = 0$ v portfóliu, ktorého rizikovosť $\sigma_p = 1$ %.*
[*Výsledok: buď* $x_A = 1, x_B = 0$ *alebo* $x_A = 0,6, x_B = 0,4$]

Úloha 5.7. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov A, B formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ_p od jeho výnosnosti $\overline{r}_p$ za predpokladu, že $\rho_{AB} = -0,5$.*
$\left[\text{Výsledok: } \sigma_p = \sigma\left(\overline{r}_p\right) = \frac{1}{3}\sqrt{7\overline{r}_p^2 - 54\overline{r}_p + 108},\ \text{kde } \overline{r}_p \in \langle 3, 6\rangle\right]$

Úloha 5.8. *Na množine všetkých prípustných portfólií z úlohy 5.7 nájdite efektívnu množinu.*
$\left[\text{Výsledok: } \sigma_p = \sigma\left(\overline{r}_p\right) = \frac{1}{3}\sqrt{7\overline{r}_p^2 - 54\overline{r}_p + 108},\ \text{pre } \overline{r}_p \in \langle \tilde{r}, 6\rangle,\ \text{kde } \tilde{r} = \frac{27}{7}\ \% \doteq 3,86\ \%\right]$

Úloha 5.9. *Predpokladajte investorove preferencie v tvare $\overline{r}_p = c + 9\sigma_p^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio $\left(\sigma_p^*, \overline{r}_p^*\right)$ na efektívnej množine vypočítanej v úlohe 5.8. Zistite optimálnu hladinu preferencie c^* investora. Určte váhy x_A^*, x_B^* cenných papierov A, B v optimálnom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\left[\text{Výsledok: } \overline{r}_p^* = \frac{55}{14}\ \% \doteq 3,93\ \%, \sigma_p^* = \frac{\sqrt{763}}{42}\ \% \doteq 0,66\ \%, c^* = \frac{1}{28} \doteq 0,04, x_A^* = \frac{29}{42} \doteq 0,69, x_B^* = \frac{13}{42} \doteq 0,31\right]$

Úloha 5.10. *Pre cenné papiere A, B z úlohy 5.7 nájdite (novú) efektívnu množinu vyjadrenú ako funkčnú závislosť výnosnosti portfólia od jeho rizikovosti, ak je na trhu možnosť bezrizikového započičiavania (nákup diskontných dlhopisov na dobu držania) a vypožičiavania (predaj diskontných dlhopisov na dobu držania) s rovnakou bezrizikovou úrokovou mierou na dobu držania vo výške $r_f = 2$ %. Určte výnosnosť $\overline{r}_t$ a rizikovosť σ_t dotykového portfólia, t. j. portfólia, v ktorom sa nová efektívna množina dotýka pôvodnej efektívnej množiny. Zistite váhy x_{At}, x_{Bt} cenných papierov A, B v dotykovom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\left[\text{Výsledok: } \overline{r}_p = l\left(\sigma_p\right) = r_f + \left(\frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t}\right)\sigma_p,\ \text{pre } \sigma_p \geq 0,\ \text{kde } \overline{r}_t = \frac{54}{13}\ \% \doteq 4,15\ \%, \sigma_t = \frac{2\sqrt{21}}{13}\ \% \doteq 0,71\ \%, x_{At} = \frac{8}{13} \doteq 0,62, x_{Bt} = \frac{5}{13} \doteq 0,38\right]$

Úloha 5.11. *Predpokladajte investorove preferencie ako v úlohe 5.9. Nájdite investorovo optimálne portfólio $\left(\sigma_p^*, \overline{r}_p^*\right)$ na efektívnej množine vypočítanej v úlohe 5.10. Zistite optimálnu* *hladinu preferencie c^* investora. Určte váhy x_f, $x_t = 1 - x_f$ bezrizikového cenného papiera a dotykového portfólia v optimálnom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*

$\Big[$*Výsledok:* $\overline{r}_p^* = \frac{68}{27}\ \% \doteq 2,52\ \%, \sigma_p^* = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{7}{3}}\ \% \doteq 0,17\ \%, c^* = \frac{61}{27} \doteq 2,26, x_f = \frac{41}{54} \doteq 0,76, x_t = \frac{13}{54} \doteq 0,24\Big]$

Úloha 5.12. *Predpokladajte investorove preferencie v tvare $\overline{r}_p = c + \sigma_p^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio $\left(\sigma_p^*, \overline{r}_p^*\right)$ na efektívnej množine vypočítanej v úlohe 5.10. Zistite optimálnu hladinu preferencie c^* investora. Určte váhy x_f, $x_t = 1 - x_f$ bezrizikového cenného papiera a dotykového portfólia v optimálnom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*

$\Big[$*Výsledok:* $\overline{r}_p^* = \frac{20}{3}\ \% \doteq 6,67\ \%, \sigma_p^* = \sqrt{\frac{7}{3}}\ \% \doteq 1,53\ \%, c^* = \frac{13}{3} \doteq 4,33, x_f = -\frac{7}{6} \doteq -1,17, x_t = \frac{13}{6} \doteq 2,17\Big]$

Úloha 5.13. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov A, B formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ_p od jeho výnosnosti $\overline{r}_p$ za predpokladu, že $\rho_{AB} = -1$.*

[*Výsledok:* $\sigma_p = \sigma(\overline{r}_p) = |4 - \overline{r}_p|$, *kde* $\overline{r}_p \in \langle 3, 6\rangle$]

Úloha 5.14. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1 s $\rho_{AB} = -1$. Nájdite váhy $\tilde{x}_A$, $\tilde{x}_B$ cenných papierov A, B v arbitrážnom portfóliu. Vypočítajte jeho výnosnosť $\overline{r}_{ap}$.*

$\big[$*Výsledok:* $\tilde{x}_A = \frac{2}{3}, \tilde{x}_B = \frac{1}{3}, \overline{r}_{ap} = 4\ \%\big]$

Úloha 5.15. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.13, na ktorom vystupuje bezrizikové aktívum - diskontný dlhopis na dobu držania poskytujúci bezrizikovú úrokovú mieru $r_f = 4\ \%$. Je možné na takomto trhu vytvoriť arbitráž?*

[*Výsledok: Pretože* $r_f = \overline{r}_{ap} = 4\ \%$, *nie je to možné.*]

Úloha 5.16. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov A, B formou funkčnej závislosti výnosnosti portfólia $\overline{r}_p$ od jeho rizikovosti σ_p za predpokladu, že $\rho_{AB} = 1$.*

[*Výsledok:* $\overline{r}_p = r(\sigma_p) = 3\sigma_p$, *kde* $\sigma_p \in \langle 1, 2\rangle$]

Úloha 5.17. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov A, B formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ_p od jeho výnosnosti $\overline{r}_p$ za predpokladu $\rho_{AB} = 1$, ak váhy x_A, x_B cenných papierov A, B v portfóliu sú ľubovoľné reálne čísla spĺňajúce $x_A + x_B = 1$.*

$\Big[$*Výsledok:* $\sigma_p = \sigma(\overline{r}_p) = \frac{|\overline{r}_p|}{3}$, *kde* $\overline{r}_p \in \mathbb{R}\Big]$

Úloha 5.18. *Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi A, B z úlohy 5.1 s $\rho_{AB} = 1$. Nájdite váhy $\tilde{x}_A \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_B \in \mathbb{R}$ cenných papierov A, B spĺňajúce $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B = 1$ v portfóliu také, že portfólio s týmito váhami vykazuje nulovú rizikovosť. Vypočítajte jeho výnosnosť $\overline{r}_p$.*

[*Výsledok:* $\tilde{x}_A = 2, \tilde{x}_B = -1, \overline{r}_p = 0\ \%$]

Úloha 5.19. *Uvažujte trh s tromi rizikovými cennými papiermi A, B, C takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
cenný papier A	$r_A = 3\ \%$	$\sigma_A = 1\ \%$
cenný papier B	$r_B = 4\ \%$	$\sigma_B = 3\ \%$
cenný papier C	$r_C = 6\ \%$	$\sigma_C = 4\ \%$

Nájdite efektívnu množinu portfólií pozostávajúcich z cenných papierov A, B, C, ak kovariančná matica

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & -11 \\ -3 & -11 & 16 \end{pmatrix}$$

je kladne definitná (overte). Efektívnu množinu vyjadrite ako funkčnú závislosť rizikovosti σ_p portfólia od jeho výnosnosti $\overline{r}_p$.

$$\left[\text{Výsledok: } \sigma_p = \sigma(\overline{r}_p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{131}}\sqrt{57\overline{r}_p^2 - 458\overline{r}_p + 943}, & \text{pre } \overline{r}_p \in \langle \tilde{r}, \hat{r} \rangle \\ \\ \frac{1}{2}\sqrt{47\overline{r}_p^2 - 456\overline{r}_p + 1108}, & \text{pre } \overline{r}_p \in \langle \hat{r}, 6 \rangle \end{cases}, \ s\ \tilde{r} = \frac{229}{57}, \hat{r} = \frac{376}{77} \right]$$

Úloha 5.20. *Pre cenné papiere A, B, C z úlohy 5.19 nájdite (novú) efektívnu množinu vyjadrenú ako funkčnú závislosť výnosnosti portfólia od jeho rizikovosti, ak je na trhu možnosť bezrizikového zapožičiavania (nákup diskontných dlhopisov na dobu držania) a vypožičiavania (predaj diskontných dlhopisov na dobu držania) s rovnakou bezrizikovou úrokovou mierou na dobu držania vo výške $r_f = 3\ \%$. Určte výnosnosť $\overline{r}_t$ a rizikovosť σ_t dotykového portfólia, t. j. portfólia, v ktorom sa nová efektívna množina dotýka pôvodnej efektívnej množiny. Zistite váhy x_{At}, x_{Bt}, x_{Ct} cenných papierov A, B, C v dotykovom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*

$\Big[$*Výsledok:* $\overline{r}_p = l(\sigma_p) = r_f + \left(\frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t}\right)\sigma_p$, *pre* $\sigma_p \geq 0$, *kde* $\overline{r}_t = \frac{128}{29}\ \% \doteq 4,41\ \%, \sigma_t = \frac{\sqrt{205}}{29}\ \% \doteq 0,49\ \%, x_{At} = \frac{8}{29} \doteq 0,28, x_{Bt} = \frac{11}{29} \doteq 0,38, x_{Ct} = \frac{10}{29} \doteq 0,34$$\Big]$

Úloha 5.21. *Predpokladajte investorove preferencie v tvare $\overline{r}_p = c + 4\sigma_p^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio $\left(\sigma_p^*, \overline{r}_p^*\right)$ na efektívnej množine vypočítanej v úlohe 5.20. Zistite optimálnu hladinu preferencie c^* investora. Určte váhy x_f, $x_t = 1 - x_f$ bezrizikového cenného papiera a dotykového portfólia v optimálnom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*

$\Big[$*Výsledok:* $\overline{r}_p^* = \frac{161}{40}\ \% = 4,025\ \%, \sigma_p^* = \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{5}}\ \% \doteq 0,3579\ \%, c^* = \frac{281}{80} = 3,5125, x_f = \frac{11}{40} = 0,275, x_t = \frac{29}{40} = 0,725$$\Big]$

Úloha 5.22. *Predpokladajte investorove preferencie v tvare $\overline{r}_p = c + 2\sigma_p^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio $\left(\sigma_p^*, \overline{r}_p^*\right)$ na efektívnej množine vypočítanej v úlohe 5.20. Zistite optimálnu hladinu preferencie c^* investora. Určte váhy x_f, $x_t = 1 - x_f$ bezrizikového cenného papiera a dotykového portfólia v optimálnom portfóliu. Výsledky zaokrúhlite na štyri desatinné miesta.*

$\Big[$*Výsledok:* $\overline{r}_p^* = \frac{101}{20}\ \% = 5,05\ \%, \sigma_p^* = \frac{\sqrt{41}}{4\sqrt{5}}\ \% \doteq 0,7159\ \%, c^* = \frac{161}{40} = 4,025, x_f = -\frac{9}{20} = -0,45, x_t = \frac{29}{20} = 1,45\Big]$

Úloha 5.23. *Uvažujte trh so štyrmi rizikovými cennými papiermi A, B, C, D takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
cenný papier A	$r_A = 3\ \%$	$\sigma_A = 1\ \%$
cenný papier B	$r_B = 4\ \%$	$\sigma_B = 2\ \%$
cenný papier C	$r_C = 5\ \%$	$\sigma_C = 3\ \%$
cenný papier D	$r_D = 8\ \%$	$\sigma_D = 4\ \%$

Nájdite nezáporné váhy $\tilde{x}_A$, $\tilde{x}_B$, $\tilde{x}_C$, $\tilde{x}_D$ cenných papierov A, B, C, D v arbitrážnom portfóliu také, že $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B + \tilde{x}_C + \tilde{x}_D = 1$, ak kovariančná matica

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte výnosnosť $\overline{r}_{ap}$ arbitrážneho portfólia.

$\big[$*Výsledok:* $\tilde{x}_A = \frac{4}{7}, \tilde{x}_B = \frac{2}{7}, \tilde{x}_C = 0, \tilde{x}_D = \frac{1}{7}, \overline{r}_{ap} = 4\ \%\big]$

Úloha 5.24. *Uvažujte trh so štyrmi rizikovými cennými papiermi A, B, C, D takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:*

	výnosnosť	*rizikovosť*
cenný papier A	$r_A = 3\ \%$	$\sigma_A = 1\ \%$
cenný papier B	$r_B = 4\ \%$	$\sigma_B = 2\ \%$
cenný papier C	$r_C = 5\ \%$	$\sigma_C = 3\ \%$
cenný papier D	$r_D = 8\ \%$	$\sigma_D = 4\ \%$

Nájdite váhy $\tilde{x}_A \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_B \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_C \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_D \in \mathbb{R}$ cenných papierov A, B, C, D v arbitrážnom portfóliu také, že $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B + \tilde{x}_C + \tilde{x}_D = 1$, ak kovariančná matica

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte výnosnosť $\overline{r}_{ap}$ arbitrážneho portfólia.

$\big[$*Výsledok:* $\tilde{x}_A = \frac{3}{2}, \tilde{x}_B = 0, \tilde{x}_C = -\frac{1}{2}, \tilde{x}_D = 0, \overline{r}_{ap} = 2\ \%\big]$

Kapitola 6

Finančné deriváty

Na finančných trhoch sa obchoduje so základnými investičnými nástrojmi, ako sú napr. akcie a dlhopisy, v prípade devízového trhu peniaze a ich ekvivalenty, alebo s **derivátmi** - odvodeninami, t. j. nástrojmi, ktorých cena alebo výnos sú odvodené (derivované) od základného investičného nástroja.
K základným typom derivátov zaraďujeme:

- forwardy,
- futures,
- opcie,
- swapy.

Forward (forwardový kontrakt) je dohoda dvoch strán, v ktorej jedna strana (kupujúci) súhlasí s kúpou podliehajúceho aktíva (z anglického *underlying asset*) alebo tiež objektu kontraktu (môže ním byť: akcia, dlhopis, mena, tovar) od protistrany (predávajúceho) v predpísanom čase v budúcnosti (dátum vypršania kontraktu – *maturity, expiry*) za cenu stanovenú v okamihu uzatvorenia kontraktu.

Obe strany v kontrakte veľmi presne špecifikujú podmienky týkajúce sa množstva a kvality podliehajúceho aktíva, ako aj spôsob a miesto dodania. Obe strany sú vystavené riziku, že protistrana podmienky kontraktu nedodrží (kreditné riziko). Na burze je toto riziko prakticky vylúčené, ale nie je to tak, ak sa kontrakt uzatvára na mimoburzovom trhu.

Uzavretie forwardového kontraktu sa dá chápať aj ako hra – stávka (za presne stanovených podmienok), či bude cena podkladového aktíva v čase vypršania vyššia alebo nižšia, než je cena dohodnutá v kontrakte, z čoho vyplýva, že jedna z protistrán prehrá.

V časti o dlhopisoch sme sa venovali forwardovým kontraktom, v ktorých bol podkladovým aktívom dlhopis. Takýto forward zaraďujeme medzi úrokové forwardy. Poznáme tiež forwardy menové, akciové, komoditné, úverové atď.

Ako príklad forwardu z bežného života môžeme uviesť donášku jedla do domu, pri ktorej si za vopred stanovenú cenu objednáte jedlo vo vybranej reštaurácii, kde ho pripravia a do nejakého dohodnutého času dovezú (v tomto bode paralela s forwardom ako nástrojom finančného trhu mierne „pokrivkáva“, pretože v našom príklade nie je presne stanovený čas vypršania kontraktu). Objednávateľ je v tomto prípade kupujúci, ktorý dúfa, že jedlo príde včas a v požadovanej kvalite. Na druhej strane je reštaurácia, ktorá má nejaké náklady spojené s prípravou a rozvozom jedál. Predávajúci je teda tiež vystavený riziku spojeného s možnosťou, že objednávateľ jedlo neprevezme alebo nebude ochotný zaň zaplatiť dohodnutú sumu.

Futures kontrakty sa odvíjajú od forwardových kontraktov, na rozdiel od nich však majú veľmi presnú štruktúru a pevne stanovené podmienky, pri ktorých môžu byť uzatvorené. Na rozdiel od forwardov, pri ktorých vysporiadanie prebehne až v čase maturity, futures kontrakty majú nejaký rozsah doručovacích dátumov a vysporiadanie prebieha denne. Ďalším podstatným rozdielom je, že futures sa obchodujú vždy na organizovanej burze a teda protistranou je pri každom obchode burza (je kupujúcim a zároveň predávajúcim), pričom vysporiadanie kontraktu je garantované zúčtovacím centrom, anglicky *clearing house*. Štruktúra futures transakcií minimalizuje riziko nedodržania podmienok kontraktu.

Swapy (swapové transakcie) sú dohody dvoch alebo viacerých strán o výmene peňažných tokov počas obdobia v budúcnosti, pričom zvyčajne aspoň jedna protistrana akceptuje, že peňažné toky, ktoré bude platiť, resp. prijímať budú určené na základe vývoja ceny podkladového aktíva (komodita, úroková sadzba, výmenný kurz) v budúcnosti. Swap je ekvivalentom série forwardových kontraktov. Najčastejšie sa vyskytujú úrokové a menové swapy.

Uveďme príklad úrokového swapu. Spoločnosť súhlasí, že bude platiť úroky z kapitálu pri vopred dohodnutej úrokovej sadzbe za vopred dohodnuté časové obdobie a na oplátku bude prijímať od protistrany platby úrokov z toho istého objemu kapitálu za rovnaké obdobie ale pri plávajúcej úrokovej sadzbe (LIBOR, EURIBOR).

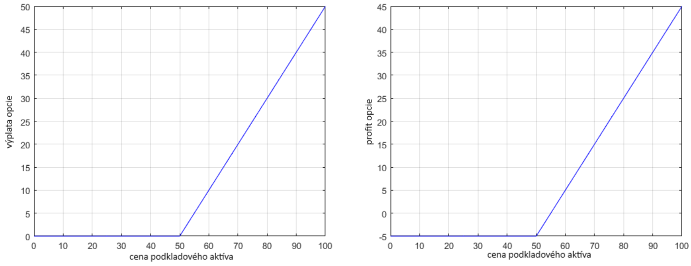
Uveďme tiež príklad menového swapu. Spoločnosť súhlasí, že bude platiť úroky z kapitálu v jednej mene pri vopred dohodnutej úrokovej sadzbe spojenej s úrokovaním v tejto mene za vopred dohodnuté časové obdobie a ako odvetu bude za rovnaké obdobie prijímať od protistrany platby úrokov z objemu kapitálu v inej mene určenom na základe výmenného kurzu a to buď pri fixnej alebo pri plávajúcej úrokovej sadzbe spojenej s úrokovaním v inej mene.

Opcia (opčný kontrakt) je kontrakt, ktorého majiteľ má právo kúpiť (kúpna opcia alebo tiež call opcia) alebo predať (predajná opcia alebo put opcia) podkladové aktívum v predpísanom čase (opcia európskeho typu) alebo do predpísaného času (opcia amerického typu) za vopred dohodnutú cenu (realizačnú cenu, anglicky *strike price* alebo *exercise price*). Cena opcie (*option premium*) je cena za toto právo. Medzi vypisovateľmi opcií a ich kupujúcimi existuje obyčajne sprostredkovateľ, ktorým je burza a garanciu splnenia podmienok vykonáva zúčtovacie centrum. Avšak obchoduje sa s nimi aj na OTC trhu. Opcie sa obyčajne kupujú v balíku po sto kusoch.

Výplatný (payoff) diagram vyjadruje závislosť hodnoty opčného kontraktu od ceny podkladového aktíva v čase vypršania opcie, resp. realizácie opcie.

Profit diagram vyjadruje závislosť hodnoty opčného kontraktu od ceny podkladového aktíva v čase vypršania opcie, resp. realizácie opcie, zníženú o opčnú prémiu (cenu opcie). Profit diagram teda vyjadruje zisk (profit) držiteľa opcie v čase jej vypršania, resp. realizácie.

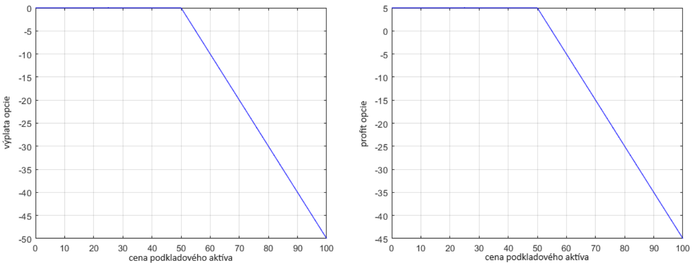
Na Obr. 6.1 môžeme vidieť výplatný diagram a profit diagram držiteľa kúpnej opcie.



Obr. 6.1: Výplatný diagram (vľavo) a profit diagram (vpravo) držiteľa call opcie s realizačnou cenou 50 p. j. a cenou 5 p. j. [32] [33]

Pretože ide o kúpnu opciu, držiteľ opcie má právo (nie však povinnosť) kúpiť podkladové aktívum za dohodnutú realizačnú cenu 50 p. j. V prípade, že hodnota aktíva (na Obr. 6.1 vodorovná os) je v čase splatnosti opcie nižšia alebo rovnaká ako realizačná cena, tak držiteľ opcie má možnosť toto právo nevyužiť a opciu ponechať nerealizovanú. V takom prípade je hodnota opčného kontraktu (na Obr. 6.1 vertikálna os vo výplatnom diagrame) nulová. Ak je hodnota aktíva väčšia než realizačná cena, držiteľ opcie využije právo kúpiť podkladové aktívum za realizačnú cenu. Vzápätí môže toto aktívum predať na trhu za vyššiu cenu, a preto je hodnota opčného kontraktu (na Obr. 6.1 vertikálna os vo výplatnom diagrame) kladná, rovnajúca sa rozdielu ceny aktíva a realizačnej ceny. Ak ponechá držiteľ opcie opciu nerealizovanú, prichádza o opčnú prémiu – cenu opcie, ktorú zaplatil za právo opciu nerealizovať. V takom prípade je zisk držiteľa opcie záporný. Držiteľ opcie je teda v strate, v tomto prípade 5 p. j. (na Obr. 6.1 vertikálna os v profit diagrame). Aj v prípade, že opciu realizuje, je profit držiteľa opcie plynúci z jej realizácie znížený o cenu opcie (na Obr. 6.1 vertikálna os v profit diagrame). Kým strata držiteľa opcie je limitovaná cenou opcie, ktorú zaplatí pri jej kúpe, jeho zisk môže byť potenciálne nekonečne veľký, pretože je obmedzený iba výškou hodnoty podkladového aktíva, ktorá môže do času splatnosti opcie, resp. jej realizácie významne narásť.

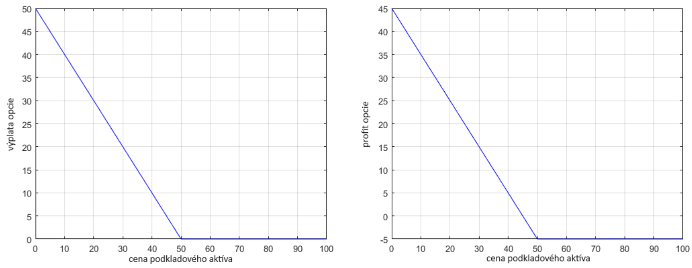
Na Obr. 6.2 sa nachádza výplatný diagram a profit diagram vypisovateľa kúpnej opcie.



Obr. 6.2: Výplatný diagram (vľavo) a profit diagram (vpravo) vypisovateľa call opcie s realizačnou cenou 50 p. j. a cenou 5 p. j. [32] [33]

Z pohľadu predávajúceho opcie je situácia s výplatným diagramom a profit diagramom opačná, pretože vypisovateľ opcie má záujem, aby hodnota podkladového aktíva bola v čase splatnosti opcie nižšia než 50 p. j. alebo aspoň taká, keďže vtedy opciu držiteľ opcie nebude realizovať a profit vypisovateľa opcie ostane v plnej výške ceny opcie, v tomto prípade 5 p. j. Akonáhle opciu držiteľ zrealizuje, vypisovateľ má povinnosť predať podkladové aktívum držiteľovi opcie za realizačnú cenu, teda za cenu nižšiu než je cena aktíva na trhu, a preto vypisovateľ opcie na realizácii opcie stráca. Keď hodnota podkladového aktíva prekročí 55 p. j., vypisovateľ opcie sa dostane do straty. Táto strata nie je ničím obmedzená a môže byť veľmi veľká, ak je cena podkladového aktíva v čase realizácie opcie jej držiteľom vysoká. Na druhej strane profit vypisovateľa opcie je obmedzený iba na výšku opčnej prémie, ktorá je často iba zlomkom ceny podkladového aktíva. Z tohto hľadiska teda badať medzi držiteľom a vypisovateľom istý nepomer v ich vzájomnom postavení.

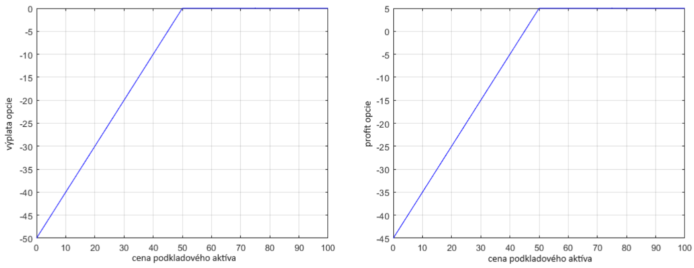
Na Obr. 6.3 môžeme vidieť výplatný diagram a profit diagram držiteľa predajnej opcie.



Obr. 6.3: Výplatný diagram (vľavo) a profit diagram (vpravo) držiteľa put opcie s realizačnou cenou 50 p. j. a cenou 5 p. j. [32] [33]

Pretože ide o predajnú opciu, držiteľ opcie má právo (nie však povinnosť) predať podkladové aktívum za dohodnutú realizačnú cenu 50 p. j. V prípade, že cena aktíva (na Obr. 6.3 vodorovná os) je v čase splatnosti opcie vyššia alebo rovnaká ako realizačná cena, tak držiteľ opcie má možnosť toto právo nevyužiť a opciu ponechať nerealizovanú. V takom prípade je hodnota opčného kontraktu (na Obr. 6.3 vertikálna os vo výplatnom diagrame) nulová. Ak je cena aktíva nižšia než realizačná cena, držiteľ opcie môže nakúpiť na trhu aktívum za trhovú cenu a vzápätí využiť právo predať podkladové aktívum vypisovateľovi opcie za realizačnú cenu vyššiu než cena aktíva. Preto je hodnota opčného kontraktu (na Obr. 6.3 vertikálna os vo výplatnom diagrame) kladná, rovnajúca sa rozdielu realizačnej ceny a ceny aktíva. Ak ponechá držiteľ opcie opciu nerealizovanú, prichádza o opčnú prémiu – cenu opcie, ktorú zaplatil za právo opciu nerealizovať. V takom prípade je zisk držiteľa opcie záporný. Držiteľ opcie je teda v strate, v tomto prípade 5 p. j. (na Obr. 6.3 vertikálna os v profit diagrame). Aj v prípade, že opciu realizuje, je profit držiteľa opcie plynúci z jej realizácie znížený o cenu opcie (na Obr. 6.3 vertikálna os v profit diagrame). Strata držiteľa opcie je limitovaná cenou opcie, ktorú zaplatí pri jej kúpe. Pretože cena aktíva nemôže byť záporná, je i jeho zisk obmedzený. Potenciálne najväčší zisk by držiteľ opcie dosiahol pri jej realizácii v situácii, keď by cena aktíva bola nulová.

Na Obr. 6.4 sa nachádza výplatný diagram a profit diagram vypisovateľa predajnej opcie.



Obr. 6.4: Výplatný diagram (vľavo) a profit diagram (vpravo) vypisovateľa call opcie s realizačnou cenou 50 p. j. a cenou 5 p. j. [32] [33]

Z pohľadu predávajúceho opcie je situácia s výplatným diagramom a profit diagramom opačná, pretože vypisovateľ opcie má záujem na tom, aby cena podkladového aktíva bola v čase splatnosti opcie rovná aspoň 50 p. j., keďže v takom prípade opciu držiteľ opcie nebude realizovať a profit vypisovateľa opcie ostane v plnej výške ceny opcie, v tomto prípade 5 p. j. Akonáhle opciu držiteľ zrealizuje, vypisovateľ má povinnosť kúpiť podkladové aktívum od držiteľa opcie za realizačnú cenu, teda za cenu vyššiu než je cena aktíva na trhu, a preto vypisovateľ opcie na realizácii opcie stráca. Keď cena podkladového aktíva klesne pod 45 p. j., vypisovateľ opcie sa dostane do straty. Táto strata je limitovaná. Najväčšia by bola, keby bola cena podkladového aktíva nulová. V tomto prípade sa maximálna možná strata rovná 45 p. j. Rovnako ako strata aj profit vypisovateľa opcie je obmedzený, avšak iba na výšku opčnej prémie.

Finančné deriváty sú veľmi atraktívnym finančným nástrojom. Ak má investor záujem vypísať alebo kúpiť nejaký derivát, obyčajne ľahko nájde protistranu. Obchodníkov s derivátmi môžeme rozdeliť do nasledujúcich kategórií:

- obchodník chrániaci svoju investíciu (anglicky *hedger*),
- špekulant (anglicky *speculator*),
- obchodník vyhľadávajúci arbitrážne príležitosti (anglicky *arbitrageur*).

Jednotlivé kategórie predstavíme na príklade obchodníka s opciami.

Uvažujme akciu α, ktorá sa v čase 0 predáva na trhu za 20 p. j. za kus. Nech investor I_1 je obchodník, ktorý je v čase 0 vlastníkom tisícky kusov akcie α, t. j. hodnota imania investora uložená v týchto akciách je 20 000 p. j. Investor I_1 sa obáva, že v priebehu nasledujúceho mesiaca môže dôjsť k poklesu cien akcií α a preto sa rozhodne chrániť svoju investíciu kúpou európskych put opcií na akcie α s dobou splatnosti 1 mesiac a realizačnou cenou rovnou súčasnej cene akcie. Nech cena opcie je 1 p. j. za kus, potom investor pri kúpe 1000 kusov týchto opcií zaplatí 1000 p. j. Ak potom cena akcie o mesiac neskôr skutočne klesne, napr. na 15 p. j. za kus, tak opčné kontrakty mu umožňujú predaj 1000 kusov akcie α za pôvodnú cenu 20 p. j. za kus. Investor kúpou opcií ochránil svoju investíciu a ich realizáciou získal pôvodnú hodnotu investovaného imania. Po odrátaní opčnej prémie 1000 p. j., ktorú zaplatil v čase 0, mu ostane 19 000 p. j. Ak by však investor v čase 0 neurobil nákup opcií, hodnota portfólia jeho akcií by po mesiaci poklesla z pôvodných 20 000 p. j. na 15 000 p. j. Ak sa investor v svojom odhade mýlil a cena akcie α po mesiaci vzrastie na hodnotu väčšiu než 20 p. j., napr. 27 p. j., investor síce stratil 1000 p. j. investovaných do nákupu opcií, ktoré nakoniec nerealizoval, ale hodnota jeho portfólia narástla na 27 000 p. j.

Uvažujme teraz iného investora I_2, ktorý na rozdiel od investora I_1 predpokladá, že cena akcie α by mohla po mesiaci vzrásť a tomu sa rozhodne prispôsobiť svoju stratégiu. Rozhodne sa, že svoje presvedčenie podporí nákupom európskych kúpnych opcií na akciu α s dobou splatnosti 1 mesiac a realizačnou cenou 22 p. j., ktorých cena za kus je 1 p. j. Nakúpi 2000 kusov týchto opcií v celkovej sume 2000 p. j. Ak cena akcie α skutočne o mesiac neskôr narastie na 27 p. j., investor I_2 zrealizuje všetky svoje opcie a nakúpi 2000 kusov akcií za 44 000 p. j., ako mu umožňujú podmienky opčného kontraktu. Tieto akcie vzápätí predá za trhovú cenu 27 p. j. za kus, čo mu prinesie 54 000 p. j. Po odrátaní 2000 p. j. za nákup opcií činí jeho zisk 8000 p. j. Ak by investor v čase 0 volil miesto nákupu kúpnych opcií priamo nákup akcií, jeho počiatočné imanie by mu dovoľovalo nakúpiť 100 kusov akcií za 20 p. j. za kus. O mesiac neskôr by mohol tieto akcie predať za cenu 27 p. j. za kus, čo by mu prinieslo zisk vo výške $2700 - 2000 = 700$ p. j. Špekulácia s nákupom kúpnych opcií oproti nákupu akcií samotných mu teda vyniesla zisk viac ako desaťnásobne väčší. Ak by však cena akcie klesla na 15 p. j. za kus, investor I_2 by bol pri priamom nákupe akcií v strate $2000 - 1500 = 500$ p. j., kým pri kúpe opcií by dosiahol stratu 2000 p. j., keďže by žiadnu z opcií nerealizoval.

Uvažujme ešte tretí typ investora, ktorým je arbitražér. Arbitražér sa zaoberá vyhľadávaním arbitrážnych príležitostí. S arbitrážou sme sa stretli už v predchádzajúcich kapitolách. Pripomeňme si, že arbitráž predstavuje bezrizikovú možnosť kladného zisku obchodovaním súčasne na viacerých trhoch alebo na jednom trhu s nekompatibilnými cenami aktív, v prípade trhu s derivátmi cenami derivátov, resp. podkladových aktív týchto derivátov. Ak investor I_3 správne odhaduje, že cena akcie α za mesiac s nejakou nenulovou pravdepodobnosťou vzrastie na 27 p. j. alebo s nenulovou pravdepodobnosťou klesne na 15 p. j., môže sa pokúsiť využiť núkajúcu sa arbitrážnu príležitosť.

Predpokladajme, že bezriziková úroková sadzba na trhu je nulová. Nech ako v predchádzajúcom sa cena európskej put opcie na akciu α s dobou splatnosti 1 mesiac a realizačnou cenou 20 p. j. rovná 1 p. j. rovnako ako cena európskej call opcie na akciu α s dobou splatnosti 1 mesiac a realizačnou cenou 22 p. j. Investor I_3 sa rozhodne pre nasledujúcu stratégiu. V čase 0 nakúpi 1000 kusov akcií α za 20 p. j. za kus a 2400 kusov put opcií v cene 1 p. j. za kus. Celkovo v čase 0 teda zaplatí 22 400 p. j. Ak o mesiac neskôr stúpne cena akcie α na 27 p. j. za kus, investor predá všetky svoje akcie zakúpené v čase 0, ale nezrealizuje žiadnu z put opcií, pretože nevyužije možnosť predávať akcie za realizačnú cenu 20 p. j., keď na trhu možno jednu akciu predať za 27 p. j. Predajom akcií nadobudne hotovosť 27 000 p. j. Ak o mesiac neskôr cena akcie α klesne na 15 p. j. za kus, investor zrealizuje všetky opcie, ktoré mu umožňujú predávať akciu za 20 p. j. za kus, hoci na trhu je cena akcie α 15 p. j. za kus. Na to potrebuje vlastniť 2400 kusov akcií α. K dispozícii má 1000 kusov, ktoré zakúpil v čase 0.

Zvyšných 1400 kusov nakúpi na trhu za 15 p. j. za kus a vzápätí predá za 20 p. j. za kus. Jeho príjem i v tomto prípade činí 2400(20 p. j.) − 1400(15 p. j.) = 27 000 p. j. Investor eliminoval riziko spojené s neistotou vzhľadom nato, ktorá z udalostí ovplyvňujúcich cenu akcie nastane a pre oba možné prípady dosiahne kladný zisk vo výške 27 000 − 22 400 = 4600 p. j. Na trhu existuje arbitráž a investor ju využil.

Investor I_3 však dokáže využiť arbitráž vhodnou stratégiou spojenou s investovaním do call opcií. Predpokladajme, že v čase 0 je investor držiteľom portfólia 1000 kusov akcií α, ktoré sa rozhodne predať a zo sumy 20 000 p. j. vyčlení 2400 p. j. na nákup 2400 kusov opcií. Ak o mesiac neskôr vzrastie cena akcie na 27 p. j. za kus, zrealizuje všetky opcie a nakúpi 2400 kusov akcií za 22 p. j. za kus v celkovej výške 52 800 p. j. Z toho si ponechá 1000 kusov a zvyšok rozpredá za trhovú cenu 27 p. j. za kus. Obdrží 37 800 p. j. Keďže z predaja akcií v čase 0 mu ostalo 17 600 p. j. Jeho celkové príjmy 37 800 + 17 600 = 55 400 p. j. prevyšujú jeho celkové náklady 52 800 p. j. o 2600 p. j. Jeho zisk je teda 2600 p. j. a 1000 kusov akcie α, ktoré vlastnil v čase 0 má o mesiac neskôr späť. Podobne, ak o mesiac neskôr cena akcie klesne na 15 p. j. za kus, investor nebude realizovať ani jednu call opciu, pretože nebude nakupovať akcie za realizačnú cenu 22 p. j. za kus, ak ich môže kúpiť za trhovú cenu 15 p. j. za kus. Zo 17 600 p. j., ktoré mu ostali z času 0, vyčlení 15 000 p. j. na nákup 1000 kusov akcií za trhovú cenu. Zvyšných 2600 p. j. predstavuje jeho bezrizikový zisk. Opäť platí, že investor eliminoval riziko spojené s neistotou vzhľadom nato, ktorá z udalostí ovplyvňujúcich cenu akcie nastane a pre oba možné prípady dosiahol kladný zisk vo výške 2600 p. j. Na trhu teda existuje arbitráž a investor ju využil.

Existencia arbitrážnych príležitostí sa premietne do okamžitej reakcie investorov, ktorí sa ich rozhodnú využiť, čím sa priamo zaslúžia o ich zánik. Z týchto dôvodov je výskyt arbitráže v praxi jav zriedkavý a každý dobrý model oceňovania by práve preto mal zohľadňovať princíp žiadna arbitráž. Inými slovami teoretické oceňovanie derivátov by malo byť bezarbitrážne, čomu sa budeme venovať v nasledujúcej podkapitole.

6.1 Bezarbitrážne oceňovanie derivátov

Pri odvodzovaní bezarbitrážnych cien derivátov budeme uvažovať splnenie nasledujúcich predpokladov:

1. vylúčenie arbitráže (princíp žiadna arbitráž),
2. za aktuálnu cenu možno kúpiť/predať ľubovolné množstvo podkladového aktíva (aj desatinný počet kusov),
3. predpokladá sa konštantná úroková miera na obdobie vypísania derivátu pri spojitom úrokovaní,
4. pri tejto úrokovej miere možno ľubovoľne veľa požičiavať aj si požičiavať,
5. informácie sú voľne a okamžite dostupné všetkým investorom,

6. dane sú nulové a transakčné náklady zanedbané.

Nech T označuje dobu splatnosti derivátu, t. j. dobu od vypísania a predania derivátu v čase 0 do jeho maturity v čase T. Keďže predpokladáme konštantnú úrokovú sadzbu R na obdobie vypísania derivátu pri spojitom úrokovaní, tak 1 p. j. prinesie za obdobie T držiteľovi dlhopisu e^{RT} p. j. Spojitá úroková sadzba R je sadzba na obdobie od času 0 do času T, ktorá sa počas tohto obdobia nemení. Teda predpokladáme $R(T_0, T) \equiv R$ pre každé $T_0 \in \langle 0, T\rangle$. V ďalšom budeme uvažovať $R \geq 0$. Ako sme vysvetlili už v časti 4.1.1 o dlhopisoch, používanie spojitého úrokovania má oproti diskrétnemu isté výhody a v prípade nutnosti možno previesť princípom ekvivalencie spojitú úrokovú sadzbu na diskrétnu.

Na oceňovanie podkladového aktíva použijeme binárne stromy a pravdepodobnostný model oceňovania, s ktorými sme sa stretli už v časti 4.3.4. Teda na cenu aktíva S_0 v čase 0 vplývajú dve náhodné udalosti H a D, ktoré ovplyvnia cenu aktíva v čase T tak, že cena aktíva narastie pri vzniku udalosti H na $S_H > S_0$ alebo poklesne pri vzniku udalosti D na $S_D < S_0$. Pravdepodobnosť vzniku udalosti H označíme $p \in (0, 1)$ a teda pravdepodobnosť vzniku udalosti D bude $1 - p$. Schému vývoja ceny podkladového aktíva môžeme symbolicky vyjadriť na binárnom strome $\mathcal{B}_S$:

udalosť	pp. vzniku udalosti	cena aktíva v čase 0		cena aktíva v čase T
H:	p			S_H
			$\nearrow$	
		S_0		
			$\searrow$	
D:	$1 - p$			S_D

Napr. v predchádzajúcej časti o rôznych druhoch investorov (hedger, špekulant, arbitražér) sme uvažovali ako aktívum bezdividendovú akciu α, ktorej cenový vývoj možno zachytiť na nasledujúcom binárnom strome:

udalosť	pp. vzniku udalosti	cena aktíva v čase 0		cena aktíva v čase T
H:	p			27 p. j.
			$\nearrow$	
		20 p. j.		
			$\searrow$	
D:	$1 - p$			15 p. j.

kde $T = \frac{1}{12}$ roka (t. j. 1 mesiac). Hodnota pravdepodobnosti p síce špecifikovaná nebola, ale bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že $p = \frac{1}{2} = 1 - p$.

Teraz urobíme kľúčový predpoklad o vývoji ceny podkladového aktíva:

$$0 < S_D < S_0 \leq S_0\mathrm{e}^{RT} < S_H. \tag{6.1}$$

Predpoklad (6.1) je úplne prirodzený. Ak by totiž $S_0\mathrm{e}^{RT} \geq S_H$, tak sa neoplatí investovať do rizikového aktíva, pretože to bezrizikové prináša pri všetkých možnostiach (v tomto prípade obe udalosti H, D) najvyšší výnos. Každý investor, ktorý by sa rozhodol investovať na takomto trhu, by úplne eliminoval nákup rizikových aktív a uprednostnil by nákup dlhopisov. Absencia podkladového aktíva by však nedala vzniknúť derivátu tohto aktíva, ktorý by tak nebolo možné oceniť. Na druhej strane, ak by $S_0 e^{RT} \leq S_D$, neoplatí sa investovať do dlhopisov a všetky investície by smerovali výlučne do rizikových aktív, keďže aj ten najnižší odhadovaný výnos rizikového aktíva by bol aspoň taký ako bezrizikový úrok. To by viedlo k tomu, že na takomto trhu by úplne absentoval záujem o bezrizikové aktívum a teda by prípadný arbitrážny výnos, ktorý je tiež bez rizika, nebolo možné s ničím adekvátnym porovnávať. Triviálny predpoklad $S_D > 0$ p. j. vychádza z toho, že ceny akéhokoľvek aktíva sú v reálnom svete zvyčajne kladné čísla. Nerovnosť $S_0 \leq S_0 e^{RT}$ je iba priamym dôsledkom predpokladu $R \geq 0$, ktorý sme urobili vyššie. Nerovnosť $S_D < S_0$ indikuje, že pri vzniku udalosti D skutočne príde k poklesu ceny aktíva a súvisí s možnosťou, že $R = 0$.

Poznamenajme, že akcia α spĺňa vyššie popísaný predpoklad (6.1), pretože $S_H = 27$ p. j. $> S_0 e^{RT} = S_0 = 20$ p. j. $> S_D = 15$ p. j. > 0 p. j. a spojitá bezriziková úroková sadzba R bola uvažovaná nulová.

Hodnota derivátu je prirodzene odvodená od hodnoty podkladového aktíva. Napr. hodnota predajnej opcie na akciu α bude v čase splatnosti opcie rovná 0 p. j. pri vzniku udalosti H a 5 p. j. pri vzniku udalosti D. Je to preto, lebo realizačná cena v opcii je 20 p. j. Ak nastane udalosť H, tak cena podkladového aktíva – akcie α je 27 p. j., čo je viac než realizačná cena, teda cena, za ktorú má právo držiteľ opcie predávať akcie α. Pretože pre držiteľa opcie nemá zmysel predávať za dohodnutú realizačnú cenu 20 p. j., keďže na trhu možno predať akciu α za 27 p. j., držiteľ opcie svoje právo plynúce z držby opcie nevyužije a teda hodnota opcie je nulová. Ak nastane udalosť D, tak cena akcie α je 15 p. j., čo je menej než realizačná cena opcie, a preto sa oplatí držiteľovi opcie svoje právo plynúce z držby opcie využiť, keďže mu umožňuje predaj akcie za 20 p. j. Hodnota opcie v tomto prípade teda bude určená rozdielom $20 - 15 = 5$ p. j. Hodnota opcie v čase 0 bola uvažovaná ako 1 p. j., čo zrejme nebola bezarbitrážna cena, keďže sme ukázali, že investor s takto ocenenou opciou dokáže využiť vzniknutú arbitrážnu príležitosť. Ak by sme oceňovali opciu bezarbitrážne, jej cena v čase 0 musí byť iná než 1 p. j.

Podobne hodnota kúpnej opcie na akciu α bude závisieť od vývoja ceny akcie. V čase svojej splatnosti bude rovná 0 p. j. pri vzniku udalosti D a 5 p. j. pri vzniku udalosti H. V tomto prípade je to preto, lebo realizačná cena v opcii je 22 p. j. To znamená, že ak nastane udalosť D, pre držiteľa opcie nemá zmysel kupovať akciu za dohodnutú cenu 22 p. j., keď na trhu je ju možné kúpiť lacnejšie. Držiteľ opcie ju nebude realizovať, a preto bude jej hodnota v tomto prípade nulová. Naopak ak nastane udalosť H, tak držiteľ opcie opciu zrealizuje, pretože má právo kúpiť akciu za 22 p. j., hoci na trhu stojí 27 p. j. Hodnota opcie pri vzniku udalosti H bude daná rozdielom $27 - 22 = 5$ p. j. Opäť platí, že hodnota opcie v čase 0 bola zrejme stanovená nesprávne, keďže bolo možné bez rizika zarobiť na vzniknutej arbitrážnej príležitosti. Jej bezarbitrážna cena musí byť zrejme iná než uvažovaná 1 p. j.

Na príkladoch opcií na akciu sme demonštrovali, že ak vývoj ceny podkladového aktíva môžeme zaznačiť na binárnom strome, hodnota derivátu závisiaca od hodnoty podkladového aktíva bude určená tým, v ktorom uzle stromu sa práve cena aktíva nachádza. Preto aj hodnoty derivátu budeme zaznamenávať na rovnakom binárnom strome, ako je ten pre podkladové aktívum:

$$
\begin{array}{cccc}
\text{udalosť} & \text{hodnota derivátu v čase } 0 & & \text{hodnota derivátu v čase } T \\
\text{H:} & & & Z_H \\
 & & \nearrow & \\
 & Z_0 & & \\
 & & \searrow & \\
\text{D:} & & & Z_D
\end{array}
$$

kde Z_0 je hodnota derivátu v čase 0, Z_H je hodnota derivátu v čase T pri vzniku udalosti H a Z_D je hodnota derivátu v čase T pri vzniku udalosti D. Strom pre derivát označíme $\mathcal{B}_Z$.

Poznamenajme, že pravdepodobnosť p, s ktorou nastane udalosť H, nemá pri bezarbitrážnom oceňovaní derivátu na binárnych stromoch váhu. Inými slovami nezáleží na tom, s akou pravdepodobnosťou udalosť nastane, pretože pri oceňovaní sa bude využívať postup zapájajúci elimináciu rizika vyplývajúceho z neistoty, ktorá udalosť nastane. Preto ju pri binárnom strome pre derivát ani neuvádzame.

Ak označíme hodnotu podkladového aktíva v čase T ako S_T a hodnotu derivátu na toto aktívum v čase T ako Z_T, tak pre kúpnu opciu s realizačnou cenou K platí $Z_T = \max\{0, S_T - K\}$. Pre predajnú opciu s realizačnou cenou K dostaneme $Z_T = \max\{0, K - S_T\}$ a pre forward s realizačnou cenou K máme $Z_T = S_T - K$ pre kupujúcu stranu kontraktu. V ďalšom budeme tiež používať značenie $(x)^+ = \max\{0, x\}$.

Špeciálne, ak uvažujeme cenový vývoj aktíva na binárnom strome $\mathcal{B}_S$, pričom realizačná cena derivátu spĺňa $S_D < K < S_H$, tak pre kúpnu opciu s realizačnou cenou K pri vzniku udalosti H platí $Z_T = Z_H = S_H - K$ a pri vzniku udalosti D je $Z_T = Z_D = 0$. Pre predajnú opciu s realizačnou cenou K pri vzniku udalosti H platí $Z_T = Z_H = 0$ a pri vzniku udalosti D je $Z_T = Z_D = K - S_D$. Pre kupujúcu stranu vo forwardovom kontrakte bude pri vzniku udalosti H platiť $Z_T = Z_H = S_H - K$ a pri vzniku udalosti D bude $Z_T = Z_D = S_D - K$. Všetky uvádzané príklady hodnôt derivátu v čase T vychádzajú z poznania ceny podkladového aktíva v koncových uzloch binárneho stromu $\mathcal{B}_S$. Na tieto hodnoty nemá vplyv to, či arbitráž existuje alebo nie. Určiť ich vieme iba na základe vlastností derivátu a ceny podkladového aktíva v čase T a ich určenie nie je úlohou bezarbitrážneho oceňovania. Úloha bezarbitrážne oceniť derivát znamená určiť hodnotu/cenu derivátu v čase 0, t. j. stanoviť Z_0 tak, aby nebola arbitráž.

Napr. sa môžeme pokúsiť bezarbitrážne oceniť put a call opciu na akciu α z príkladu. Postup nájdenia bezarbitrážnej ceny týchto opcií presne kopíruje postup vytvárania arbitrážnej príležitosti pre dve bezdividendové akcie v kapitole o akciách z časti 4.3.5 Bezarbitrážne oceňovanie dvojice akcií na binárnom strome.

Nech x označuje investíciu do nákupu akcií α a y investíciu do nákupu predajných opcií na akciu α s realizačnou cenou $K = 20$ p. j. Pripomeňme, že 20 p. j. je aj súčasná cena akcie, preto za x p. j. možno v čase 0 nakúpiť $X = \frac{x}{20}$ kusov akcie α a za y p. j. dostaneme $Y = \frac{y}{Z_0}$ kusov opcie, kde Z_0 označuje (zatiaľ neznámu) bezarbitrážnu cenu opcie v čase 0.

Eliminujme riziko spojené s neistotou ohľadom toho, ktorá z udalostí H, D nastane, dostaneme:

$$27X + 0Y = 15X + 5Y. \tag{6.2}$$

Z rovnosti (6.2) získame:

$$\begin{aligned} 12X &= 5Y, \\ Y &= 2,4X. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Keďže R uvažujeme nulové, aby sme vylúčili arbitráž, v čase 0 musí platiť:

$$20X + Z_0 Y = 27X. \tag{6.4}$$

Nulová hodnota spojitej úrokovej sadzby R nám umožňuje porovnávať hodnoty v dvoch rozličných časoch, pretože časová hodnota peňazí sa počas obdobia T nemení. Súčasná hodnota sa rovná nominálnej (budúcej) hodnote.

Dosadením (6.3) za Y do rovnice (6.4) získame:

$$\begin{aligned} 20X + Z_0(2,4X) &= 27X \\ Z_0 &= \frac{35}{12} \text{ p. j.} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zistili sme, že bezarbitrážna cena predajnej opcie by mala byť $\frac{35}{12}$ p. j.

Poznámka 6.1. *Poznamenajme, že ak použijeme značenia zo začiatku časti 4.3.5 Bezarbitrážne ocenovanie dvojice akcií na binárnom strome a vzťah* (4.106)*, tak príslušné hodnoty u, d, g, h budú tieto:*

$$u = \frac{27}{20},\ d = \frac{15}{20},\ g = 0 \text{ a } h = \frac{12}{7}.$$

Z toho skutočne dostaneme:

$$u - d + h - g = \frac{3}{5} + \frac{12}{7} = \frac{81}{35} = \left(\frac{27}{20}\right)\left(\frac{12}{7}\right) - 0 = uh - dg.$$

Veľmi podobne by sme našli i bezarbitrážnu cenu kúpnej opcie. Akurát v tomto prípade budeme v čase 0 X kusov akcie α predávať a Y kusov call opcie nakupovať. Nech opäť Z_0 označuje (zatiaľ neznámu) bezarbitrážnu cenu opcie v čase 0.

Elimináciou rizika získame:

$$-27X + 5Y = -15X + 0Y. \tag{6.6}$$

Z rovnosti (6.6) máme:

$$\begin{aligned} 5Y &= 12X, \\ Y &= 2,4X. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Aby sme vylúčili arbitráž, v čase 0 musí platiť:

$$-20X + Z_0 Y = -15X. \tag{6.8}$$

Dosadením (6.7) za Y do rovnice (6.8) dostaneme:

$$\begin{aligned} -20X + Z_0(2,4X) &= -15X, \\ Z_0 &= \frac{25}{12} \text{ p. j.} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Zistili sme, že bezarbitrážna cena kúpnej opcie by mala byť $\frac{25}{12}$ p. j.

Poznámka 6.2. *Znova poznamenajme, že ak použijeme značenia zo začiatku časti 4.3.5 Bezarbitrážne ocenovanie dvojice akcií na binárnom strome a vzťah* (4.106)*, tak príslušné hodnoty u, d, g, h v tomto prípade budú:*

$$u = \frac{27}{20},\ d = \frac{3}{4},\ g = \frac{12}{5} \ \text{a} \ h = 0.$$

Z toho potom naozaj získame:

$$u - d + h - g = \frac{3}{5} - \frac{12}{5} = -\frac{9}{5} = 0 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{12}{5}\right) = uh - dg.$$

Postup z predchádzajúcich príkladov dokážeme zovšeobecniť pre ľubovoľné podkladové aktívum s cenovým vývojom zobrazeným na jednoduchom binárnom strome a derivát na toto podkladové aktívum:

$$\begin{array}{ccccccc} & & S_H & \qquad & & & Z_H \\ & \nearrow & & & & \nearrow & \\ S_0 & & & & Z_0 & & \\ & \searrow & & & & \searrow & \\ & & S_D & & & & Z_D \end{array}$$

Skonštruujme portfólio pozostávajúce z jedného kusu derivátu a $-\Delta$ kusov podkladového aktíva. Aby sme eliminovali riziko, musí v čase T platiť:

$$Z_H - \Delta S_H = Z_D - \Delta S_D.$$

Z čoho:

$$\Delta = \frac{Z_H - Z_D}{S_H - S_D}. \tag{6.10}$$

Aby sme vylúčili arbitráž, tak:

$$Z_0 - \Delta S_0 = \mathrm{e}^{-RT}(Z_H - \Delta S_H). \tag{6.11}$$

Pretože uvažujeme $R \geq 0$, a teda aj prípady, keď $R \neq 0$, tak bezrizikový príjem plynúci z portfólia v čase T, t. j. jeho budúcu hodnotu, musíme odúročiť bezrizikovou úrokovou sadzbou do času 0, aby sme ju mohli porovnať so súčasnou hodnotou (hodnotou v čase 0) portfólia.

Zo vzťahu (6.11) máme:

$$Z_0 = \Delta S_0 + \mathrm{e}^{-RT}(Z_H - \Delta S_H) = \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_0 + \mathrm{e}^{-RT}\left(Z_H - \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_H\right). \quad (6.12)$$

Iný prístup vedúci k tým istým záverom sa nazýva samofinancovaná stratégia. Jeho základná idea spočíva v tom, že derivát vieme zostrojiť pomocou základných nástrojov trhu, t. j. podkladového aktíva a dlhopisu. Uvažujme preto podkladové aktívum, ktorého súčasná hodnota je S_0 a diskontný dlhopis na obdobie držania derivátu T, ktorého hodnota dnes je e^{-RT} pri bezrizikovej úrokovej sadzbe R. Zostrojme portfólio pozostávajúce z φ kusov aktíva a ψ kusov diskontných dlhopisov s maturitou T. Teda súčasná hodnota takéhoto portfólia sa rovná

$$\varphi S_0 + \psi \mathrm{e}^{-RT}. \quad (6.13)$$

Portfólio sa musí správať rovnako ako derivát, t. j. jeho hodnota v čase T musí byť pri vzniku udalosti H, ako aj pri vzniku udalosti D rovná hodnote derivátu. Platí:

$$\begin{aligned} \varphi S_H + \psi &= Z_H, \\ \varphi S_D + \psi &= Z_D. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Počty kusov φ a ψ získame riešením sústavy (6.14):

$$\psi = \frac{Z_D S_H - Z_H S_D}{S_H - S_D}, \quad (6.15)$$

$$\varphi = \frac{Z_H - Z_D}{S_H - S_D}. \quad (6.16)$$

Môžeme si všimnúť, že hodnota φ v (6.16) je rovnaká ako hodnota Δ v (6.10).

Aby nevznikla arbitráž, súčasná hodnota portfólia musí byť rovnaká ako súčasná hodnota derivátu. Teda máme:

$$Z_0 = \varphi S_0 + \psi \mathrm{e}^{-RT}. \quad (6.17)$$

Po dosadení (6.16) za φ a (6.15) za ψ do rovnice (6.17) dostaneme:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_0 + \mathrm{e}^{-RT}\left(\frac{Z_D S_H - Z_H S_D}{S_H - S_D}\right) \\ &= \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_0 + \mathrm{e}^{-RT}\left(Z_H - \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_H\right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Porovnaním (6.12) a (6.18) prídeme k záveru, že oba prístupy vedú k tomu istému vzťahu na výpočet bezarbitrážnej ceny derivátu.

Navyše úpravou vzťahu (6.18), resp. (6.12) získame:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_0 + \mathrm{e}^{-RT}\left(Z_H - \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_H\right) \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\left(\frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_0 \mathrm{e}^{RT} + \left(Z_H - \frac{(Z_H - Z_D)}{(S_H - S_D)} S_H\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\left(\left(\frac{S_0 \mathrm{e}^{RT} - S_D}{S_H - S_D}\right) Z_H + \left(\frac{S_H - S_0 \mathrm{e}^{RT}}{S_H - S_D}\right) Z_D\right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Označme $q = \frac{S_0 e^{RT} - S_D}{S_H - S_D}$, potom $1 - q = \frac{S_H - S_0 e^{RT}}{S_H - S_D}$. Teda vzťah (6.19) môžeme zjednodušiť:

$$Z_0 = e^{-RT}\left(qZ_H + (1-q)Z_D\right). \tag{6.20}$$

Pretože platí predpoklad (6.1), tak $q \in (0,1)$. Pojem označený symbolom q budeme nazývať **riziko-neutrálna pravdepodobnosť**. Vzťah (6.20) vlastne hovorí, že súčasná hodnota derivátu je odúročená očakávaná (stredná) hodnota derivátu pri riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q. Zavedenie riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q do výpočtu vedie k tomu, že výpočet súčasnej hodnoty derivátu sa deje v riziko-neutrálnom svete, v ktorom zmena hodnoty derivátu na Z_H sa udeje s pravdepodobnosťou q, kým zmena hodnoty derivátu na Z_D sa udeje s pravdepodobnosťou $1 - q$. Elimináciou rizika spojeného s tým, ktorá z náhodných udalostí H, D nastane, stratégia bezarbitrážneho oceňovania súčasne eliminuje aj pravdepodobnosti p, $1 - p$, s ktorými nastanú udalosti v reálnom svete. Tento presun z reálneho sveta do sveta riziko-neutrálnych pravdepodobností však nie je pri výpočte súčasnej hodnoty derivátu vôbec obmedzujúci, pretože bezarbitrážne oceňovanie sa deje práve s vylúčením rizika spojeného s neistotami v reálnom svete. Navyše platí:

$$qS_H + (1-q)S_D = S_0 e^{RT}. \tag{6.21}$$

Teda očakávaná (stredná) hodnota podkladového aktíva pri riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q sa rovná súčasnej hodnote aktíva úročenej do času T bezrizikovou úrokovou sadzbou R. Aj v tomto prípade môžeme konštatovať, že v riziko-neutrálnom svete sú očakávania o budúcej cene aktíva strednou hodnotou počítanou cez riziko-neutrálne pravdepodobnosti. Očakávania sú to úplne prirodzené, pretože zapojením vylúčenia arbitráže do oceňovania eliminujeme riziká spojené s náhodnosťou v reálnom svete, čo korešponduje s úročením bezrizikovou úrokovou sadzbou. Tieto očakávania sa však môžu líšiť od očakávaní spojených s pravdepodobnosťami p, resp. $1 - p$, s ktorými nastáva pohyb ceny aktíva v reálnom svete.

V nasledujúcich častiach učebnice sa budeme venovať bezarbitrážnemu oceňovaniu forwardových kontraktov a opcií. Využijeme pritom vzťah (6.20), ktorý sme odvodili v tejto časti. Ohodnocovanie futures kontraktov a swapov vynecháme, pretože je podobné, resp. vychádza z ohodnocovania forwardov. Viac sa sústredíme na ohodnocovanie rôznych druhov opcií.

6.2 Ohodnocovanie forwardových kontraktov

Ohodnocovanie forwardových kontraktov je špecifické v tom, že pri ňom nie je nevyhnutné využiť vzťah (6.20) na určenie súčasnej hodnoty kontraktu. Začneme s forwardom na akciu bez dividend.

6.2.1 Forward na akciu bez dividend

Pripomeňme si, že vo forwardovom kontrakte vystupujú dve strany. Kupujúca strana, ktorá v dohodnutom čase v budúcnosti kupuje za dohodnutú cenu podkladové aktívum a predávajúci, ktorý toto aktívum kupujúcemu predáva. Uvažujme teraz, že podkladovým aktívom je akcia nevyplácajúca dividendy. Pri ohodnocovaní kontraktu budeme na problém nazerať z pohľadu kupujúcej strany.

V čase T investor s týmto kontraktom musí kúpiť akciu za dohodnutú cenu K. Snahou pri bezarbitrážnom ohodnocovaní kontraktu je nastaviť realizačnú cenu kontraktu K tak, aby hodnota kontraktu v čase jeho uzavretia, teda v čase 0, bola rovná 0 p. j. a nebolo možné vytvoriť arbitráž.

Nech S_0 p. j. je hodnota akcie v čase 0 a S_T p. j. (v čase 0 neznáma) je hodnota akcie v čase splatnosti kontraktu T. Hodnota forwardu v čase T bude z pohľadu kupujúceho $S_T - K$ p. j., pretože v čase T dôjde k vysporiadaniu kontraktu, teda ku kúpe podkladovej akcie za cenu K p. j., hoci jej cena na trhu je S_T p. j.

Investor vie správanie kontraktu presne napodobniť skonštruovaním replikačného portfólia. Nato v čase 0 predá/emituje K kusov diskontných dlhopisov na obdobie vypísania forwardu T pri bezrizikovej úrokovej sadzbe R a kúpi akciu za S_0 p. j. Keďže hodnota jedného dlhopisu sa v čase 0 rovná e^{-RT}, tak v čase 0 obdrží $K\mathrm{e}^{-RT}$ p. j. Celkovo hodnota portfólia v čase 0 je $S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}$ p. j.

V čase T bude hodnota akcie S_T p. j. a investor ju môže predať, súčasne však musí vyplatiť dlhopisy v celkovej výške K p. j. Hodnota portfólia v čase T je teda $S_T - K$ p. j., čo je práve hodnota kontraktu z pohľadu kupujúceho v kontrakte.

Keďže hodnota kontraktu je v čase 0 nulová, aby nenastala arbitráž, musí byť i hodnota replikačného portfólia nulová, teda musí platiť:

$$K = S_0\mathrm{e}^{RT}. \tag{6.22}$$

Ukážeme, že ak by neplatila rovnosť (6.22), bolo by možné vytvoriť arbitráž.

Ak by niekto ponúkal kontrakt s $K < S_0\mathrm{e}^{RT}$, investor podpíše a súčasne predá akciu za S_0 p. j. Za peniaze z jej predaja nakúpi $S_0\mathrm{e}^{RT}$ kusov diskontných dlhopisov, ktoré mu v čase T prinesú $S_0\mathrm{e}^{RT}$ p. j. Keďže $K < S_0\mathrm{e}^{RT}$, tak za K p. j. kúpi akciu (ako mu ukladajú podmienky kontraktu) a zvyšok si ponechá. Investor teda nadobudol kladný zisk a akciu, ktorú v čase 0 predal, má naspäť. Vznikla arbitráž. Hoci investor nemusí v čase 0 žiadnu akciu vlastniť, a teda nedokáže arbitráž opísaným spôsobom vytvoriť, taká možnosť tu existuje. Existuje arbitrážna príležitosť. Ak v čase 0 investor vlastní viacero akcií, môže ich všetky popredávať a svoj arbitrážny zisk znásobiť.

Ak by niekto ponúkal kontrakt s $K > S_0\mathrm{e}^{RT}$, investor o kontrakt nemá záujem, pretože vie vytvoriť replikačné portfólio s nižšou realizačnou cenou K. Naopak záujem prejaví predávajúca strana v kontrakte. Podpíše kontrakt a súčasne vypíše/predá $S_0\mathrm{e}^{RT}$ kusov diskontných dlhopisov, ktoré jej prinesú S_0 p. j. Za tieto peniaze okamžite kúpi akciu a počká do času T, keď ju predá za cenu K, ako jej určujú podmienky kontraktu. Súčasne má povinnosť vysporiadať nároky držiteľov dlhopisov a teda zaplatiť $S_0\mathrm{e}^{RT}$ p. j. Pretože $K > S_0\mathrm{e}^{RT}$, bez rizika nadobudne kladný zisk, t. j. využije arbitrážnu príležitosť. Opäť platí, že ak jej to okolnosti dovolia, dokáže svoj zisk znásobiť tým, že predá v čase 0 viac diskontných dlhopisov, predaj ktorých jej prinesie viac peňazí na kúpu akcií.

Hodnotu realizačnej ceny K forwardového kontraktu zo vzťahu (6.22) dostaneme aj v prípade, že na jeho výpočet použijeme schému oceňovania pomocou binárneho stromu, t. j. využijeme vzťah (6.20).

Pretože v prípade forwardového kontraktu pre kupujúcu stranu máme $Z_H = S_H - K$ a $Z_D = S_D - K$, tak po dosadení za Z_H, resp. Z_D do (6.20) a s využitím toho, že hodnota kontraktu v čase 0 má byť nulová, dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= Z_0 = \mathrm{e}^{-RT}\left(q(S_H - K) + (1-q)(S_D - K)\right) = \mathrm{e}^{-RT}\left(qS_H + (1-q)S_D - K\right) = \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\left(S_D + q(S_H - S_D) - K\right) = \mathrm{e}^{-RT}\big(S_D + S_0\mathrm{e}^{RT} - S_D - K\big) = \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\big(S_0\mathrm{e}^{RT} - K\big) = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Z rovnosti (6.23) bezprostredne získame $K = S_0\mathrm{e}^{RT}$.

6.2.2 Forward na menu

Pri forwardových kontraktoch na menu dochádza k výmene jednej meny za inú, pracuje sa teda s výmennými kurzami. Realizačnou cenou kontraktu K sa rozumie forwardový výmenný kurz, t. j. kurz dohodnutý dnes (v čase 0), použitý v čase T vysporiadania kontraktu na výmenu jednej meny za inú.

Nech C_t označuje výmenný kurz, napr. eura za americký dolár v čase t. V čase podpísania kontraktu, t. j. v čase 0, je výmenný kurz $C_0 = \frac{C_0\,€}{\$1}$. To znamená, že za \$1 zaplatíme C_0 € alebo za 1 € dostaneme $\$\frac{1}{C_0}$. V čase 0 je výmenný kurz C_T v čase T neznámy, možno však dohodnúť forwardový výmenný kurz K tak, aby bola dohoda férová pre obe strany kontraktu.

Ak v čase 0 investor vlastní C_0 €, môže za ne nakúpiť domáce diskontné dlhopisy v počte kusov $C_0\mathrm{e}^{RT}$, ktoré sú úročené domácou úrokovou sadzbou R alebo ich vymeniť výmenným kurzom za \$1, ktorý sa bude úročiť pri zahraničnej úrokovej sadzbe U. Budeme predpokladať, že $U \geq 0$. Za \$1 môže nakúpiť e^{UT} kusov zahraničných dlhopisov.

Ak investor v čase 0 investoval do nákupu domácich dlhopisov, v čase T z nich obdrží $C_0\mathrm{e}^{RT}$ €. Ak v čase 0 uskutočnil výmenu eur za dolár a nakúpil zahraničné dlhopisy, čase T z nich obdrží $\$\mathrm{e}^{UT}$.

Aby nenastala arbitráž, musí forwardový výmenný kurz v čase T spĺňať:

$$C_0\mathrm{e}^{RT} = K\mathrm{e}^{UT}. \tag{6.24}$$

Čiže výmena úročeného dolára v čase T späť na eurá by mala poskytnúť toľko eur, koľko poskytuje za ten čas úročenie C_0 € pri domácej úrokovej sadzbe. Skutočný výmenný kurz C_T by mohol byť na výmenu dolárov za eurá v čase T pre investora výhodnejší alebo aj menej výhodný, avšak uzavretím kontraktu s protistranou musí investor dodržať podmienky forwardu a vymieňať za dohodnutý výmenný kurz K. Inými slovami rozdiel $C_T - K\mathrm{e}^{UT}$ nemusí byť v čase T nulový.

Hodnota kontraktu v čase 0 však nulová musí byť (C_0 € $-$ \$1 $= 0$), preto je K nutné stanoviť tak, že:

$$K = C_0\mathrm{e}^{(R-U)T}, \tag{6.25}$$

t. j. aby bolo splnená rovnosť (6.24).

Podobne ako pri (6.23) aj v tomto prípade pri použití schémy oceňovania na binárnom strome a vzťahu (6.20) dostaneme:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{e}^{-RT}\left(q\left(C_H - K\mathrm{e}^{UT}\right) + (1-q)\left(C_D - K\mathrm{e}^{UT}\right)\right)\\
0 &= \mathrm{e}^{-RT}\left(C_D + q(C_H - C_D) - K\mathrm{e}^{UT}\right)\\
0 &= \mathrm{e}^{-RT}\left(C_D + \frac{(C_0\mathrm{e}^{RT} - C_D)}{(C_H - C_D)}(C_H - C_D) - K\mathrm{e}^{UT}\right)\\
0 &= C_0 - K\mathrm{e}^{(U-R)T}, \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

kde sme uvažovali, že výmenný kurz môže zo súčasnej hodnoty C_0 narásť na hodnotu C_H (udalosť H) alebo poklesnúť na hodnotu C_D (udalosť D). Z rovnosti (6.26) dostaneme vzťah (6.25).

Poznámka 6.3. *Zo vzťahov* (6.22) *ako i* (6.25) *vyplýva, že hodnota K závisí od doby splatnosti T forwardového kontraktu. Teda K je funkciou času: $K = K(T) = S_0\mathrm{e}^{RT}$, resp. $K = K(T) = C_0\mathrm{e}^{(R-U)T}$. Z toho získame, že $K_0 = K(0) = S_0$, resp. $K_0 = K(0) = C_0$.*

6.2.3 Forwardové kontrakty všeobecne

Vo všeobecnosti realizačnú cenu v kontrakte možno určiť zo vzťahu:

$$K = S_0\mathrm{e}^{(R+R_C)T}, \qquad (6.27)$$

kde R_C reprezentuje sadzbu (mieru) nákladov na uskladnenie podkladového aktíva (môže ísť o nejakú komoditu, napr. pšenicu) a S_0 je hodnota podkladového aktíva v čase 0.

Pre akcie platí $R_C = 0$, pretože akcie netreba uskladňovať. Pre meny máme $R_C < 0$, ak predpokladáme, že peňažné jednotky v zahraničí sa úročia pri kladnej úrokovej sadzbe. Pre komodity je $R_C > 0$, keďže uskladnenie niečo stojí.

6.3 Ohodnocovanie opcií

Pri opciách je využitie vzťahu (6.20) pri ich oceňovaní kľúčové. Tento vzťah sa nevyužíva iba pri oceňovaní na jednoduchom binárnom strome $\mathcal{B}_S$ pre aktívum, resp. pre derivát $\mathcal{B}_Z$ opísanom vyššie, ale opakovane aj pri rozvetvenom binárnom strome, kde každou vetvou tohto stromu je jednoduchý binárny strom. My budeme označovať tieto modely na oceňovanie ako jednokrokový model, resp. viackrokový model.

Zaoberať sa budeme oceňovaním tých najjednoduchších typov opcií, ako sú napríklad opcie binárne, oceňovaním dvojice základných typov opcií – európskej a americkej, ako aj ďalších typov opcií, ktorých výnos v čase splatnosti závisí od cenového vývoja podkladového aktíva. Ak nebude povedané inak, ako podkladové aktívum budeme uvažovať akciu bez dividend.

Začneme ohodnocovaním európskej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy, ktoré je jednoduchšie a na príklade ktorého vysvetlíme použitie jedno-, dvoj- a viackrokového modelu.

Potom sa budeme venovať ohodnocovaniu amerických opcií, ktoré je síce zložitejšie, pretože takéto opcie môžu byť realizované skôr než v čase ich splatnosti, ale ich výskyt v praxi je najbežnejší.

6.3.1 Ohodnocovanie európskych opcií na jednoduchom binárnom strome

Uvažujme európsky typ opcie na akciu bez dividend, ktorej vlastník má právo kúpiť (kúpna opcia) alebo predať (predajná opcia) podkladové aktívum v čase splatnosti opcie T za realizačnú cenu K p. j. dohodnutú v čase 0, t. j. v čase uzatvorenia kontraktu.

Nech cenový vývoj podkladového aktíva možno zaznamenať na jednoduchom binárnom strome $\mathcal{B}_S$, kde existujú iba dve možnosti pohybu ceny aktíva z ceny S_0 v čase 0 spojené s dvojicou náhodných udalostí H, D v reálnom svete merateľnými pravdepodobnosťami p, resp. $1-p$. Buď dôjde k pohybu v cene smerom nahor, teda cena aktíva v čase T bude $S_H > S_0$ alebo nastane pohyb smerom nadol, t. j. cena aktíva v čase T bude $S_D < S_0$. Ide o jednokrokový model oceňovania derivátov.

Kúpna opcia

Uvažujme kúpnu (call) opciu európskeho typu. Nech C_t^E označuje jej hodnotu v čase t, potom hodnota opcie sa v prípade vzniku udalosti H v čase T rovná $C_T^E = C_H^E = (S_H - K)^+$ a v prípade vzniku udalosti D sa rovná $C_T^E = C_D^E = (S_D - K)^+$. Využijúc vzťah (6.20) na výpočet hodnoty derivátu na jednoduchom binárnom strome dostávame:

$$C_0^E = \mathrm{e}^{-RT}\left(q(S_H - K)^+ + (1-q)(S_D - K)^+\right). \tag{6.28}$$

Špeciálne, ak $K \geq S_H$, tak

$$C_H^E = 0 = C_D^E \text{ a } C_0^E = 0.$$

Ak $S_D \leq K < S_H$, tak

$$C_H^E = S_H - K > 0,\ C_D^E = 0 \text{ a } C_0^E = \mathrm{e}^{-RT} q(S_H - K).$$

Ak $0 < K < S_D$, tak $C_H^E = S_H - K > 0$, $C_D^E = S_D - K > 0$ a

$$\begin{aligned} C_0^E &= \mathrm{e}^{-RT}\left(q(S_H - K) + (1-q)(S_D - K)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\left(q(S_H - S_D) + S_D - K\right) = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}. \end{aligned}$$

Príklad 6.1. *Bezarbitrážne oceňme európsku kúpnu opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $T = 1$ rok, ak $S_0 = 20$ p. j., $S_H = 28$ p. j., $S_D = 16$ p. j., $K = 22$ p. j. a spojitá bezriziková úroková sadzba na obdobie T je konštantná počas tohto obdobia, rovná $R = \ln(1,05)$.*

Riešenie:

Overme najprv splnenie predpokladu (6.1). Máme:

$$0 < 16 = S_D < S_0 = 20 < S_0\mathrm{e}^{RT} = 21 < 28 = S_H.$$

Predpoklad (6.1) je teda splnený.

Pretože $S_D < K < S_H$, tak $C_H^E = S_H - K = 28 - 22 = 6$ p. j. a $C_D^E = 0$ p. j. Vypočítajme riziko-neutrálnu pravdepodobnosť, dostaneme:

$$q = \frac{S_0 \mathrm{e}^{RT} - S_D}{S_H - S_D} = \frac{21 - 16}{28 - 16} = \frac{5}{12}.$$

Dosadením do vzťahu (6.28) získame:

$$C_0^E = \mathrm{e}^{-RT}\left(qC_H^E + (1-q)C_D^E\right) = \frac{20}{21}\left(\frac{5}{12}(6 \text{ p. j.}) + \frac{7}{12}(0 \text{ p. j.})\right) = \frac{50}{21} \text{ p. j.} \doteq 2,38 \text{ p. j.}$$

Súčasná hodnota opcie je teda $\frac{50}{21}$ p. j., čo sa približne rovná $2,38$ p. j.

Predajná opcia

Uvažujme predajnú (put) opciu európskeho typu. Nech P_t^E označuje jej hodnotu v čase t, potom hodnota opcie sa v prípade vzniku udalosti H v čase T rovná $P_T^E = P_H^E = (K - S_H)^+$ a v prípade vzniku udalosti D sa rovná $P_T^E = P_D^E = (K - S_D)^+$. Využijúc vzťah (6.20) na výpočet hodnoty derivátu na jednoduchom binárnom strome dostávame:

$$P_0^E = \mathrm{e}^{-RT}\left(q(K - S_H)^+ + (1-q)(K - S_D)^+\right). \tag{6.29}$$

Špeciálne, ak $0 < K \leq S_D$, tak

$$P_H^E = 0 = P_D^E \text{ a } P_0^E = 0.$$

Ak $S_D < K \leq S_H$, tak

$$P_D^E = K - S_D > 0,\ P_H^E = 0 \text{ a } P_0^E = \mathrm{e}^{-RT}(1-q)(K - S_D).$$

Ak $S_H < K$, tak $P_H^E = K - S_H > 0$, $P_D^E = K - S_D >$ a

$$\begin{aligned} P_0^E &= \mathrm{e}^{-RT}\left(q(K - S_H) + (1-q)(K - S_D)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-RT}\left(K - S_D - q(S_H - S_D)\right) = K\mathrm{e}^{-RT} - S_0. \end{aligned}$$

Príklad 6.2. *S podmienkami z príkladu 6.1 bezarbitrážne oceňme európsku predajnú opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $T = 1$ rok a realizačnou cenou $K = 22$ p. j.*

Riešenie:

Pretože oceňujeme na rovnakom binárnom strome pre podkladové aktívum ako v príklade 6.1, nie je nutné opätovne počítať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť. Máme

$$q = \frac{5}{12}$$

a teda

$$1 - q = \frac{7}{12}.$$

Keďže $S_D < K < S_H$, tak $P_H^E = 0$ p. j. a $P_D^E = 22 - 16 = 6$ p. j. Dosadením do vzťahu (6.29) získame:

$$P_0^E = \mathrm{e}^{-RT}\left(qP_H^E + (1-q)P_D^E\right) = \frac{20}{21}\left(\frac{5}{12}(0 \text{ p. j.}) + \frac{7}{12}(6 \text{ p. j.})\right) = \frac{10}{3} \text{ p. j.} \doteq 3,33 \text{ p. j.}$$

Súčasná hodnota opcie je teda $\frac{10}{3}$ p. j., čo sa približne rovná $3,33$ p. j.

6.4 Dvojkrokový model oceňovania derivátov

Pri dvojkrokovom modeli oceňovania predpokladáme, že cenový vývoj podkladového aktíva je zaznamenaný na binárnom strome, ktorý sa rozvetvuje v dvoch krokoch. V tomto prípade nastáva pohyb ceny podkladového aktíva v dvoch rovnako dlhých časových obdobiach pri rovnakej úrokovej sadzbe R konštantnej počas celého obdobia. Na strome je teda zaznamenaná cena aktíva v čase 0, v čase ΔT (t. j. o jeden časový krok neskôr), kde v tomto prípade $\Delta T = \frac{T}{2}$, a v čase $T = 2\Delta T$ (t. j. o druhý časový krok neskôr), kde T je časom splatnosti derivátu.

Na strome možno pozorovať viacnásobné vetvenie. Binárny strom má viacero vetiev, z ktorých každá je jednoduchým binárnym stromom s jedným východzím uzlom a s dvoma koncovými uzlami. Pretože pri dvojkrokovom i viackrokovom modeli oceňovania je na každej vetve stromu potrebné overiť splnenie predpokladu (6.1), nájsť riziko-neutrálnu pravdepodobnosť spojenú s danou vetvou stromu a využiť vzťah (6.20), zapíšme predpoklad (6.1), vzťah na výpočet riziko-neutrálnej pravdepodobnosti a vzťah (6.20) všeobecne pre ľubovoľnú vetvu stromu, na ktorej nastane pohyb ceny aktíva podľa nasledujúcej schémy:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & S_{hore} \\
 & \nearrow & \\
S_{teraz} & & \\
 & \searrow & \\
 & & S_{dolu}
\end{array}
$$

Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
0 &< S_{dolu} < S_{teraz} \leq S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} < S_{hore}, && (6.30)\\
q &= \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}}{S_{hore} - S_{dolu}}, && (6.31)\\
Z_{teraz} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qZ_{hore} + (1-q)Z_{dolu}\right), && (6.32)
\end{aligned}
$$

kde ΔT vyjadruje jeden časový krok, počas ktorého sa udeje pohyb ceny aktíva z aktuálnej hodnoty S_{teraz} buď smerom hore na hodnotu S_{hore} alebo smerom dolu na hodnotu S_{dolu}, q je riziko-neutrálna pravdepodobnosť na tejto vetve stromu a Z_{teraz} je hodnota derivátu, ktorú možno vypočítať pomocou q a hodnôt derivátu Z_{hore}, resp. Z_{dolu} spojených s pohybom ceny podkladového aktíva na S_{hore}, resp. S_{dolu}.

Tieto vzťahy nie sú ničím novým vzhľadom k predchádzajúcim častiam učebnice rozoberajúcim bezarbitrážne ohodnocovanie derivátov. Predpoklad (6.30) je analógiou predpokladu (6.1) pre jednu vetvu stromu. Rovnako možno odvodiť vzťah (6.32) pomocou riziko eliminúcej stratégie alebo pomocou samofinancovanej stratégie popísaných vyššie, akurát na rozdiel od vzťahu (6.20), umožňuje vzťah (6.32) vypočítať hodnotu derivátu v ľubovoľnom uzle stromu s využitím hodnôt derivátu v uzloch po ňom nasledujúcich a teda v modeli s ľubovoľným počtom krokov, nielen v tom jednokrokovom. Samozrejme využitie vzťahov (6.30), (6.31) a (6.32) na výpočet hodnoty derivátu v čase 0 je možné aj v jednokrokovom modeli, v ktorom bude $\Delta T = T$. V ďalšom budeme preto používať už iba tieto vzťahy. Navyše predpoklad (6.30) budeme považovať za automaticky splnený, ak nebude povedané inak.

Na nasledujúcom binárnom strome s tromi vetvami sú pre dvojkrokový model v príslušnom uzle stromu zachytené označenia hodnôt podkladového aktíva a hodnôt derivátu na toto podkladové aktívum (v zátvorkách):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Hodnota aktíva} & & \text{Hodnota aktíva} & & \text{Hodnota aktíva} \\
\text{(derivátu)} & & \text{(derivátu)} & & \text{(derivátu)} \\
\text{v čase } 0 & & \text{v čase } \Delta T & & \text{v čase } T = 2\Delta T \\
 & & & & S_{HH}\ (Z_{HH}) \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_H\ (Z_H) & & \\
 & & & \searrow & \\
 & \nearrow & & & S_{HD}\ (Z_{HD}) \\
S_0\ (Z_0) & & & & \\
 & \searrow & & & S_{DH}\ (Z_{DH}) \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_D\ (Z_D) & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{DD}\ (Z_{DD})
\end{array}
$$

Aby sme odlíšili tento strom od stromu pre podkladové aktívum s jedným časovým krokom, resp. viacerými časovými krokmi, budeme počiatočný uzol stromu, nazývaný tiež koreň stromu a dva uzly po ňom nasledujúce označovať rovnako ako pri jednokrokovom modeli, teda ako S_0, S_H a S_D, kde S_H, S_D sú tentoraz možné hodnoty aktíva v čase $\frac{T}{2}$. Vetva stromu vychádzajúca z uzla S_H pokračuje do koncových uzlov S_{HH} (pri pohybe ceny aktíva z uzla S_H smerom nahor), resp. S_{HD} (pri pohybe ceny aktíva z uzla S_H smerom nadol). Vetva stromu vychádzajúca z uzla S_D pokračuje do koncových uzlov S_{DH} (pri pohybe ceny aktíva z uzla S_D smerom nahor), resp. S_{DD} (pri pohybe ceny aktíva z uzla S_D smerom nadol). Adekvátne sú označené i hodnoty derivátu v príslušných uzloch.

Pretože ide o dvojkrokový model, ohodnocovanie derivátu sa taktiež udeje v dvoch krokoch, pričom výpočet hodnôt derivátu na strome bude smerovať od koncových uzlov stromu, v ktorých je hodnota derivátu známa (závisiaca od hodnoty podkladového aktíva a typu derivátu), postupne k počiatočnému uzlu. Podľa typu derivátu sa určia hodnoty derivátu v koncových uzloch stromu, teda hodnoty Z_{HH}, Z_{HD}, Z_{DH} a Z_{DD}. Potom pomocou rizikoneutrálnej pravdepodobnosti na danej vetve stromu a vzťahu (6.32) sa vypočítajú hodnoty derivátu v čase ΔT, t. j. hodnoty Z_H a Z_D. Pomocou nich sa výpočet finalizuje nájdením hodnoty derivátu Z_0 v čase 0.

Predpokladajme ďalej, že nerovnosti v (6.30) sú splnené na každej z vetiev stromu v dvojkrokovom modeli oceňovania. V rámci stromu možno nájsť tri riziko-neutrálne pravdepodobnosti, na každej z vetiev stromu jednu. Napr. ak uvažujeme vetvu stromu s uzlami, v ktorých sa nachádzajú hodnoty S_H, S_{HH} a S_{HD}, tak hodnota $S_{teraz} = S_H$, $S_{hore} = S_{HH}$ a $S_{dolu} = S_{HD}$. Celkovo máme, že na časti stromu tvorenej skupinov uzlov, v ktorých sa nachádzajú hodnoty:

- S_H, S_{HH} a S_{HD}, je prislúchajúca riziko-neutrálna pravdepodobnosť $q_H = \frac{S_H \mathrm{e}^{RT/2} - S_{HD}}{S_{HH} - S_{HD}}$,
- S_D, S_{DH} a S_{DD}, je prislúchajúca riziko-neutrálna pravdepodobnosť $q_D = \frac{S_D \mathrm{e}^{RT/2} - S_{DD}}{S_{DH} - S_{DD}}$,
- S_0, S_H a S_D, je prislúchajúca riziko-neutrálna pravdepodobnosť $q_0 = \frac{S_0 \mathrm{e}^{RT/2} - S_D}{S_H - S_D}$.

Pomocou vzťahu (6.32) vypočítame hodnotu derivátu v každom z relevantných uzlov takto:

- pre skupinu uzlov Z_H, Z_{HH} a Z_{HD} bude $Z_H = \mathrm{e}^{-RT/2} \left(q_H Z_{HH} + (1 - q_H) Z_{HD} \right)$,
- pre skupinu uzlov Z_D, Z_{DH} a Z_{DD} bude $Z_D = \mathrm{e}^{-RT/2} \left(q_D Z_{DH} + (1 - q_D) Z_{DD} \right)$,
- pre skupinu uzlov Z_0, Z_H a Z_D bude $Z_0 = \mathrm{e}^{-RT/2} \left(q_0 Z_H + (1 - q_0) Z_D \right)$.

Dosadením za Z_H a Z_D do vzťahu (6.32) pre Z_0 dostaneme:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \mathrm{e}^{-RT} \left(q_0 \left(q_H Z_{HH} + (1 - q_H) Z_{HD} \right) + (1 - q_0) \left(q_D Z_{DH} + (1 - q_D) Z_{DD} \right) \right) \\ &= \mathrm{e}^{-RT} \left(q_0 q_H Z_{HH} + q_0 (1 - q_H) Z_{HD} + (1 - q_0) q_D Z_{DH} + (1 - q_0)(1 - q_D) Z_{DD} \right) \end{aligned}$$

Označme:

$$E_q(Z) = q_0 q_H Z_{HH} + q_0 (1 - q_H) Z_{HD} + (1 - q_0) q_D Z_{DH} + (1 - q_0)(1 - q_D) Z_{DD},$$

potom $E_q(Z)$ reprezentuje strednú (očakávanú) hodnotu derivátu pri riziko-neutrálnych pravdepodobnostiach.

Keďže $P(0,T) = \mathrm{e}^{-RT}$ je súčasná hodnota diskontného dlhopisu s dobou splatnosti T pri spojitom úrokovaní a nominálnej úrokovej sadzbe R, konštantnej na obdobie od času 0 do času T, tak pre súčasnú hodnotu derivátu dostávame:

$$Z_0 = P(0,T) E_q(Z) = E_q(P(0,T)Z). \tag{6.33}$$

Príklad 6.3. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťme európsku kúpnu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti T a realizačnou cenou $K = 22$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba R je počas tohto obdobia nemenná a rovná $\ln(1,05)^2$, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom dvojkrokovom binárnom strome:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 28\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 25\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & \nearrow & & & 23\ p.\ j. \\
20\ p.\ j. & & & & \\
 & \searrow & & & 20\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 18\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 16\ p.\ j.
\end{array}$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = \frac{1}{2}$ roka a druhá zmena nastane o ďalšieho polroka neskôr. Čiže doba splatnosti opcie $T = 2\Delta T = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ rok.

Riešenie:

Vypočítajme najprv riziko-neutrálne pravdepodobnosti na jednotlivých vetvách stromu. Použijeme značenie uvádzané vyššie:

$$\begin{aligned}
q_H &= \frac{(25 \text{ p. j.})\mathrm{e}^{RT/2} - (23 \text{ p. j.})}{(28 \text{ p. j.}) - (23 \text{ p. j.})} = \frac{25\frac{21}{20} - 23}{5} = \frac{13}{20}, \\
q_D &= \frac{(18 \text{ p. j.})\mathrm{e}^{RT/2} - (16 \text{ p. j.})}{(20 \text{ p. j.}) - (16 \text{ p. j.})} = \frac{18\frac{21}{20} - 16}{4} = \frac{29}{40}, \\
q_0 &= \frac{(20 \text{ p. j.})\mathrm{e}^{RT/2} - (18 \text{ p. j.})}{(25 \text{ p. j.}) - (18 \text{ p. j.})} = \frac{20\frac{21}{20} - 18}{7} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

To, že každá z riziko-neutrálnych pravdepodobností je číslo z intervalu $(0, 1)$, indikuje splnenie predpokladu v (6.30) na každej z vetiev stromu.

Keďže ide o európsku kúpnu opciu, hodnoty derivátu v koncových uzloch stromu sú $C^E_{HH} = (28 - 22)^+ = 6$ p. j., $C^E_{HD} = (23 - 22)^+ = 1$ p. j., $C^E_{DH} = (20 - 22)^+ = 0$ p. j. a $C^E_{DD} = (16 - 22)^+ = 0$ p. j.

Nájdime súčasnú hodnotu opcie. S využitím vzťahu (6.33) dostaneme:

$$\begin{aligned}
C^E_0 &= \mathrm{e}^{-RT}\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{13}{20}\right)6 + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{20}\right)1 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{29}{40}\right)0 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{11}{40}\right)0\right) \text{ p. j.} \\
&= \frac{400}{441}\left(\frac{117}{70} + \frac{3}{20} + 0 + 0\right) \text{ p. j.} = \frac{1700}{1029} \text{ p. j.} \doteq 1{,}6521 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Súčasná hodnota opcie je $\frac{1700}{1029}$ p. j.

Poznámka 6.4. *Ak by nás zaujímali hodnoty opcie v čase $\frac{T}{2}$, tak vo vrchnom uzle by hodnota opcie bola:*

$$C^E_H = \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{13}{20}\right)6 + \left(\frac{7}{20}\right)1\right) \ p.\ j. = \left(\frac{20}{21}\right)\left(\frac{17}{4}\right) \ p.\ j. = \frac{85}{21} \ p.\ j. \doteq 4{,}0476 \ p.\ j.$$

a v spodnom uzle by sme získali:

$$C^E_D = \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{29}{40}\right)0 + \left(\frac{11}{40}\right)0\right) \ p.\ j. = 0 \ p.\ j.$$

Nulová hodnota opcie v tomto uzle znamená, že cena podkladovej akcie klesla v čase $\frac{T}{2}$ na 18 p. j. za kus a pre držiteľa opcie sa stáva opcia v tomto momente bezcenná. Hoci sa cena podkladovej akcie môže v čase T ešte navýšiť na 20 p. j., pre držiteľa opcie to v tomto čase tak či tak znamená nulový príjem, keďže realizačná cena opcie $K = 22$ p. j. je väčšia a teda sa neoplatí opciu realizovať.

Využijúc vypočítané hodnoty C_H^E a C_D^E by sme potom skutočne dostali, že $C_0^E = \frac{1700}{1029}$ p. j. Ukážeme:

$$C_0^E = \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{3}{7}\right)C_H^E + \left(\frac{4}{7}\right)C_D^E\right) \text{ p. j.} = \left(\frac{20}{21}\right)\left(\frac{85}{49}\right) \text{ p. j.} = \frac{1700}{1029} \text{ p. j.}$$

Príklad 6.4. *V podmienkach z príkladu 6.3 oceňme európsku predajnú opciu na akciu, ktorá nevypláca dividendy, s dobou splatnosti $T = 1$ rok a realizačnou cenou $K = 22$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba R je počas tohto obdobia nemenná a rovná $\ln(1,05)^2$.*

Riešenie:
Keďže ide o put opciu na rovnaké aktívum s cenovým vývojom na rovnakom binárnom strome ako v príklade 6.3, tak na nájdenie hodnoty put opcie využijeme riziko-neutrálne pravdepodobnosti vypočítané v riešení príkladu 6.3.

Keďže ide o európsku predajnú opciu, hodnoty derivátu v koncových uzloch stromu sú $P_{HH}^E = (22-28)^+ = 0$ p. j., $P_{HD}^E = (22-23)^+ = 0$ p. j., $P_{DH}^E = (22-20)^+ = 2$ p. j. a $P_{DD}^E = (22-16)^+ = 6$ p. j.

Hodnoty opcie v čase $\frac{T}{2}$ sú tieto:

$$\begin{aligned}
P_H^E &= \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{13}{20}\right)0 + \left(\frac{7}{20}\right)0\right) \text{ p. j.} = 0 \text{ p. j.}\\
P_D^E &= \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{29}{40}\right)2 + \left(\frac{11}{40}\right)6\right) \text{ p. j.} = \left(\frac{20}{21}\right)\left(\frac{31}{10}\right) \text{ p. j.} = \frac{62}{21} \text{ p. j.} \doteq 2,9524 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Pre súčasnú hodnotu opcie dostaneme:

$$P_0^E = \mathrm{e}^{-RT/2}\left(\left(\frac{3}{7}\right)P_H^E + \left(\frac{4}{7}\right)P_D^E\right) \text{ p. j.} = \left(\frac{20}{21}\right)\left(\frac{248}{147}\right) \text{ p. j.} = \frac{4960}{3087} \text{ p. j.} \doteq 1,6067 \text{ p. j.}$$

Súčasná hodnota opcie je teda $\frac{4960}{3087}$ p. j.

Poznámka 6.5. *Poznamenajme ešte, že pri výpočte súčasnej ceny opcie na bezarbitrážnom princípe sme v každom kroku pracovali s presnými hodnotami opcií v jednotlivých uzloch ako i s presnými hodnotami jednotlivých riziko-neutrálnych pravdepodobností. Keby sme totiž do výpočtov dosádzali približné hodnoty, dochádzalo by zaokrúhľovaním ku kopeniu numerických chýb a výsledná hodnota by bola nepresná. Akákoľvek nepresnosť je pri bezarbitrážnom oceňovaní derivátov veľmi nežiaduca, pretože ak by výsledná cena opcie nebola uvedená presne, dalo by to možnosť vzniknúť arbitráži, čím by bezarbitrážne oceňovanie prestalo byť bezarbitrážnym. Všetky uvádzané približné hodnoty sa vo výpočtoch nachádzajú len pre lepšiu predstavu o tom, o aké číselné hodnoty vlastne ide.*

6.5 Viackrokový model oceňovania derivátov

Pri viackrokovom modeli uvažujeme n časových krokov rovnakej dĺžky ΔT, kde $T = n\Delta T$ je doba splatnosti derivátu. Platí teda $\Delta T = \frac{T}{n}$. Napr. ak $n = 12$ a $T = 1$ rok, tak $\Delta T = \frac{1}{12}$ roka, čiže 1 mesiac. Binárny strom s n časovými krokmi a teda n-násobným vetvením vedúcim v každom čase $k\Delta T$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, k zdvojnásobneniu priebežného počtu koncových uzlov, má práve 2^n koncových uzlov v čase $n\Delta T$. S rastúcim n teda počet koncových uzlov na takomto strome narastá exponenciálne.

Súčasnú (v čase 0) hodnotu derivátu pri viackrokovom modeli oceňovania počítame rovnakým spôsobom ako pri dvojkrokovom modeli, t. j. podľa druhu derivátu určíme hodnoty derivátu v koncových uzloch, potom vypočítame hodnoty derivátu o jeden krok späť, pomocou nich, riziko-neutrálnej pravdepodobnosti na príslušnej vetve stromu a vzťahu (6.32) nájdeme hodnoty derivátu na zodpovedajúcej vetve o ďalší časový krok späť a takto postupujeme spätne cez jednotlivé uzly a jednotlivé časové kroky až ku koreňu stromu a hodnote derivátu v čase 0. Na výpočet hodnoty derivátu v uzle, v ktorom nastáva vetvenie stromu, použijeme teda hodnoty derivátu v uzloch po ňom nasledujúcich. Z toho vyplýva, že rovnako ako pri dvojkrokovom modeli aj v tomto prípade platí vzťah (6.33) s tým, že stredná hodnota derivátu je vypočítaná cez všetky časové kroky a zodpovedajúce riziko-neutrálne pravdepodobnosti.

Ohodnotenie opcie viackrokovým modelom ilustrujeme na nasledujúcom jednoduchom príklade.

Príklad 6.5. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťme európsku predajnú opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 1$ mesiac a realizačnou cenou $K = 100$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 160\ p.\ j. \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & 140\ p.\ j. & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 120\ p.\ j. & & & & 120\ p.\ j. \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
100\ p.\ j. & & & & 100\ p.\ j. & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 80\ p.\ j. & & & & 80\ p.\ j. \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 60\ p.\ j. & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & 40\ p.\ j.
\end{array}
$$

Poznámka 6.6. *V tomto príklade je strom pre podkladové aktívum konštruovaný tak, že v niektorých miestach dochádza k spájaniu uzlov, keďže pre hodnotu akcie v týchto uzloch sa* *predpokladá, že nadobúda rovnakú hodnotu pri pohybe z predchádzajúceho horného uzla smerom nadol ako aj pri pohybe z predchádzajúceho dolného uzla smerom nahor. Takýto strom má tzv. rekombinantnú vlastnosť. Vďaka tomu je počet koncových uzlov menší než 2^n, kde $n \geq 2$ je počet časových krokov (pre $n = 1$ je rovnaký). Pri binárnych stromoch s rekombinantnou vlastnosťou s rastúcim n narastá počet koncových uzlov polynomiálne. Konkrétne, ak n je počet časových krokov, tak $n + 1$ je počet koncových uzlov stromu.*

Riešenie:

Keďže v každom uzle stromu platí, že $S_{hore} = S_{teraz} + 20$ p. j. a $S_{dolu} = S_{teraz} - 20$ p. j., tak na celom strome je riziko-neutrálna pravdepodobnosť rovnaká, rovná:

$$q = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}}{S_{hore} - S_{dolu}} = \frac{S_{teraz} - S_{teraz} + 20}{S_{teraz} + 20 - S_{teraz} + 20} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

Pretože ide o európsku put opciu, tak hodnoty opcie v koncových uzloch stromu pre derivát idúc zhora dole sú 0 p. j., 0 p. j., 20 p. j. a 60 p. j.

Aplikujúc vzťah (6.32) na výpočet hodnoty derivátu v uzloch z predchádzajúceho kroku na ktorejkoľvek vetve stromu dostaneme:

$$Z_{teraz} = \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qZ_{hore} + (1-q)Z_{dolu}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_{hore} + Z_{dolu}\right).$$

Preto možno ľahko nahliadnuť, že hodnoty derivátu budú na celom strome také ako na nasledujúcom zobrazení stromu pre derivát:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{0 p. j.} \\
 & & \text{0 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{5 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{0 p. j.} \\
\text{15 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{10 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{25 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{20 p. j.} \\
 & & \text{40 p. j.} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \text{60 p. j.}
\end{tikzcd}$$

Súčasná hodnota put opcie je 15 p. j.

Pri ohodnocovaní derivátu viackrokovým modelom môžeme pozorovať zaujímavé vlastnosti súčasnej hodnoty derivátu v istých špeciálnych prípadoch.

Tvrdenie 6.1. *Súčasná hodnota derivátu, ktorý má pri viackrokovom modeli ohodnocovania v každom koncovom uzle stromu nulovú hodnotu, je nulová bez ohľadu na to, aká je bezriziková úroková sadzba R.*

Dôkaz. Dôkaz je triviálnym dôsledkom využitia vzťahu (6.32) na oceňovanie derivátu. Na každej vetve stromu platí, že ak $Z_{hore} = 0$ p. j. $= Z_{dolu}$, tak $Z_{teraz} = \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qZ_{hore} + (1-q)Z_{dolu}\right)$ $= 0$ p. j. □

Tvrdenie 6.2. *Súčasná hodnota C_0^E $\left(P_0^E\right)$ európskej kúpnej (predajnej) opcie na akciu bez dividend s realizačnou cenou K p. j. takou, že $K < S_m$ $(K > S_M)$, kde S_m (S_M) označuje najmenšiu (najväčšiu) z hodnôt podkladového aktíva v koncových uzloch stromu s rekombinantnou vlastnosťou, sa pri spojitej bezrizikovej úrokovej sadzbe R, konštantnej počas doby splatnosti opcie T, rovná $S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}$ $(K\mathrm{e}^{-RT} - S_0)$.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre kúpnu opciu, pre predajnú opciu by sme postupovali analogicky.

Označme $S_{k,j}$ cenu/hodnotu aktíva v uzle (k,j) na strome pre podkladové aktívum, kde k označuje časový krok a pre toto k poradové číslo uzlu idúc zhora dole je j, kde $j = 1, 2, \ldots, k+1$. Označujme $C_{k,j}^E$ hodnotu kúpnej opcie v tomto uzle na strome pre derivát. Špeciálne, ak $k = 0$, potom j nadobúda iba hodnotu 1 a $S_{0,1}$ je súčasná hodnota podkladového aktíva S_0, resp. $C_{0,1}^E$ je súčasná hodnota opcie C_0^E.

Nech $q_{k,j}$ označuje riziko-neutrálnu pravdepodobnosť na vetve stromu, na ktorej má uzol (k,j) dvoch nasledovníkov $(k+1,j)$ a $(k+1,j+1)$, potom:

$$q_{k,j} = \frac{S_{k,j}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{k+1,j+1}}{S_{k+1,j} - S_{k+1,j+1}}.$$

Ak $K < S_m$, tak vo všetkých koncových uzloch stromu pre derivát sú hodnoty opcie kladné, rovné rozdielu $S_{n,j} - K$ p. j., kde $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Využijúc vzťah (6.32) dostaneme pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} C_{n-1,j}^E &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q_{n-1,j}\left(S_{n,j} - K\right) + \left(1 - q_{n-1,j}\right)\left(S_{n,j+1} - K\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q_{n-1,j}S_{n,j} + \left(1 - q_{n-1,j}\right)S_{n,j+1} - K\right) \\ &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(\mathrm{e}^{R\Delta T}S_{n-1,j} - K\right) \\ &= S_{n-1,j} - K\mathrm{e}^{-R\Delta T}. \end{aligned}$$

Zvyšok dôkazu využíva matematickú indukciu. Predpokladajme, že $C_{n-k+1,j}^E = S_{n-k+1,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+2$, kde $1 < k \leq n$. Ukážeme, že potom $C_{n-k,j}^E = S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+1$.

Opätovne využijúc vzťah (6.32) pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+1$ získame:

$$\begin{aligned} C_{n-k,j}^E &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}q_{n-k,j}\left(S_{n-k+1,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right) + \\ &\quad + \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(1 - q_{n-k,j}\right)\left(S_{n-k+1,j+1} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q_{n-k,j}S_{n-k+1,j} + \left(1 - q_{n-k,j}\right)S_{n-k+1,j+1} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(\mathrm{e}^{R\Delta T}S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right) \\ &= S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Z toho vyplýva, že ak $k = n$ v (6.34), potom j nadobúda iba hodnotu 1 a máme:

$$C_0^E = C_{0,1}^E = S_{0,1} - K\mathrm{e}^{-Rn\Delta T} = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}.$$

□

Poznámka 6.7. *Poznamenajme, že tvrdenie platí aj pre stromy bez rekombinantnej vlastnosti. Dôkaz je identický až na drobné rozdiely v značení.*

Navyše, ak by sme namiesto európskej kúpnej opcie uvažovali forwardový kontrakt z pohľadu kupujúcej strany, tak identický postup dôkazu z tvrdenia 6.2 by ukázal, že pre realizačnú cenu K forwardu platí:

$$0 = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT},$$

t. j. $K = S_0\mathrm{e}^{RT}$.

6.6 Európske opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy

S európskymi opciami na akciu bez dividend sme sa už stretli. Na viacerých príkladoch sme demonštrovali použitie jedno- i viackrokového modelu oceňovania derivátu práve na európskej kúpnej a predajnej opcii na akciu nevyplácajúcu dividendy. Ukázali sme, že hodnota európskej call a put opcie závisí od toho, ako modelujeme vývoj ceny podkladového aktíva na binárnom strome a od toho, koľko stupňov vetvenia sa na strome nachádza. Čím je model bližšie realite (čo nevyhnutne nemusí znamenať vyšší počet časových krokov), tým presnejšie sme schopní určiť cenu derivátu, špeciálne opcie. Pochopiteľne, čím je doba splatnosti opcie dlhšia, tým väčšie odchýlky od skutočnej ceny opcie môžu vzniknúť. Tieto odchýlky sú spojené s modelovaním vývoja ceny podkladového aktíva, pretože čím dlhšia je doba splatnosti, tým nepresnejšie budeme určovať pohyb ceny aktíva v časoch vzdialenejších od súčasnosti. Podobne však je na dĺžku doby splatnosti citlivá úroková sadzba a predpoklad jej konštantnosti počas priveľmi dlhého obdobia nie je možné naplniť. Ďalšie nepresnosti teda môžu vznikať v spojení so zmenami úrokových sadzieb.

Ak dáme bokom možné komplikácie s ohodnocovaním opísané vyššie a budeme vývoj ceny podkladového aktíva považovať za daný a bezrizikovú úrokovú sadzbu na toto obdobie za fixovanú na určitej konštantnej výške, tak jediným určujúcim faktorom, ktorý bude vplývať na cenu európskej opcie so zvolenou maturitou T, bude výška realizačnej ceny K, ako o tom čiastočne vypovedajú tvrdenia 6.1 a 6.2. Výška K v čase splatnosti opcie rozhodne o tom, či má opcia v tom čase nejakú hodnotu a teda, či sa oplatí ju realizovať. Pretože hodnota európskej call opcie v čase T závisí od rozdielu $S_T - K$, dá sa očakávať, že jej hodnota v čase 0 bude tým vyššia, čím je K nižšie. Pri put opciách je situácia opačná, a preto sa dá očakávať, že čím väčšie bude K, tým aj hodnota put opcie v čase 0 bude vyššia.

Zhrňme predchádzajúce úvahy do nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 6.3. *Nech $K_1 > 0$ p. j. je realizačná cena call (put) opcie európskeho typu na akciu bez dividend a s danou dobou splatnosti T, počas ktorej je bezriziková úroková sadzba R konštantná. Označme súčasnú hodnotu takejto opcie ako C_0^1 (P_0^1). Nech $K_2 > K_1$ je iná realizačná cena takejto opcie. Súčasnú hodnotu call (put) opcie s realizačnou cenou K_2 označme*

C_0^2 (P_0^2). *Potom pri bezarbitrážnom oceňovaní platí:*

$$C_0^1 \geq C_0^2 \ (P_0^1 \leq P_0^2). \tag{6.35}$$

Poznámka 6.8. *Pri oceňovaní opcií na binárnych stromoch si stačí uvedomiť, že tým väčšie množstvo koncových uzlov stromu je nenulových (kladných), čím menšie je K pri call opciách, resp. čím väčšie je K pri put opciách. Viac nenulových koncových uzlov induktívne vedie k vyšším hodnotám opcie vo všetkých predchádzajúcich časových krokoch a teda aj k vyššej hodnote opcie v čase* 0. *Na dôkaz tvrdenia však nie je nutné zapájať ohodnocovanie na binárnych stromoch, ktoré môže byť zaťažené nesprávnymi odhadmi. V tomto prípade úplne postačuje princíp žiadna arbitráž.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre kúpne opcie (dôkaz pre predajné opcie je analogický).

Chceme ukázať, že $C_0^1 \geq C_0^2$. Nech by to nebola pravda, t. j. predpokladajme $C_0^1 < C_0^2$. Nakúpme 1 call opciu s realizačnou cenou K_1 a predajme 1 call opciu s realizačnou cenou K_2. Pretože podľa predpokladu je $C_0^1 < C_0^2$, v čase 0 je takto možné zarobiť $0 < C_0^2 - C_0^1$ p. j.

Nech S_T je cena podkladovej akcie v čase splatnosti opcií T. Ak v čase T je $S_T \leq K_1$, žiadnu z opcií sa neoplatí realizovať a obe majú nulovú hodnotu. Ak $K_1 < S_T \leq K_2$, tak zakúpená opcia má kladnú hodnotu $S_T - K_1 > 0$ p. j., kým opcia s realizačnou cenou K_2 má nulovú hodnotu. Ak $S_T > K_2$, tak obe opcie majú nenulovú hodnotu, ale zakúpená opcia ju má väčšiu. Platí $S_T - K_1 > S_T - K_2$. Vo všetkých prípadoch teda možno okrem kladného príjmu v čase 0, nadobudnúť nezáporný príjem v čase T vysporiadaním opcií. Inými slovami vznikla arbitrážna príležitosť. Aby sme oceňovali bez arbitráže, musí platiť $C_0^1 \geq C_0^2$. □

6.7 Kúpno-predajná parita pre európske opcie

Kúpno-predajná (alebo put-call) parita pre európske opcie na akciu bez dividend je vzťah, ktorý umožňuje vypočítať hodnotu európskej put opcie na akciu bez dividend v nejakom čase $t \in \langle 0, T \rangle$, ak poznáme hodnotu európskej call opcie na tú istú akciu s tou istou dobou splatnosti T a rovnakou realizačnou cenou K. Alebo naopak umožňuje vypočítať hodnotu európskej call opcie na akciu bez dividend v nejakom čase $t \in \langle 0, T \rangle$, ak poznáme hodnotu európskej put opcie na tú istú akciu s tou istou dobou splatnosti T a rovnakou realizačnou cenou K. Špeciálne sa budeme zaujímať o súčasné hodnoty takýchto kúpnych, resp. predajných opcií, t. j. o situáciu, keď $t = 0$.

Odvodenie tohto vzťahu sa opiera o princíp žiadna arbitráž a na nasledujúcich riadkoch ho ukážeme.

Uvažujme portfólio pozostávajúce z jednej zakúpenej akcie, jednej zakúpenej put opcie na túto akciu a jednej predanej call opcie na túto akciu s rovnakou dobou splatnosti T a rovnakou realizačnou cenou K p. j. ako pri put opcii. Sledujme hodnotu portfólia v čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

V čase maturity opcií T je hodnota portfólia

$$S_T + P_T^E - C_T^E = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = K. \tag{6.36}$$

Z toho vyplýva (princíp žiadna arbitráž), že hodnota portfólia v čase $t \in \langle 0, T\rangle$ bude:

$$S_t + P_t^E - C_t^E = K\mathrm{e}^{-R(T-t)}. \tag{6.37}$$

Zo vzťahu (6.37) pre $t = 0$ dostávame:

$$S_0 + P_0^E - C_0^E = K\mathrm{e}^{-RT}. \tag{6.38}$$

Odtiaľ:

$$P_0^E = C_0^E - S_0 + K\mathrm{e}^{-RT}, \tag{6.39}$$

resp.:

$$C_0^E = P_0^E + S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}. \tag{6.40}$$

Ak teda poznáme hodnotu C_0^E call opcie dokážeme zo vzťahu (6.39) určiť súčasnú hodnotu P_0^E put opcie a naopak, ak poznáme hodnotu P_0^E put opcie dokážeme zo vzťahu (6.40) určiť súčasnú hodnotu C_0^E call opcie. Tieto vzťahy sú obzvlášť užitočné v tom, že s ich pomocou vieme určiť súčasnú hodnotu opcie bez nutnosti počítania na binárnom strome.

Ilustrujme platnosť týchto vzťahov na príkladoch z predchádzajúcich častí učebnice. Vezmime najprv príklady 6.1 a 6.2. V nich sme vypočítali, že súčasná hodnota európskej call opcie je $\frac{50}{21}$ p. j. a súčasná hodnota európskej put opcie je $\frac{10}{3}$ p. j. pri $S_0 = 20$ p. j., $K = 22$ p. j. a $R = \ln(1,05)$. Overme platnosť (6.38):

$$S_0 + P_0^E - C_0^E = \left(20 + \frac{10}{3} - \frac{50}{21}\right) \text{ p. j.} = \frac{440}{21} \text{ p. j.} = (22 \text{ p. j.}) \left(\frac{20}{21}\right) = K\mathrm{e}^{-RT}$$

V čase T zase platí (6.36), pretože v uzle H máme:

$$S_H + P_H^E - C_H^E = (28 + 0 - 6) \text{ p. j.} = 22 \text{ p. j.} = K.$$

Podobne v uzle D máme:

$$S_D + P_D^E - C_D^E = (16 + 6 - 0) \text{ p. j.} = 22 \text{ p. j.} = K.$$

V inom čase $t \in (0, T)$ nemáme možnosť overiť pravdivosť (6.37), pretože sme ohodnocovanie robili na jednoduchom binárnom strome bez ďalšieho vetvenia.

Vezmime teraz príklady 6.3 a 6.4. V nich sme vypočítali, že súčasná hodnota európskej call opcie je $\frac{1700}{1029}$ p. j. a súčasná hodnota európskej put opcie je $\frac{4960}{3087}$ p. j. pri $S_0 = 20$ p. j., $K = 22$ p. j. a $R = \ln(1,05)^2$. Overme najskôr platnosť (6.38):

$$S_0 + P_0^E - C_0^E = \left(20 + \frac{4960}{3087} - \frac{1700}{1029}\right) \text{ p. j.} = \frac{8800}{441} \text{ p. j.} = (22 \text{ p. j.}) \left(\frac{20}{21}\right)^2 = K\mathrm{e}^{-RT}$$

V týchto príkladoch sme robili výpočet na binárnom strome s použitím dvojkrokového modelu, takže máme možnosť overiť vzťah (6.37) pre čas $t = \frac{T}{2}$. V uzle H dostaneme:

$$S_H + P_H^E - C_H^E = \left(25 + 0 - \frac{85}{21}\right) \text{ p. j.} = \frac{440}{21} \text{ p. j.} = (22 \text{ p. j.}) \frac{20}{21} = K\mathrm{e}^{-R\frac{T}{2}}.$$

V uzle D platí:

$$S_D + P_D^E - C_D^E = \left(18 + \frac{62}{21} - 0\right) \text{ p. j.} = \frac{440}{21} \text{ p. j.} = (22 \text{ p. j.})\frac{20}{21} = K\mathrm{e}^{-R\frac{T}{2}}.$$

V príklade 6.5 sme vypočítali súčasnú hodnotu európskej put opcie na akciu bez dividend s $S_0 = K = 100$ p. j., $R = 0$ a $T = \frac{1}{12}$. Vzťah (6.40) nám umožňuje určiť súčasnú hodnotu príslušnej call opcie:

$$C_0^E = P_0^E + S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} = (15 + 100 - 100) \text{ p. j.} = 15 \text{ p. j.} \tag{6.41}$$

6.8 Americké opcie na akciu bez dividend

Keďže pri amerických opciách na akciu bez dividend je možnosť uplatniť opciu do času jej vypršania, dá sa predpokladať, že ich cena bude väčšia alebo aspoň rovnaká ako cena ich európskych ekvivalentov, t. j. opcií na to isté aktívum, s tou istou dobou splatnosti a rovnakou realizačnou cenou. Ak označíme súčasnú hodnotu americkej call opcie C_0^A a súčasnú hodnotu americkej put opcie P_0^A, tak $C_0^A \geq C_0^E$, resp. $P_0^A \geq P_0^E$.

6.8.1 Americká kúpna opcia na akciu bez dividend

Ukážeme, že pre americkú call opciu na akciu bez dividend platí $C_0^A = C_0^E$.

Uvažujme dve portfólia A a B. Portfólio A pozostáva z americkej call opcie na akciu bez dividend s realizačnou cenou K a maturitou T a K kusov diskontných dlhopisov. Investor, ktorý disponuje takýmto portfóliom, je držiteľom opcie a investovaním do dlhopisov šetrí na kúpu akcie za cenu K p. j. Portfólio B je tvorené iba podkladovou akciou. Jeho majiteľ je teda vlastníkom jedného kusu akcie.

Predpokladajme $R > 0$. Označme C_t^A hodnotu opcie v čase $t \in \langle 0, T\rangle$, potom hodnota portfólia A v čase t sa rovná $C_t^A + K\mathrm{e}^{-R(T-t)}$ a hodnota portfólia B v čase t sa rovná hodnote akcie v čase t, teda S_t.

V prípade realizácie opcie v čase $t \in \langle 0, T)$ sa hodnota portfólia A rovná $S_t - K + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} < S_t$.

V prípade realizácie opcie až v čase jej maturity T sa hodnota portfólia A rovná $S_T - K + K = S_T$, ak $S_T > K$. Ak $S_T \leq K$, tak sa opciu neoplatí realizovať a hodnota portfólia A bude $0 + K = K$. Tak či onak, hodnota portfólia v čase T je $(S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$, čo je viac alebo sa rovná hodnote S_T portfólia B v tomto čase.

Ukážeme, že opciu sa neoplatí realizovať skôr než v čase T, pretože jej realizáciou investor tratí hodnotu. Presnejšie, ukážeme, že hodnota portfólia A musí byť v každom čase t väčšia alebo rovná hodnote portfólia B, lebo inak by vznikla arbitráž.

Ak by totiž hodnota portfólia A bola v nejakom čase $t_0 \in \langle 0, T)$ (v čase T to nie je možné) menšia než hodnota portfólia B, t. j. by platilo:

$$C_{t_0}^A + K\mathrm{e}^{-R(T-t_0)} < S_{t_0}, \tag{6.42}$$

tak by držiteľ portfólia B mohol predať akciu za cenu S_{t_0} a kúpiť portfólio A s kladným ziskom. Potom by mohol počkať do času T a v prípade, že $S_T > K$, uplatniť opciu, t. j. kúpiť akciu za realizačnú cenu K p. j. za peniaze z dlhopisov alebo v prípade, že $S_T \leq K$, opcia by síce ostala nerealizovaná, ale za K p. j. z dlhopisov by investor mohol kúpiť akciu bez straty alebo s kladným ziskom späť. V oboch prípadoch je v čase T držiteľom portfólia B, rovnako ako bol do času t_0 (predanú akciu má späť), ale navyše v čase t_0, prípadne aj v čase T je obohatený o kladný bezrizikový príjem. Vznikla arbitráž.

Aby sa ohodnocovalo bezarbitrážne, musí byť hodnota portfólia A v každom čase $t \in \langle 0, T\rangle$ väčšia alebo rovná hodnote portfólia B, t. j.:

$$C_t^A + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} \geq S_t. \tag{6.43}$$

Zo (6.43) navyše máme:

$$C_t^A + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} \geq S_t > S_t - K + K\mathrm{e}^{-R(T-t)},$$

teda realizáciou v inom čase než T investor stráca hodnotu opcie. Dostávame:

$$C_t^A > S_t - K. \tag{6.44}$$

Dôsledkom predchádzajúcich úvah je, že $C_t^A = C_t^E$ v každom čase $0 \leq t \leq T$ a na výpočet hodnoty amerických call opcií na akciu bez dividend možno použiť rovnaké vzťahy ako pre európske call opcie.

Poznámka 6.9. *Hoci prípad, v ktorom $R = 0$, nebol v predchádzajúcom odvodení uvažovaný, je možné aj preň prísť k rovnakému záveru. Stačí predchádzajúci postup zopakovať a uvažovať pri tom $R = 0$. Detaily tohto odvodenia prenechávame čitateľovi.*

6.8.2 Americká predajná opcia na akciu bez dividend

Uvažujme viackrokový model oceňovania derivátu na binárnom strome. Pripomeňme si, že zo vzťahu (6.33) pre európsku put opciu platí:

$$P_0^E = E_q\left(P(0,T)(K - S_T)^+\right), \tag{6.45}$$

kde $E_q(Z)$ je stredná hodnota derivátu počítaná cez všetky časové kroky a zodpovedajúce riziko-neutrálne pravdepodobnosti a $P(0,T) = \mathrm{e}^{-RT}$ je súčasná hodnota diskontného dlhopisu s dobou splatnosti T pri konštatnej úrokovej sadzbe R.

Na jednej vetve stromu máme:

$$P_{teraz}^E = \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_{hore}^E + (1-q)P_{dolu}^E\right), \tag{6.46}$$

kde

$$q = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}}{S_{hore} - S_{dolu}}$$

je riziko-neutrálna pravdepodobnosť na tejto vetve stromu.

Pretože americkú opciu možno uplatniť do času T, teda v prípade viackrokového modelu oceňovania na binárnych stromoch v ktoromkoľvek uzle tohto stromu, tak na jednej vetve stromu pre americkú opciu dostávame:

$$P^A_{teraz} = \max\{(K - S_{teraz})^+, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP^A_{hore} + (1-q)P^A_{dolu}\right)\}. \tag{6.47}$$

Vzťah (6.47) vyjadruje, že hodnotu americkej opcie v danom uzle stromu dostaneme ako maximum z dvoch čísel. Jedno z tých čísel je za čas ΔT diskontovaná očakávaná hodnota opcie počítaná cez riziko-neutrálnu pravdepodobnosť na príslušnej vetve stromu, na ktorej z daného uzlu vychádzajú dvaja nasledovníci. Druhým číslom je hodnota, ktorú by držiteľ opcie nadobudol jej okamžitou realizáciou (t. j. realizáciou v danom uzle stromu).

Zo vzťahu (6.47) taktiež vyplýva, že $P^A_{teraz} \geq P^E_{teraz}$ v ktoromkoľvek uzle stromu. Z toho samozrejme dostávame, že $P^A_0 \geq P^E_0$.

Špeciálne, ak uvažujeme jednokrokový model oceňovania, tak:

$$P^A_0 = \max\{(K - S_0)^+, \mathrm{e}^{-RT}\left(q\,(K - S_H)^+ + (1-q)\,(K - S_D)^+\right)\}, \tag{6.48}$$

kde $q = \frac{S_0\mathrm{e}^{RT} - S_D}{S_H - S_D}$.

Teraz ukážeme, že rovnosť v (6.48) zabezpečí, že oceňovanie je bezarbitrážne.

Nech je cena americkej opcie na akciu bez dividend nižšia než P^A_0 v (6.48). Potom je výhodné opciu kúpiť a buď zrealizovať okamžite s kladným ziskom, ak $(K - S_0)^+ > \mathrm{e}^{-RT}\left(q\,(K - S_H)^+ + (1-q)\,(K - S_D)^+\right)$, alebo v opačnom prípade, t. j. ak $(K - S_0)^+ \leq \mathrm{e}^{-RT}\left(q\,(K - S_H)^+ + (1-q)\,(K - S_D)^+\right)$, vytvoriť a predať replikačné portfólio (portfólio, ktoré nahrádza opciu), ktorého hodnota je vyššia než cena opcie.

Ak je cena americkej opcie na akciu bez dividend vyššia než P^A_0 v (6.48), potom je výhodné opciu predať a dosiahnuť kladný zisk pri okamžitej realizácii opcie protistranou. Ak $(K - S_0)^+ > \mathrm{e}^{-RT}\left(q\,(K - S_H)^+ + (1-q)\,(K - S_D)^+\right)$, alebo v opačnom prípade, t. j. ak $(K - S_0)^+ \leq \mathrm{e}^{-RT}\left(q\,(K - S_H)^+ + (1-q)\,(K - S_D)^+\right)$, kúpiť replikačné portfólio, ktorého hodnota je nižšia než cena opcie.

V prípade binárneho stromu s viacnásobným vetvením budeme potom v každom uzle (až na koncové) počítať hodnotu americkej put opcie na akciu bez dividend podľa vzťahu (6.47) postupujúc spätne od koncových uzlov ku koreňu. Na záver tak získame bezarbitrážnu hodnotu P^A_0.

Poznamenajme, že tento algoritmus funguje aj pre americké call opcie na akciu bez dividend s tým rozdielom, že v každom uzle sa vyberá maximum z dvojice čísel $(S_{teraz} - K)^+$ a $\mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC^A_{hore} + (1-q)C^A_{dolu}\right)$. Vzhľadom nato, že pre americké call opcie na akciu bez dividend platia rovnaké vzťahy ako pre jej európsky ekvivalent, je v tomto prípade jednoduchšie používať algoritmus výpočtu pre európske call opcie.

Príklad 6.6. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťme americkú predajnú opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ roky a realizačnou cenou $K = 100$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,1$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{21} = 225\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_{11} = 150\ p.\ j. & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 100\ p.\ j. & & & & S_{22} = 75\ p.\ j. \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_{12} = 50\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{23} = 25\ p.\ j.
\end{array}$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = 1$ rok a druhá zmena nastane o ďalší rok neskôr (čiže doba splatnosti opcie $T = 2\Delta T = 2$ roky).

Riešenie:
Pretože na celom strome platí $S_{hore} = 1,5S_{teraz}$ a $S_{dolu} = 0,5S_{teraz}$, tak na celom strome bude rovnaká riziko-neutrálna pravdepodobnosť:

$$q = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}}{S_{hore} - S_{dolu}} = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{0,1} - 0,5S_{teraz}}{1,5S_{teraz} - 0,5S_{teraz}} = \mathrm{e}^{0,1} - 0,5.$$

Z toho:

$$1 - q = 1,5 - \mathrm{e}^{0,1}.$$

Hodnota put opcie v koncových uzloch stromu pre derivát bude:

$$\begin{aligned} P_{21}^A &= 0 \text{ p. j. v uzle } 21, \\ P_{22}^A &= 25 \text{ p. j. v uzle } 22, \\ P_{23}^A &= 75 \text{ p. j. v uzle } 23. \end{aligned}$$

S využitím vzťahu (6.47) vypočítajme postupne hodnotu opcie v uzloch 11, 12 a 0:

$$\begin{aligned}
P_{11}^A &= \max\left\{(100-150)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1} - 0,5)0 + (1,5 - \mathrm{e}^{0,1})25\right)\right\} \\
&= \max\{0; 37,5\mathrm{e}^{-0,1} - 25\} \doteq 8,931 \text{ p. j.}, \\
P_{12}^A &= \max\left\{(100-50)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1} - 0,5)25 + (1,5 - \mathrm{e}^{0,1})75\right)\right\} \\
&= \max\{50; 100\mathrm{e}^{-0,1} - 50\} = 50 \text{ p. j.}, \\
P_{0}^A &= \max\left\{(100-100)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1} - 0,5)P_{11}^A + (1,5 - \mathrm{e}^{0,1})P_{12}^A\right)\right\} \\
&= \max\{0; 125\mathrm{e}^{-0,1} - 75 - 18,75\mathrm{e}^{-0,2}\} \doteq 22,753 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Teda súčasná hodnota americkej put opcie je približne $22,753$ p. j.

Ak každé vetvenie na strome nastáva s pravdepodobnosťou p približne rovnou $\frac{1}{2}$, intuitívne by sa mal riziko averzný investor zamerať na realizáciu opcie v uzle 12 (ak sa doňho cena akcie dostane), v ktorom mu opcia prináša najväčšiu, v danom okamihu istú výplatu 50 p. j. oproti neistote plynúcej z držby opcie ďalšie obdobie a hrozby poklesu jej hodnoty na 25 p. j., resp. na $25\mathrm{e}^{-0,1}$ p. j. pri zohľadnení úrokovej sadzby.

Pre porovnanie hodnota európskej opcie na túto akciu je v čase 0 rovná $25 - 125\mathrm{e}^{-0,1} + 131,25\mathrm{e}^{-0,2} \doteq 19,354$ p. j. Naozaj je teda súčasná hodnota americkej opcie väčšia než hodnota jej európskeho ekvivalentu. Navyše v každom uzle stromu pre derivát je hodnota americkej opcie väčšia alebo rovnaká ako hodnota európskej opcie. Je to priamy dôsledok použitia algoritmu, ktorý funguje na rovnakom princípe ako algoritmus pre oceňovanie európskych put opcií, ale naviac v každom uzle vyberá väčšiu z dvoch hodnôt, pričom do porovnania zapája i hodnotu opcie danú jej okamžitou realizáciou v danom uzle. Tento záver plne korešponduje s realitou, pretože možnosť realizácie americkej opcie v každom čase počas doby splatnosti opcie zdvíha jej cenu v porovnaní s cenou európskej opcie. V skutočnosti teda platí $P_t^A \geq P_t^E$ v každom čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

Príklad 6.7. *Pri podmienkach z príkladu 6.6 ohodnoťme bezarbitrážnym oceňovaním americkú kúpnu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ roky a realizačnou cenou $K = 100$ p. j.*

Riešenie:
Riziko-neutrálnu pravdepodobnosť q sme zistili v príklade 6.6. Keďže ide o to isté aktívum s vývojom na tom istom binárnom strome, riziko-neutrálna pravdepodobnosť bude na celom strome rovnaká, rovná:

$$q = \mathrm{e}^{0,1} - 0,5.$$

Hodnota call opcie v koncových uzloch stromu pre derivát bude:

$$C_{21}^A = 125 \text{ p. j. v uzle } 21,$$
$$C_{22}^A = 0 \text{ p. j. v uzle } 22,$$
$$C_{23}^A = 0 \text{ p. j. v uzle } 23.$$

Vypočítajme postupne hodnotu opcie v uzloch 11, 12 a 0:

$$\begin{aligned}
C_{11}^A &= \max\left\{(150-100)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1}-0,5)125 + (1,5-\mathrm{e}^{0,1})0\right)\right\} \\
&= \max\{50; 125 - 62,5\mathrm{e}^{-0,1}\} = 125 - 62,5\mathrm{e}^{-0,1} \doteq 68,448 \text{ p. j.}, \\
C_{12}^A &= \max\left\{(50-100)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1}-0,5)0 + (1,5-\mathrm{e}^{0,1})0\right)\right\} \\
&= \max\{0; 0\} = 0 \text{ p. j.}, \\
C_0^A &= \max\left\{(100-100)^+, \mathrm{e}^{-0,1}\left((\mathrm{e}^{0,1}-0,5)C_{11}^A + (1,5-\mathrm{e}^{0,1})C_{12}^A\right)\right\} \\
&= \max\{0; 125 - 125\mathrm{e}^{-0,1} + 31,25\mathrm{e}^{-0,2}\} \doteq 37,481 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Hodnota americkej call opcie v čase 0 je teda približne rovná 37,481 p. j. Hoci sme na výpočet tejto hodnoty použili algoritmus oceňovania amerických opcií, nebolo to nutné. Súčasná hodnota americkej call opcie na akciu bez dividend je presne taká istá ako súčasná hodnota jej európskeho ekvivalentu.

Predchádzajúci príklad demonštroval, že na výpočet súčasnej hodnoty americkej kúpnej opcie na akciu bez dividend postačí použiť algoritmus pre európsku kúpnu opciu na takúto akciu. Oceňovanie amerických kúpnych opcií na akciu bez dividend na binárnom strome by malo rešpektovať tvrdenie, že v každom čase $0 \leq t \leq T$ platí $C_t^A = C_t^E$. Jeden príklad

(6.7) nedokáže reprezentovať všetky možnosti, preto ukážeme, že oceňovanie americkej kúpnej opcie na akciu bez dividend na binárnom strome možno urobiť prostredníctvom algoritmu na oceňovanie jej európskeho ekvivalentu, t. j. že toto oceňovanie spĺňa, že hodnota americkej kúpnej opcie sa rovná hodnote európskej kúpnej opcie v každom uzle stromu pre derivát.

Tvrdenie 6.4. *Súčasná hodnota americkej kúpnej opcie na akciu bez dividend s realizačnou cenou K p. j. získaná oceňovaním na binárnom strome s rekombinantnou vlastnosťou, sa pri spojitej bezrizikovej úrokovej sadzbe R, konštantnej počas doby splatnosti opcie T, rovná súčasnej hodnote jej európskeho ekvivalentu a navyše hodnoty americkej a európskej opcie sa rovnajú v každom uzle stromu pre derivát.*

Dôkaz. Nech n je počet časových krokov na strome. Označme $S_{k,j}$ ako cenu/hodnotu aktíva v uzle (k, j) na strome pre podkladové aktívum, kde k označuje časový krok a pre toto k poradové číslo uzlu idúc zhora dole je j, kde $j = 1, 2, \ldots, k + 1$. Označujme $C^A_{k,j}$ hodnotu americkej kúpnej opcie v tomto uzle na strome pre derivát. Špeciálne, ak $k = 0$, potom j nadobúda iba hodnotu 1 a $S_{0,1}$ je súčasná hodnota podkladového aktíva S_0, resp. $C^A_{0,1}$ je súčasná hodnota opcie C^A_0.

Podobne nech $C^E_{k,j}$ označuje hodnotu európskej kúpnej opcie v uzle (k, j) na strome pre derivát. Potom $C^E_{0,1}$ je súčasná hodnota európskej opcie C^E_0.

Nech $q_{k,j}$ označuje riziko-neutrálnu pravdepodobnosť na vetve stromu, na ktorej má uzol (k, j) dvoch nasledovníkov $(k + 1, j)$ a $(k + 1, j + 1)$, potom:

$$q_{k,j} = \frac{S_{k,j}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{k+1,j+1}}{S_{k+1,j} - S_{k+1,j+1}}.$$

Označme S_m najmenšiu z hodnôt podkladového aktíva v koncových uzloch n-krokového stromu a S_M najväčšiu z hodnôt podkladového aktíva v koncových uzloch tohto stromu. Potom aktívum nadobúda hodnotu S_m v uzle $(n, n + 1)$ a hodnotu S_M v uzle $(n, 1)$.

Dôkaz pozostáva z viacerých častí. Najprv sa budeme venovať prípadu, keď $K < S_m$. Potom z konštrukcie stromu a predpokladu (6.30) vyplýva, že $K < S_{k,j}$ pre všetky uzly (k, j). Navyše vo všetkých koncových uzloch stromu pre derivát nadobúda opcia kladnú hodnotu, rovnú rozdielu $S_{n,j} - K$ p. j., kde $j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Vypočítajme teraz hodnotu opcie v uzloch z predchádzajúceho časového kroku $n - 1$, pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme:

$$\begin{aligned} C^A_{n-1,j} &= \max\left\{\max\left\{0, S_{n-1,j} - K\right\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q_{n-1,j}\left(S_{n,j} - K\right) + \left(1 - q_{n-1,j}\right)\left(S_{n,j+1} - K\right)\right)\right\} \\ &= \max\left\{S_{n-1,j} - K, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(S_{n,j+1} - K + q_{n-1,j}\left(S_{n,j} - S_{n,j+1}\right)\right)\right\} \\ &= \max\left\{S_{n-1,j} - K, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(\mathrm{e}^{R\Delta T}S_{n-1,j} - K\right)\right\} \\ &= \max\left\{S_{n-1,j} - K, S_{n-1,j} - K\mathrm{e}^{-R\Delta T}\right\} \\ &= S_{n-1,j} - K\mathrm{e}^{-R\Delta T} = C^E_{n-1,j}. \end{aligned}$$

Ďalší postup pracuje s matematickou indukciou. Predpokladajme, že $C^A_{n-k+1,j} = S_{n-k+1,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T} = C^E_{n-k+1,j}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n - k + 2$, kde $1 < k \leq n$. Ukážeme, že potom $C^A_{n-k,j} = S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T} = C^E_{n-k,j}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n - k + 1$.

Pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+1$ máme:

$$\begin{aligned}
C^A_{n-k,j} &= \max\Big\{\max\{0, S_{n-k,j} - K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T} q_{n-k,j}\left(S_{n-k+1,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right) + \\
&\quad + \mathrm{e}^{-R\Delta T}(1 - q_{n-k,j})\left(S_{n-k+1,j+1} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right)\Big\} \\
&= \max\big\{S_{n-k,j} - K, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\big(q_{n-k,j}(S_{n-k+1,j} - S_{n-k+1,j+1}) + \\
&\quad + S_{n-k+1,j+1} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\big)\big\} \\
&= \max\left\{S_{n-k,j} - K, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(\mathrm{e}^{R\Delta T} S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T}\right)\right\} \\
&= \max\left\{S_{n-k,j} - K, S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T}\right\} \\
&= S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T} = C^E_{n-k,j}.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Z toho vyplýva, že ak $k = n$ v (6.49), potom j nadobúda iba hodnotu 1 a získame:

$$C^A_0 = C^A_{0,1} = S_{0,1} - K\mathrm{e}^{-RT} = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} = C^E_0.$$

Ďalšia časť dôkazu predpokladá, že $K \geq S_M$. Potom v každom uzle (k, j) stromu je $\max\{0, S_{k,j} - K\} = 0$ p. j. To tiež znamená, že vo všetkých koncových uzloch stromu pre derivát nadobúda opcia nulovú hodnotu. Ak však na vetve stromu platí $C^A_{hore} = 0 = C^A_{dolu}$, tak $C^A_{teraz} = \max\left\{\max\{0, S_{teraz} - K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC^A_{hore} + (1-q)C^A_{dolu}\right)\right\} = \max\{0, 0\} = 0 = C^E_{teraz}$, kde q je riziko-neutrálna pravdepodobnosť na tejto vetve stromu.

Záverečná časť dôkazu je technicky najnáročnejšia a využíva závery z jeho prvej a druhej časti. Uvažujme $S_m \leq K < S_M$. Potom existuje také $1 \leq j_0 < n+1$, že $S_{n,j_0+1} \leq K < S_{n,j_0}$.

V každom uzle tej časti stromu pre derivát, v ktorej ležia uzly $(n-k, j)$ tak, že pre $k = 0, 1, ..., j_0 - 1$, je $j = 1, 2, ..., j_0 - k$, je hodnota americkej opcie rovnaká ako hodnota európskej opcie, rovná $S_{n-k,j} - K\mathrm{e}^{-Rk\Delta T}$ p. j. Toto tvrdenie vychádza z prvej časti dôkazu.

V každom uzle tej časti stromu pre derivát, v ktorej ležia uzly $(n-k, j)$ tak, že pre $k = 0, 1, ..., n - j_0$ je $j = j_0 + 1, j_0 + 2, ..., n + 1 - k$, je hodnota americkej opcie rovnaká ako hodnota európskej opcie, rovná 0 p. j. Toto tvrdenie vychádza z druhej časti dôkazu.

Predpokladajme, že pre nejakú vetvu stromu pre podkladovú akciu platí $S_{dolu} \leq K < S_{hore}$, potom s využitím predpokladu (6.30) dostávame:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(1 - \mathrm{e}^{-R\Delta T}\right)(S_{hore} - S_{dolu}) \\
S_{hore}\mathrm{e}^{-R\Delta T} - S_{teraz} &\leq S_{hore} - S_{teraz} - S_{dolu}\left(1 - \mathrm{e}^{-R\Delta T}\right) \\
S_{dolu}\left(S_{hore}\mathrm{e}^{-R\Delta T} - S_{teraz}\right) &\leq K\left(S_{hore} - S_{teraz} - S_{dolu}\left(1 - \mathrm{e}^{-R\Delta T}\right)\right) \\
S_{hore}S_{dolu}\mathrm{e}^{-R\Delta T} - S_{teraz}S_{dolu} &\leq KS_{hore} - KS_{teraz} - KS_{dolu} + KS_{dolu}\mathrm{e}^{-R\Delta T} \\
(S_{teraz} - K)(S_{hore} - S_{dolu}) &\leq \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}\right)(S_{hore} - K) \\
S_{teraz} - K &\leq \mathrm{e}^{-R\Delta T} q\,(S_{hore} - K).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Ak uplatníme záver (6.50) na vetve stromu pre derivát s uzlami $(n-1, j_0)$, (n, j_0), (n, j_0+1), získame:

$$\begin{aligned}
C^A_{n-1,j_0} &= \max\left\{\max\{0, S_{n-1,j_0} - K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T} q_{n-1,j_0}(S_{n,j_0} - K)\right\} \\
&= \mathrm{e}^{-R\Delta T} q_{n-1,j_0}(S_{n,j_0} - K) = C^E_{n-1,j_0}.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Podobne platí:

$$
\begin{aligned}
C^A_{n-2,j_0} &= \max\left\{\max\{0, S_{n-2,j_0} - K\}, \mathrm{e}^{-2R\Delta T} q_{n-2,j_0} q_{n-1,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right)\right\} \\
&= \mathrm{e}^{-2R\Delta T} q_{n-2,j_0} q_{n-1,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right) = C^E_{n-2,j_0},
\end{aligned} \tag{6.52}
$$

pretože ak $S_{n-2,j_0} - K > 0$, potom podľa (6.50) $S_{n-2,j_0} - K \leq \mathrm{e}^{-R\Delta T} q_{n-2,j_0} \left(S_{n-1,j_0} - K\right)$, kde podľa (6.51) $S_{n-1,j_0} - K \leq \mathrm{e}^{-R\Delta T} q_{n-1,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right)$. Ak $S_{n-2,j_0} - K \leq 0$, (6.52) je triviálne splnené.

Z nerovnosti (6.50) tiež vyplýva, že:

$$
\max\{0, S_{n-k,j_0} - K\} \leq \mathrm{e}^{-Rk\Delta T} \prod_{m=1}^{k} q_{n-m,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right) \tag{6.53}
$$

pre akékoľvek $k = 1, 2, ..., n - j_0 + 1$.

Opäť postupujeme matematickou indukciou, tentokrát pozdĺž cesty stromom uzlami $(n - k, j_0)$, kde $k = 1, 2, ..., n - j_0 + 1$. Predpokladajme, že platí:

$$
C^A_{n-k+1,j_0} = C^E_{n-k+1,j_0} = \mathrm{e}^{-R(k-1)\Delta T} \prod_{m=1}^{k-1} q_{n-m,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right),
$$

kde $1 < k \leq n - j_0 + 1$. Ukážeme, že potom

$$
C^A_{n-k,j_0} = C^E_{n-k_0,j} = \mathrm{e}^{-Rk\Delta T} \prod_{m=1}^{k} q_{n-m,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right).
$$

S využitím (6.53) máme:

$$
\begin{aligned}
C^A_{n-k,j_0} &= \max\left\{ \max\left\{0, S_{n-k,j_0} - K\right\}, \mathrm{e}^{-Rk\Delta T} q_{n-k,j_0} \prod_{m=1}^{k-1} q_{n-m,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right) \right\} \\
&= \mathrm{e}^{-Rk\Delta T} \prod_{m=1}^{k} q_{n-m,j_0} \left(S_{n,j_0} - K\right) = C^E_{n-k,j_0}.
\end{aligned} \tag{6.54}
$$

Pre všetky uzly (k, j) stromu pre derivát, ktoré sme doposiaľ vyšetrili, platí:

$$
C^A_{k,j} = C^E_{k,j} \geq \max\left\{0, S_{k,j} - K\right\}. \tag{6.55}
$$

Táto informácia spolu s ďalším využitím matematickej indukcie na ostávajúcich uzloch stromu pre derivát sa využíva vo zvyšku dôkazu.

Pre hodnotu derivátu v uzle $(n-2, j_0-1)$ platí:

$$\begin{aligned}
C^A_{n-2,j_0-1} &= \max\big\{\max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\big(q_{n-2,j_0-1}C^E_{n-1,j_0-1}+\\
&\quad +(1-q_{n-2,j_0-1})\,C^E_{n-1,j_0}\big)\big\}\\
&\geq \max\big\{\max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\big(q_{n-2,j_0-1}\max\{0, S_{n-1,j_0-1}-K\}+\\
&\quad +(1-q_{n-2,j_0-1})\max\{0, S_{n-1,j_0}-K\}\big)\big\}\\
&\geq \max\big\{\max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\big(q_{n-2,j_0-1}\,(S_{n-1,j_0-1}-K)+\\
&\quad +(1-q_{n-2,j_0-1})\,(S_{n-1,j_0}-K)\big)\big\}\\
&= \max\big\{\max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\big(q_{n-2,j_0-1}\,(S_{n-1,j_0-1}-S_{n-1,j_0})+\\
&\quad +S_{n-1,j_0}-K\big)\big\}\\
&= \max\big\{\max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}, S_{n-2,j_0-1}-K\mathrm{e}^{-R\Delta T}\big\}\\
&= \max\big\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\mathrm{e}^{-R\Delta T}\big\}\\
&\geq \max\{0, S_{n-2,j_0-1}-K\}. \qquad (6.56)
\end{aligned}$$

Z nerovnosti (6.56) vyplýva, že hodnota opcie v uzle $(n-2, j_0-1)$ je väčšia alebo rovnaká ako maximum z čísel nula a $S_{n-2,j_0-1}-K$. Ak $S_{n-2,j_0-1}-K \leq 0$, tak $C^A_{n-2,j_0-1} \geq 0$ a v prípade, že $S_{n-2,j_0-1}-K > 0$, tak $C^A_{n-2,j_0-1} \geq S_{n-2,j_0-1}-K$. V oboch prípadoch dostávame:

$$C^A_{n-2,j_0-1} = \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q_{n-2,j_0-1}C^E_{n-1,j_0-1}+(1-q_{n-2,j_0-1})\,C^E_{n-1,j_0}\right) = C^E_{n-2,j_0-1}. \qquad (6.57)$$

Vypĺňajúc hodnoty v zostávajúcich uzloch (k, j) stromu pre derivát, ktoré ešte neboli v dôkaze prejdené, postupujúc krok po kroku od väčších časov k menším a aplikujúc odvodenie v (6.56) získame (6.55) v každom z týchto uzlov, čím sme kompletne dokázali tvrdenie. Technické podrobnosti záverečnej časti dôkazu prenechávame čitateľovi. □

Poznámka 6.10. *Poznamenajme, že hlavné oporné body dôkazu tvrdenia 6.4 sú nerovnosť* (6.50) *a postup v* (6.56). *O zvyšok sa v dôkaze „postará“ matematická indukcia. Aplikovaním výhradne týchto esencií a techniky matematickej indukcie by bolo možné dôkaz tvrdenia skrátiť. Jeho dlhšia verzia prítomná v tejto učebnici mala za cieľ ukázať štruktúru hodnôt opcie na jednotlivých častiach stromu pre derivát a navyše niektoré jej časti nájdu uplatnenie v nasledujúcich tvrdeniach o amerických opciách.*

Tvrdenie je platné aj pre binárne stromy bez rekombinantnej vlastnosti. Dôkaz by analogicky pracoval so (6.50), (6.56) *a využíval matematickú indukciu.*

Podobne ako pri európskych opciách aj pri amerických opciách pozorujeme, že v istých špeciálnych prípadoch má ich súčasná hodnota pri ohodnocovaní viackrokovým modelom niektoré zaujímavé vlastnosti.

Tvrdenie 6.5. *Súčasná hodnota C^A_0 $\left(P^A_0\right)$ americkej kúpnej (predajnej) opcie na akciu bez dividend s realizačnou cenou K p. j. takou, že $K < S_m$ $(K > S_M)$, kde S_m (S_M) označuje najmenšiu (najväčšiu) z hodnôt podkladového aktíva v koncových uzloch stromu s rekombinantnou* *vlastnosťou, je pri spojitej bezrizikovej úrokovej sadzbe R, konštantnej počas doby splatnosti opcie T, rovná $S_0 - Ke^{-RT}$ $(K - S_0)$.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre americkú predajnú opciu. Dôkaz pre americkú kúpnu opciu je identický s dôkazom tvrdenia 6.2 pre európsku kúpnu opciu, keďže jej americký ekvivalent má rovnakú hodnotu a platia preň rovnaké vzťahy. Podrobnosti dôkazu pre americkú kúpnu opciu možno tiež nájsť v prvej časti dôkazu tvrdenia 6.4.

Označme $S_{k,j}$ ako cenu/hodnotu aktíva v uzle (k, j) na strome pre podkladové aktívum, kde k označuje časový krok a pre toto k poradové číslo uzlu idúc zhora dole je j, kde $j = 1, 2, \ldots, k+1$. Označujme $P^A_{k,j}$ hodnotu americkej predajnej opcie v tomto uzle na strome pre derivát. Špeciálne, ak $k = 0$, potom j nadobúda iba hodnotu 1 a $S_{0,1}$ je súčasná hodnota podkladového aktíva S_0, resp. $P^A_{0,1}$ je súčasná hodnota opcie P^A_0.

Nech $q_{k,j}$ označuje riziko-neutrálnu pravdepodobnosť na vetve stromu, na ktorej má uzol (k, j) dvoch nasledovníkov $(k+1, j)$ a $(k+1, j+1)$, potom:

$$q_{k,j} = \frac{S_{k,j}e^{R\Delta T} - S_{k+1,j+1}}{S_{k+1,j} - S_{k+1,j+1}}.$$

Ak $K > S_M$, tak vo všetkých koncových uzloch stromu pre opciu nadobúda opcia kladnú hodnotu, rovnú rozdielu $K - S_{n,j}$ p. j., kde $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Z toho tiež vyplýva, že $K - S_{k,j} > 0$ p. j. pre ľubovoľný uzol (k, j). Využijúc vzťah (6.47) dostaneme pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
P^A_{n-1,j} &= \max\left\{\max\{0, K - S_{n-1,j}\}, e^{-R\Delta T}\left(q_{n-1,j}\left(K - S_{n,j}\right) + \left(1 - q_{n-1,j}\right)\left(K - S_{n,j+1}\right)\right)\right\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-1,j}, e^{-R\Delta T}\left(K - S_{n,j+1} - q_{n-1,j}\left(S_{n,j} - S_{n,j+1}\right)\right)\right\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-1,j}, e^{-R\Delta T}\left(K - e^{R\Delta T}S_{n-1,j}\right)\right\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-1,j}, Ke^{-R\Delta T} - S_{n-1,j}\right\} \\
&= K - S_{n-1,j}.
\end{aligned}$$

Zvyšok dôkazu využíva matematickú indukciu. Predpokladajme, že $P^A_{n-k+1,j} = K - S_{n-k+1,j}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+2$, kde $1 < k \le n$. Ukážeme, že potom $P^A_{n-k,j} = K - S_{n-k,j}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+1$.

Opätovne využijúc vzťah (6.47) pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n-k+1$ získame:

$$\begin{aligned}
P^A_{n-k,j} &= \max\Big\{\max\{0, K - S_{n-k,j}\}, e^{-R\Delta T}q_{n-k,j}\left(K - S_{n-k+1,j}\right) + \\
&\quad + e^{-R\Delta T}\left(1 - q_{n-k,j}\right)\left(K - S_{n-k+1,j+1}\right)\Big\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-k,j}, e^{-R\Delta T}\left(K - q_{n-k,j}S_{n-k+1,j} + \left(1 - q_{n-k,j}\right)S_{n-k+1,j+1}\right)\right\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-k,j}, e^{-R\Delta T}\left(K - e^{R\Delta T}S_{n-k,j}\right)\right\} \\
&= \max\left\{K - S_{n-k,j}, Ke^{-R\Delta T} - S_{n-k,j}\right\} \\
&= K - S_{n-k,j}.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Z toho vyplýva, že ak $k = n$ v (6.58), potom j nadobúda iba hodnotu 1 a máme:

$$P^A_0 = P^A_{0,1} = K - S_{0,1} = K - S_0.$$

□

Tvrdenie 6.6. *Súčasná hodnota americkej kúpnej (predajnej) opcie na akciu bez dividend s realizačnou cenou K p. j. takou, že $K \geq S_M$ ($K \leq S_m$), kde S_m (S_M) označuje najmenšiu (najväčšiu) z hodnôt podkladového aktíva v koncových uzloch stromu s rekombinantnou vlastnosťou, sa pri spojitej bezrizikovej úrokovej sadzbe R, konštantnej počas doby splatnosti opcie T, rovná 0 p. j. (0 p. j.).*

Dôkaz. Ak $K \geq S_M$ pre americkú kúpnu opciu, resp. $K \leq S_m$ pre americkú predajnú opciu, hodnoty opcie vo všetkých koncových uzloch stromu sú nulové. Pre americkú kúpnu opciu je preto tvrdenie priamym dôsledkom tvrdenia 6.1, resp. podrobnosti dôkazu pre americkú kúpnu opciu možno tiež nájsť v druhej časti dôkazu tvrdenia 6.4.

Pre americkú predajnú opciu tvrdenie vyplýva bezprostredne zo vzťahu (6.47) a z toho, že v každom uzle (k, j) stromu je $\max\{0, K - S_{k,j}\} = 0$ p. j. Na každej vetve stromu totiž platí, že ak $P^A_{hore} = 0$ p. j. $= P^A_{dolu}$, tak $P^A_{teraz} = \max\{(K - S_{teraz})^+, \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP^A_{hore} + (1-q)P^A_{dolu}\right)\} = \max\{0, \mathrm{e}^{-R\Delta T}(q0 + (1-q)0)\} = 0$ p. j. □

Poznámka 6.11. *Poznamenajme, že tvrdenia 6.5 a 6.6 platia aj pre stromy bez rekombinantnej vlastnosti. Dôkazy by sa urobili analogicky.*

6.9 Kúpno-predajná parita pre americké opcie

Kúpno-predajná (alebo put-call) parita pre americké opcie na akciu bez dividend nemá podobu rovnosti ako pri kúpno-predajnej parite pre európske opcie na akciu bez dividend. Jej odvodenie však vychádza zo vzťahu (6.37) pre európske opcie.

Uvažujme jednu americkú a jednu európsku call opciu na akciu bez dividend a jednu americkú a jednu európsku put opciu na tú istú akciu, s tou istou dobou splatnosti T a rovnakou realizačnou cenou K. Zo (6.37) máme, že v každom čase $t \in \langle 0, T\rangle$ bude:

$$S_t + P^E_t - C^E_t = K\mathrm{e}^{-R(T-t)},$$

kde P^E_t je hodnota európskej put opcie v čase t, C^E_t je hodnota európskej call opcie v čase t a S_t je cena/hodnota podkladovej akcie v čase t.

Keďže $C^A_t = C^E_t$ pre každé $t \in \langle 0, T\rangle$, čiže hodnota americkej call opcie na akciu bez dividend je rovnaká ako hodnota jej európskeho ekvivalentu, tak:

$$S_t + P^E_t - C^A_t = K\mathrm{e}^{-R(T-t)}. \tag{6.59}$$

Pretože $P^A_t \geq P^E_t$ pre každé $t \in \langle 0, T\rangle$, čiže hodnota americkej put opcie na akciu bez dividend je väčšia alebo rovnaká ako hodnota jej európskeho ekvivalentu, tak zo (6.59) dostávame:

$$S_t + P^A_t - C^A_t \geq K\mathrm{e}^{-R(T-t)}. \tag{6.60}$$

Ak počkáme s realizáciou opcií do času T, tak:

$$S_T + P^A_T - C^A_T = K. \tag{6.61}$$

Ak zrealizujeme put opciu v čase $0 \leq t < T$ (pretože sa neoplatí realizovať call opciu skôr ako v čase T), potom:

$$S_t + K - S_t - C_t^A = K - C_t^E \leq K \tag{6.62}$$

Z rovnosti (6.61) a z nerovnosti (6.62) vyplýva:

$$S_t + P_t^A - C_t^A \leq K \tag{6.63}$$

pre každé $t \in \langle 0, T \rangle$.

Vzťahy (6.60) a (6.63) určujú kúpno-predajnú paritu pre americké opcie. V každom čase $0 \leq t \leq T$ teda platí:

$$K\mathrm{e}^{-R(T-t)} \leq S_t + P_t^A - C_t^A \leq K. \tag{6.64}$$

Platnosť vzťahu (6.64) môžeme overiť pre americkú call a put opciu z príkladov 6.6 a 6.7. Vzťah (6.64) by mal byť splnený v každom z uzlov stromu pre derivát a v každom z časov 0, $\frac{T}{2} = 1$ rok, $T = 2$ roky.

V čase T a v uzloch 21, 22 a 23 máme:

$$\begin{aligned}
K\mathrm{e}^{-R(T-T)} = K = 100 \text{ p. j.} \leq \quad & S_{21} + P_{21}^A - C_{21}^A = 225 + 0 - 125 = 100 \text{ p. j.} \quad \leq K = 100 \text{ p. j.},\\
K\mathrm{e}^{-R(T-T)} = K = 100 \text{ p. j.} \leq \quad & S_{22} + P_{22}^A - C_{22}^A = 75 + 25 - 0 = 100 \text{ p. j.} \quad \leq K = 100 \text{ p. j.},\\
K\mathrm{e}^{-R(T-T)} = K = 100 \text{ p. j.} \leq \quad & S_{23} + P_{23}^A - C_{23}^A = 25 + 75 - 0 = 100 \text{ p. j.} \quad \leq K = 100 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

V čase $\frac{T}{2}$ a v uzloch 11 a 12 máme:

$$\begin{aligned}
K\mathrm{e}^{-R\frac{T}{2}} = 100\mathrm{e}^{-0,1} \text{ p. j.} \quad &\leq \quad S_{11} + P_{11}^A - C_{11}^A = 150 + 37,5\mathrm{e}^{-0,1} - 25 - \left(125 - 62,5\mathrm{e}^{-0,1}\right) = \\
100\mathrm{e}^{-0,1} \text{ p. j.} \quad &\leq \quad K = 100 \text{ p. j.},\\
K\mathrm{e}^{-R\frac{T}{2}} = 100\mathrm{e}^{-0,1} \text{ p. j.} \quad &\leq \quad S_{12} + P_{12}^A - C_{12}^A = 50 + 50 - 0 = 100 \text{ p. j.} \leq K = 100 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

V čase 0 a počiatočnom uzle máme:

$$\begin{aligned}
K\mathrm{e}^{-RT} = 100\mathrm{e}^{-0,2} \text{ p. j.} \quad &\leq \quad S_0 + P_0^A - C_0^A = 100 + 125\mathrm{e}^{-0,1} - 75 - 18,75\mathrm{e}^{-0,2} - \\
\left(125 - 125\mathrm{e}^{-0,1} + 31,25\mathrm{e}^{-0,2}\right) \text{ p. j.} \quad &= \quad 250\mathrm{e}^{-0,1} - 100 - 50\mathrm{e}^{-0,2} \text{ p. j.} \leq K = 100 \text{ p. j.},
\end{aligned}$$

kde $100\mathrm{e}^{-0,2} \doteq 81,873$ p. j. a $250\mathrm{e}^{-0,1} - 100 - 50\mathrm{e}^{-0,2} \doteq 85,273$ p. j.

6.10 Špeciálne prípady oceňovania derivátov

Strom pre podkladové aktívum v príkladoch 6.6 a 6.7 je špeciálnym prípadom jeho konštrukcie, keď na každej vetve tohto stromu sa predpokladá, že z počiatočného uzla s hodnotou aktíva S_{teraz} príde za čas ΔT k pohybu hodnoty aktíva smerom nahor tak, že hodnota aktíva v takomto uzle bude $S_{hore} = uS_{teraz}$, resp. k pohybu hodnoty aktíva smerom nadol tak, že hodnota aktíva v tomto uzle bude $S_{dolu} = dS_{teraz}$, kde $u > \mathrm{e}^{R\Delta T} \geq 1 > d > 0$.

Podmienka:

$$0 < d < 1 \leq \mathrm{e}^{R\Delta T} < u, \tag{6.65}$$

kde R je bezriziková úroková sadzba konštantná počas obdobia splatnosti derivátu, zodpovedá predpokladu (6.30).

Uvedenú konštrukciu stromu môžeme znázorniť takto:

$$\begin{array}{ccc} & & uS_{teraz} \\ & \nearrow & \\ S_{teraz} & & \\ & \searrow & \\ & & dS_{teraz} \end{array}$$

Všimnime si, že pri takomto postupe bude vo výslednom strome hodnota aktíva v každom uzle kladná. Navyše sme sa s ním v rovnakej podobe stretli už predtým v časti 4.3.5 o bezarbitrážnom oceňovaní bezdividendových akcií.

Význam uvedenej konštrukcie pri oceňovaní derivátu na takéto aktívum potvrdzuje aj konštantnosť riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q na celom strome:

$$q = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - dS_{teraz}}{uS_{teraz} - dS_{teraz}} = \frac{\mathrm{e}^{R\Delta T} - d}{u - d}. \tag{6.66}$$

Naviac, ak $d = \frac{1}{u}$, tak v každom párnom kroku, v ktorom dochádza k vetveniu, pozorujeme, že:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & \\ & & uS_{teraz} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S_{teraz} & & & & udS_{teraz} = duS_{teraz} = \frac{1}{u}uS_{teraz} = S_{teraz} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & dS_{teraz} & & \\ & & & \searrow & \end{array}$$

Hovoríme, že strom zachováva stred.

Autori Cox, Ross a Rubinstein vo svojej práci [23] navrhovali položiť $u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$, $d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta T}}$, kde σ je volatilita výnosov podkladového aktíva v období ΔT dostatočne krátkom.

6.11 Binárne opcie

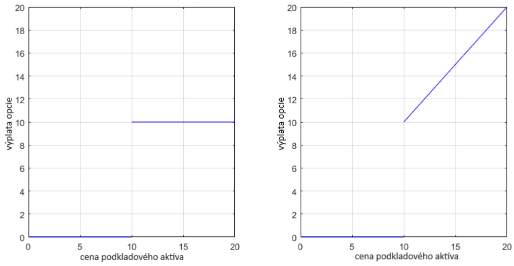
Binárnou opciou je call (put) opcia, ktorá v čase jej splatnosti vypláca pevne stanovenú výplatu B p. j. v prípade, že hodnota podkladového aktíva je väčšia (menšia) než realizačná cena K p. j. a v opačnom prípade vypláca 0 p. j.

V prípade binárnych opcií rozlišujeme opcie typu **bet**, tiež nazývané **cash-or-nothing** (v ďalšom budeme používať skratku CON), ktoré vyplácajú pevne stanovenú čiastku vo výške B p. j. alebo nič, alebo opcie typu **asset-or-nothing** (v ďalšom budeme pre tieto opcie používať skratku AON), ktoré vyplácajú hodnotu aktíva S_T p. j. v čase splatnosti opcie T alebo nič.

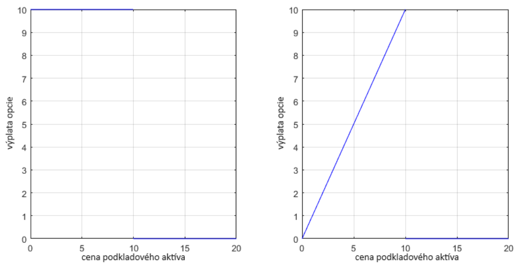
Binárne opcie sú vo svojej podstate opcie európskeho typu, pretože ich možno realizovať až v čase ich splatnosti. Tvoria základné stavebné kamene, pomocou ktorých možno vyskladať iné opcie.

Na Obr. 6.5 sa nachádza výplatný diagram binárnej call CON opcie s $B = 10$ p. j. a $K = 10$ p. j. a výplatný diagram binárnej call AON opcie s $K = 10$ p. j.

Na Obr. 6.6 sa nachádza výplatný diagram binárnej put CON opcie s $B = 10$ p. j. a $K = 10$ p. j. a výplatný diagram binárnej put AON opcie s $K = 10$ p. j.



Obr. 6.5: Výplatný diagram pre držiteľa binárnej call CON opcie s $B = 10$ p. j. a $K = 10$ p. j. vľavo. Výplatný diagram pre držiteľa binárnej call AON opcie s $K = 10$ p. j. vpravo. [32] [33]



Obr. 6.6: Výplatný diagram pre držiteľa binárnej put CON opcie s $B = 10$ p. j. a $K = 10$ p. j. vľavo. Výplatný diagram pre držiteľa binárnej put AON opcie s $K = 10$ p. j. vpravo. [32] [33]

Pri bližšom skúmaní výplatných diagramov si možno uvedomiť, že výplatný diagram držiteľa európskej call opcie dostaneme s využitím výplatných diagramov CON a AON call opcií tak, že pre ľubovoľné $S_T \geq 0$ p. j. od hodnoty AON call opcie v čase T s realizačnou cenou K p. j. odpočítame hodnotu CON call opcie v čase T s realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j.

Podobne výplatný diagram držiteľa európskej put opcie dostaneme s využitím výplatných diagramov CON a AON put opcií tak, že pre ľubovoľné $S_T \geq 0$ p. j. od hodnoty CON put opcie v čase T s realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j. odpočítame hodnotu AON put opcie v čase T s realizačnou cenou K p. j.

Európsku call opciu s realizačnou cenou K p. j. teda možno vyskladať ako portfólio binárnych call CON a AON opcií, v ktorom držiteľ portfólia je vlastníkom jednej AON call opcie s realizačnou cenou K p. j. a vypisovateľom jednej CON call opcie s rovnakou realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j. Ak v čase T bude $S_T \leq K$, tak hodnota CON aj AON call opcie je nulová a teda aj hodnota portfólia je nulová (rovnako ako pri európskej call opcii).

Ak v čase T bude $S_T > K$, tak hodnota AON call opcie sa rovná S_T p. j. a hodnota CON call opcie sa rovná K p. j., teda hodnota portfólia v čase T bude $(S_T - K)$ p. j. (rovnako ako pri európskej call opcii).

Európsku put opciu s realizačnou cenou K p. j. možno vyskladať ako portfólio binárnych put CON a AON opcií, v ktorom držiteľ portfólia je vlastníkom jednej CON put opcie s realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j. a vypisovateľom jednej AON put opcie s rovnakou realizačnou cenou K p. j. Ak v čase T bude $S_T \geq K$, tak hodnota CON aj AON put opcie je nulová a teda aj hodnota portfólia je nulová (rovnako ako pri európskej put opcii). Ak v čase T bude $S_T < K$, tak hodnota AON put opcie je rovná S_T p. j. a hodnota CON put opcie sa rovná K p. j., teda hodnota portfólia v čase T bude $(K - S_T)$ p. j. (rovnako ako pri európskej put opcii).

Pretože portfóliá poskytujú v čase T rovnaké výplaty ako európska call, resp. put opcia, mali by mať v čase 0 rovnakú hodnotu ako tieto opcie, mali by rovnako stáť. To plne rešpektuje bezarbitrážne ohodnocovanie opcií na binárnych stromoch tak, ako sme ho opísali vyššie.

Pozrime sa, aká je súčasná hodnota binárnych opcií pri ohodnocovaní na jednoduchom binárnom strome, na ktorom pre pohyb ceny aktíva za dobu splatnosti opcie T platí:

$$\begin{array}{ccc} & & S_H \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & S_D \end{array}$$

pri splnení predpokladu v (6.1). V ďalšom budeme hodnotu binárnych opcií v čase T indexovať dolným indexom H pri vzniku udalosti H, resp. dolným indexom D pri vzniku udalosti D. Pripomeňme, že na tomto strome vypočítame riziko-neutrálnu pravdepodobnosť q ako:

$$q = \frac{S_0 \mathrm{e}^{RT} - S_D}{S_H - S_D}.$$

Uvažujme binárnu CON call opciu s realizačnou cenou K p. j., poskytujúcou výplatu B p. j., ak v čase T je $S_T > K$. Označme B_t^C hodnotu tejto opcie v čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

Ak $K \geq S_H$, tak $B_T^C = 0$ p. j., pretože $B_H^C = B_D^C = 0$ p. j. a teda aj $B_0^C = 0$ p. j.

Ak $S_D \leq K < S_H$, tak $B_H^C = B$ p. j., $B_D^C = 0$ p. j. a platí:

$$B_0^C = \mathrm{e}^{-RT} \left(q B_H^C + (1-q) B_D^C \right) = \mathrm{e}^{-RT} q B \text{ p. j.}$$

Ak $K < S_D$, tak $B_T^C = B$ p. j., pretože $B_H^C = B_D^C = B$ p. j. a máme $B_0^C = \mathrm{e}^{-RT} B$ p. j.

Uvažujme binárnu CON put opciu s realizačnou cenou K p. j., poskytujúcou výplatu B p. j., ak v čase T je $S_T < K$. Označme B_t^P hodnotu tejto opcie v čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

Ak $K > S_H$, tak $B_T^P = B$ p. j., pretože $B_H^P = B_D^P = B$ p. j. a máme $B_0^P = \mathrm{e}^{-RT} B$ p. j.

Ak $S_D < K \leq S_H$, tak $B_H^P = 0$ p. j., $B_D^P = B$ p. j. a platí:

$$B_0^P = \mathrm{e}^{-RT} \left(q B_H^P + (1-q) B_D^P \right) = \mathrm{e}^{-RT} (1-q) B \text{ p. j.}$$

Ak $K \leq S_D$, tak $B_T^P = 0$ p. j., pretože $B_H^P = B_D^P = 0$ p. j. a teda aj $B_0^P = 0$ p. j.

Uvažujme binárnu AON call opciu s realizačnou cenou K p. j. Označme A_t^C hodnotu tejto opcie v čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

Ak $K \geq S_H$, tak $A_T^C = 0$ p. j., pretože $A_H^C = A_D^C = 0$ p. j. a teda aj $A_0^C = 0$ p. j.

Ak $S_D \leq K < S_H$, tak $A_H^C = S_H$ p. j., $A_D^C = 0$ p. j. a platí:

$$A_0^C = \mathrm{e}^{-RT}\left(qA_H^C + (1-q)A_D^C\right) = \mathrm{e}^{-RT} q S_H \text{ p. j.}$$

Ak $K < S_D$, tak $A_H^C = S_H$ p. j., $A_D^C = S_D$ p. j. a máme $A_0^C = S_0$ p. j.

Uvažujme binárnu AON put opciu s realizačnou cenou K p. j. Označme A_t^P hodnotu tejto opcie v čase $t \in \langle 0, T \rangle$.

Ak $K > S_H$, tak $A_H^P = S_H$ p. j., $A_D^P = S_D$ p. j. a máme $A_0^P = S_0$ p. j.

Ak $S_D < K \leq S_H$, tak $A_H^P = 0$ p. j., $A_D^P = S_D$ p. j. a platí:

$$A_0^P = \mathrm{e}^{-RT}\left(qA_H^P + (1-q)A_D^P\right) = \mathrm{e}^{-RT}(1-q) S_D \text{ p. j.}$$

Ak $K \leq S_D$, tak $A_T^P = 0$ p. j., pretože $A_H^P = A_D^P = 0$ p. j. a teda aj $A_0^C = 0$ p. j.

Pri ohodnocovaní binárnych opcií viackrokovým modelom oceňovania na binárnom strome postupujeme rovnako ako pri oceňovaní európskych opcií, t. j. idúc od koncových uzlov stromu pre derivát smerujeme k jeho koreňu využívajúc pritom riziko-neutrálne pravdepodobnosti (6.31) počítané na každej vetve stromu a vzťah (6.32).

6.11.1 Kúpno-predajná parita pri binárnych opciách

Kúpno-predajná parita pri CON opciách

Uvažujme jednu binárnu CON call opciu a jednu binárnu CON put opciu s rovnakou dobou splatnosti T, vypísané na to isté podkladové aktívum, s rovnakou realizačnou cenou K p. j. a rovnakou výplatou B p. j. Potom platí:

$$B_0^P + B_0^C = B\mathrm{e}^{-RT}. \tag{6.67}$$

Vzťah (6.67) je dôsledkom zapojenia princípu žiadna arbitráž do úvah o hodnote portfólia pozostávajúceho z jednej binárnej CON call opcie a jednej binárnej CON put opcie. Toto portfólio vypláca v čase T výplatu B p. j. Buď ju vypláca call opcia, ak $S_T > K$ alebo ju vypláca put opcia, ak $S_T < K$. Aby nevznikla arbitráž, v čase 0 musí platiť (6.67). Presnejšie v každom čase $t \in \langle 0, T \rangle$ máme:

$$B_t^P + B_t^C = B\mathrm{e}^{-R(T-t)}. \tag{6.68}$$

Poznámka 6.12. *Predchádzajúca úvaha nepokrýva situáciu, keď $S_T = K$, ktorá je vzhľadom na tvrdenie* (6.67), *resp.* (6.68) *problematická, keďže v tomto prípade $B_T^P = B_T^C = 0$. Avšak* *pravdepodobnosť, že nastane $S_T = K$, je prakticky nulová, a preto možno korektne používať vzťah* (6.68) *(resp. vzťah* (6.70) *nižšie). Dokonca aj samotná definícia binárnej opcie je v niektorých zdrojoch (napr. [6]) uvádzaná bez zahrnutia možnosti $S_T = K$. V takom prípade je potrebné vyhnúť sa oceňovaniu binárnych opcií s $K = S_0$ p. j. viackrokovým modelom s párnym počtom krokov na strome, na ktorom platí $u = \frac{1}{d}$, pretože takéto stromy sú na oceňovanie týchto opcií nevhodné.*

Uvedená poznámka sa týka ako CON opcií, tak AON opcií a teda rovnako ako pri odvádzaní kúpno-predajnej parity CON opcií ovplyvňuje odvodenie kúpno-predajnej parity AON opcií.

Kúpno-predajná parita pri AON opciách

Uvažujme jednu binárnu AON call opciu a jednu binárnu AON put opciu s rovnakou dobou splatnosti T, vypísané na to isté podkladové aktívum a s rovnakou realizačnou cenou K p. j. Potom platí:

$$A_0^P + A_0^C = S_0. \tag{6.69}$$

Aj v tomto prípade vychádza odvodenie vzťahu (6.69) z princípu žiadna arbitráž. Portfólio pozostávajúce z jedného AON call a jedného AON put vypláca v čase T výplatu S_T. Buď ju vypláca AON call, ak $S_T > K$, alebo ju vypláca AON put, ak $S_T < K$. Aby nenastala arbitráž, musí byť

$$A_t^P + A_t^C = S_t \tag{6.70}$$

v každom čase $t \in \langle 0, T\rangle$ a preto v čase 0 platí (6.69).

Odvodenie kúpno-predajnej parity pre európske opcie z kúpno-predajných parít pre binárne opcie

Uvažujme jednu európsku call opciu a jednu európsku put opciu s rovnakou dobou splatnosti T, rovnakou realizačnou cenou K p. j. a na to isté podkladové aktívum – akciu bez dividend.

Z predchádzajúceho vieme, že európsku call opciu možno vyskladať ako portfólio binárnych opcií, v ktorom držiteľ portfólia je vlastníkom jednej AON call opcie s realizačnou cenou K p. j. a vypisovateľom jednej CON call opcie s rovnakou realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j. Európsku put opciu možno vyskladať ako portfólio binárnych opcií, v ktorom držiteľ portfólia je vlastníkom jednej CON put opcie s realizačnou cenou K p. j. a s $B = K$ p. j. a vypisovateľom jednej AON put opcie s realizačnou cenou K p. j.

Aby nevznikla arbitráž, musí v každom čase $t \in \langle 0, T\rangle$ platiť:

$$C_t^E = A_t^C - B_t^C, \tag{6.71}$$

$$P_t^E = B_t^P - A_t^P, \tag{6.72}$$

kde C_t^E označuje hodnotu európskej call opcie v čase t a P_t^E označuje hodnotu európskej put opcie v čase t.

Kúpno-predajná parita pre európske opcie je pre každé $t \in \langle 0, T\rangle$ reprezentovaná vzťahom (6.37). Ukážeme jeho platnosť s využitím vzťahov (6.71), (6.72), (6.68) a (6.70):

$$\begin{aligned} S_t + P_t^E - C_t^E &= S_t + B_t^P - A_t^P - A_t^C + B_t^C \\ &= S_t + \left(B_t^P + B_t^C\right) - \left(A_t^P + A_t^C\right) \\ &= S_t + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} - S_t \\ &= K\mathrm{e}^{-R(T-t)}, \end{aligned}$$

kde v prvom kroku sme využili vzťahy (6.71), (6.72) a v treťom kroku vzťahy (6.68) a (6.70).

V špeciálnom prípade, ak $S_T = K$, v čase T platí:

$$S_T + P_T^E - C_T^E = S_T + 0 - 0 = K = K + 0 - 0 - 0 + 0 = S_T + B_T^P - A_T^P - A_T^C + B_T^C.$$

Aby nenastala arbitráž, tak pre každé $t \in \langle 0, T\rangle$ máme:

$$S_t + P_t^E - C_t^E = K\mathrm{e}^{-R(T-t)}.$$

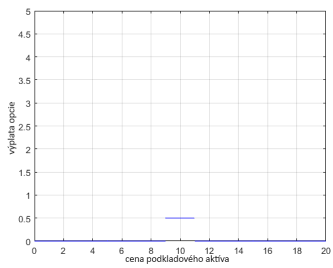
Hoci bola platnosť (6.37) dokázaná aj pre možnosť $S_T = K$, pri jej dokazovaní sme nezapájali vzťahy (6.71), (6.72), (6.68), (6.70).

6.11.2 Super share

Super share je typ opcie, ktorá v čase jej splatnosti vypláca výplatu $\frac{1}{K_2-K_1}$ p. j. v prípade, že hodnota podkladového aktíva je vyššia než dohodnutá cena K_1 a nižšia než dohodnutá cena $K_2 > K_1$. V opačnom prípade vypláca 0 p. j.

Ide vlastne o stávku, že cena aktíva v dobe splatnosti opcie bude ležať v intervale (K_1, K_2).

Ak bude cena aktíva v dobe splatnosti opcie ležať v intervale (K_1, K_2), opcia vypláca $\frac{1}{K_2-K_1}$ p. j., teda výplata je proporcionálne tým nižšia, čím je dĺžka intervalu (K_1, K_2) väčšia.



Obr. 6.7: Výplatný diagram držiteľa super share s $K_1 = 9$ p. j., $K_2 = 11$ p. j. [32] [33]

Ide o opciu, ktorú taktiež možno vyskladať ako portfólio binárnych opcií. Portfólio pozostáva z vlastníctva jednej binárnej CON call opcie s $K = K_1$ p. j. (nazvyme ju opcia $C1$) a emitácie jednej binárnej CON call opcie s $K = K_2$ p. j. (nazvyme ju opcia $C2$), obe vyplácajúce $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j.

Ak v čase T je hodnota aktíva S_T väčšia ako K_2 p. j., obe CON call opcie vyplácajú $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j. a hodnota portfólia je preto nulová.

Ak v čase T platí $K_1 < S_T < K_2$, opcia $C1$ vypláca $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j., ale opcia $C2$ má nulovú hodnotu. Preto je v tomto prípade hodnota portfólia rovná $\frac{1}{K_2-K_1}$ p. j.

Ak v čase T je hodnota aktíva S_T menšia než K_1 p. j., obe CON call opcie majú nulovú hodnotu a rovnako nulová je i hodnota portfólia.

Označme súčasnú hodnotu opcie $C1$ ako B_0^{C1} a súčasnú hodnotu opcie $C2$ ako B_0^{C2}. Nech SS_0 označuje súčasnú hodnotu super share. Keďže portfólio má v čase T rovnakú hodnotu ako super share, musia mať v čase 0 portfólio i super share rovnakú hodnotu (princíp žiadna arbitráž), rovnú:

$$SS_0 = B_0^{C1} - B_0^{C2}. \tag{6.73}$$

Avšak super share možno vyskladať aj ako portfólio CON put opcií. V tomto prípade bude portfólio pozostávať z vlastníctva jednej binárnej CON put opcie s $K = K_2$ p. j. (nazvyme ju opcia $P2$) a emitácie jednej binárnej CON put opcie s $K = K_1$ p. j. (nazvyme ju opcia $P1$), obe vyplácajúce $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j.

Ak v čase T je hodnota aktíva S_T väčšia ako K_2 p. j., obe CON put opcie majú nulovú hodnotu a rovnako nulová je i hodnota portfólia.

Ak v čase T platí $K_1 < S_T < K_2$, opcia $P2$ vypláca $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j., ale opcia $P1$ má nulovú hodnotu. Preto je v tomto prípade hodnota portfólia rovná $\frac{1}{K_2-K_1}$ p. j.

Ak v čase T je hodnota aktíva S_T menšia než K_1 p. j., obe CON put opcie vyplácajú $B = \frac{1}{K_2-K_1}$ p. j. a hodnota portfólia je preto nulová.

Označme súčasnú hodnotu opcie $P1$ ako B_0^{P1} a súčasnú hodnotu opcie $P2$ ako B_0^{P2}. Potom platí:

$$SS_0 = B_0^{P2} - B_0^{P1}. \tag{6.74}$$

Ukážeme, že vzťahy (6.73) a (6.74) sú ekvivalentné, teda, že platí:

$$B_0^{C1} - B_0^{C2} = SS_0 = B_0^{P2} - B_0^{P1}. \tag{6.75}$$

Upravujme:

$$\begin{aligned} SS_0 - SS_0 &= B_0^{P2} - B_0^{P1} - B_0^{C1} + B_0^{C2} = B_0^{P2} + B_0^{C2} - \left(B_0^{P1} + B_0^{C1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{K_2 - K_1}\right) \mathrm{e}^{-RT} - \left(\frac{1}{K_2 - K_1}\right) \mathrm{e}^{-RT} = 0, \end{aligned}$$

kde sme využili vzťah (6.67).

Poznámka 6.13. *Opätovne treba upozorniť na to, že v predchádzajúcich úvahách sa nepracovalo s možnosťami $S_T = K_1$ alebo $S_T = K_2$. Vzhľadom na ich prakticky nulovú pravdepodobnosť vzniku sme ich pri predošlom odvodzovaní neuvažovali.*

6.12 Opcie dívajúce sa späť

Opcie dívajúce sa späť, tiež **dozadu hľadiace opcie** (z anglického *lookback options*) sú opcie na aktívum, ktorých výplata závisí na maximálnej alebo minimálnej hodnote aktíva dosiahnutej počas doby trvania (splatnosti) opcie.

Rozlišujeme **plávajúce** dozadu hľadiace opcie a **fixné** dozadu hľadiace opcie.

Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená rozdielom maximálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie a hodnoty aktíva v čase splatnosti opcie, tak opciu voláme **plávajúcou dozadu hľadiacou put opciou**.

Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená rozdielom hodnoty aktíva v čase splatnosti opcie a minimálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie, tak opciu voláme **plávajúcou dozadu hľadiacou call opciou**.

Ak je pevne určená realizačná cena K a výplata opcie v čase jej splatnosti závisí od rozdielu maximálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie a realizačnej ceny K, tak opciu voláme **fixnou call dozadu hľadiacou opciou**. Opcia v čase jej splatnosti vypláca rozdiel maximálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie a realizačnej ceny K, ak je tento rozdiel kladný a nič, ak nie je.

Ak výplata opcie v čase jej splatnosti závisí od rozdielu pevne stanovenej realizačnej ceny K a minimálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie, tak opciu voláme **fixnou put dozadu hľadiacou opciou**. Opcia v čase jej splatnosti vypláca rozdiel realizačnej ceny K a minimálnej hodnoty aktíva počas doby trvania opcie, ak je tento rozdiel kladný a nič, ak nie je.

Hodnota dozadu hľadiacich opcií je citlivá na frekvenciu pozorovaní ceny aktíva v priebehu splatnosti opcie. Keď je frekvencia príliš nízka, môže prísť k nezaznamenaniu najväčšej či najmenšej ceny aktíva počas doby trvania opcie. Adekvátne tomu je pri ich ohodnocovaní žiadúce prispôsobiť počet krokov na strome pre podkladové aktívum tak, aby korešpondovalo s frekvenciou zisťovania ceny aktíva.

6.12.1 Oceňovanie dozadu hľadiacich opcií

Budeme uvažovať dozadu hľadiace opcie na aktívum nevyplácajúce dividendy. Pri oceňovaní takýchto opcií si treba uvedomiť, že hodnota opcie v čase jej splatnosti, t. j. v niektorom z koncových uzlov, závisí od cesty, po ktorej sa možno do tohto uzlu dostať, pretože aj maximálna (minimálna) hodnota aktíva bude závisieť od tejto cesty.

Nech S_{min} označuje najmenšiu hodnotu aktíva dosiahnutú počas doby trvania opcie T a S_{max} nech označuje najväčšiu hodnotu aktíva dosiahnutú počas doby trvania opcie. Pretože pri zisťovaní hodnoty opcie musíme uvažovať všetky možné cesty vedúce ku koncovým uzlom stromu pre aktívum, pre rôzne cesty môžu byť hodnoty S_{min}, resp. S_{max} rôzne.

Oceňme plávajúcu call aj put dozadu hľadiacu opciu na jednoduchom binárnom strome $\mathcal{B}_S$. Hodnoty derivátu v čase T sú pre obe udalosti vedúce k zmene ceny aktíva z S_0 na S_H alebo S_D zaznačené v pravej časti tabuľky:

hodnota aktíva v čase T	S_{min}	S_{max}	hodnota call opcie v čase T	hodnota put opcie v čase T
S_H	S_0	S_H	$S_H - S_0$	$S_H - S_H = 0$
S_D	S_D	S_0	$S_D - S_D = 0$	$S_0 - S_D$

Označme C_0^{pl} hodnotu call opcie v čase 0 a P_0^{pl} hodnotu put opcie v čase 0, potom:

$$C_0^{pl} = \mathrm{e}^{-RT} q(S_H - S_0), \tag{6.76}$$
$$P_0^{pl} = \mathrm{e}^{-RT} (1-q)(S_0 - S_D), \tag{6.77}$$

kde $q = \frac{S_0 \mathrm{e}^{RT} - S_D}{S_H - S_D}$ je riziko-neutrálna pravdepodobnosť.

Oceňme teraz fixnú call aj put dozadu hľadiacu opciu na jednoduchom binárnom strome $\mathcal{B}_S$. Hodnoty opcií v čase T sú pre všetky možné hodnoty K zaznačené v tabuľke:

K	hodnota aktíva v čase T	S_{min}	S_{max}	hodnota call opcie v čase T	hodnota put opcie v čase T
$K \geq S_H$	S_H	S_0	S_H	0	$K - S_0$
	S_D	S_D	S_0	0	$K - S_D$
$S_D < K$	S_H	S_0	S_H	$S_H - K$	$(K - S_0)^+$
$K < S_H$	S_D	S_D	S_0	$(S_0 - K)^+$	$K - S_D$
$K \leq S_D$	S_H	S_0	S_H	$S_H - K$	0
	S_D	S_D	S_0	$S_0 - K$	0

Označme C_0^{fix} hodnotu call opcie v čase 0 a P_0^{fix} hodnotu put opcie v čase 0. Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $K \geq S_H$ nasledujúce:

$$C_0^{fix} = 0, \tag{6.78}$$
$$P_0^{fix} = \mathrm{e}^{-rT} \left(q(K - S_0) + (1-q)(K - S_D) \right). \tag{6.79}$$

Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $S_D < K < S_H$ nasledujúce:

$$C_0^{fix} = \mathrm{e}^{-rT} \big(q(S_H - K) + (1-q)(S_0 - K)^+ \big), \tag{6.80}$$
$$P_0^{fix} = \mathrm{e}^{-rT} \big(q(K - S_0)^+ + (1-q)(K - S_D) \big). \tag{6.81}$$

Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $K \leq S_D$ nasledujúce:

$$C_0^{fix} = \mathrm{e}^{-rT} \left(q(S_H - K) + (1-q)(S_0 - K) \right), \tag{6.82}$$
$$P_0^{fix} = 0. \tag{6.83}$$

Pri ohodnocovaní dozadu hľadiacich opcií viackrokovým modelom oceňovania na binárnom strome postupujeme rovnako ako pri oceňovaní európskych opcií, t. j. idúc od koncových uzlov stromu pre derivát smerujeme k jeho koreňu využívajúc pritom riziko-neutrálne pravdepodobnosti (6.31) počítané na každej vetve stromu a vzťah (6.32). Avšak oceňovanie lookback opcií na viackrokovom binárnom strome je pomerne náročná úloha, pretože je nutné dosledovať maximálnu a minimálnu hodnotu aktíva na každej z ciest do všetkých koncových uzlov. Tým sa pochopiteľne objem výpočtov môže značne navýšiť, pretože s rastúcim počtom krokov narastá exponenciálne. Medzi dozadu hľadiacimi opciami však existuje parita, ktorá umožňuje dopočítať hodnotu fixných opcií pomocou plávajúcich opcií.

6.12.2 Kúpno-predajná parita pri dozadu hľadiacich opciách

Označme $S^*_{max} = \max\{S_{max}, K\}$ a $S^*_{min} = \min\{S_{min}, K\}$, kde S_{max} (S_{min}) je maximálna (minimálna) hodnota aktíva dosiahnutá počas doby trvania T opcie a K je realizačná cena fixných dozadu hľadiacich opcií.

Nech C^*_0 (P^*_0) označuje hodnotu dozadu hľadiacej plávajúcej call (put) opcie v čase 0, v ktorej je S_{min} (S_{max}) zmenené na S^*_{min} (S^*_{max}).

Potom platia vzťahy (pozri [6], resp. [24]):

$$
\begin{aligned}
C_0^{fix} &= P^*_0 + S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} &\quad (6.84)\\
P_0^{fix} &= C^*_0 + K\mathrm{e}^{-RT} - S_0 &\quad (6.85)
\end{aligned}
$$

Na nasledujúcich príkladoch ilustrujeme ako výpočet hodnoty dozadu hľadiacich opcií dvojkrokovým modelom oceňovania, tak využitie vzťahov (6.84) a (6.85). Preto predpokladajme, že jeden časový krok sa udeje za dobu $\Delta T = 1$ č. j. dostatočne krátku.

Príklad 6.8. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťme dozadu hľadiacu plávajúcu call i put opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ č. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{HH} = 144\ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_H = 120\ p.\ j. & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 100\ p.\ j. & & & & S_M = 108\ p.\ j. \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_D = 90\ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{DD} = 81\ p.\ j.
\end{array}
$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = 1$ č. j. a druhá zmena nastane o ďalšiu č. j. neskôr (čiže doba splatnosti opcie $T = 2\Delta T = 2$ č. j.).

Riešenie:

Pretože pri výpočte hodnôt opcií tohto typu pracujeme s maximálnou, resp. minimálnou hodnotou, ktorú dosiahne akcia počas životnosti opcie, je dobré zaznačiť binárny strom v druhom kroku so štyrmi uzlami namiesto troch, pričom dva z nich majú rovnakú hodnotu, rovnú hodnote v zadaní označenej ako S_M:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{HH} = 144 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_H = 120 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & \nearrow & & & S_{HD} = 108 \text{ p. j.} \\
S_0 = 100 \text{ p. j.} & & & & \\
 & \searrow & & & S_{DH} = 108 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_D = 90 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{DD} = 81 \text{ p. j.}
\end{array}
$$

Uvedená úprava prevádzajúca strom s rekombinantnou vlastnosťou späť na binárny strom súvisí s tým, že maximálna, resp. minimálna hodnota aktíva je pre koncový uzol s hodnotou S_{HD} iná než maximálna, resp. minimálna hodnota aktíva pre koncový uzol s hodnotou S_{DH}, hoci hodnoty v oboch uzloch sú číselne rovnaké.

Zaznamenajme maximálne a minimálne hodnoty aktíva pre každý z koncových uzlov stromu, ako aj hodnoty oboch derivátov v čase T do nasledujúcej prehľadnej tabuľky:

hodnota aktíva v čase T	S_{min}	S_{max}	hodnota call opcie v čase T	hodnota put opcie v čase T
$S_{HH} = 144$ p. j.	$S_0 = 100$ p. j.	$S_{HH} = 144$ p. j.	$S_{HH} - S_0 = 44$ p. j.	$S_{HH} - S_{HH} = 0$ p. j.
$S_{HD} = 108$ p. j.	$S_0 = 100$ p. j.	$S_H = 120$ p. j.	$S_{HD} - S_0 = 8$ p. j.	$S_H - S_{HD} = 12$ p. j.
$S_{DH} = 108$ p. j.	$S_D = 90$ p. j.	$S_{DH} = 108$ p. j.	$S_{DH} - S_D = 18$ p. j.	$S_{DH} - S_{DH} = 0$ p. j.
$S_{DD} = 81$ p. j.	$S_{DD} = 81$ p. j.	$S_0 = 100$ p. j.	$S_{DD} - S_{DD} = 0$ p. j.	$S_0 - S_{DD} = 19$ p. j.

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť q je na celom strome rovnaká, pretože:

$$q = \frac{S_{teraz}\mathrm{e}^{R\Delta T} - S_{dolu}}{S_{hore} - S_{dolu}} = \frac{S_{teraz} - 0,9S_{teraz}}{1,2S_{teraz} - 0,9S_{teraz}} = \frac{1}{3}.$$

Vypočítajme hodnoty opcií v čase $\Delta T = 1$ č. j.:

$$
\begin{aligned}
C_H^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(44 \text{ p. j.}) + (1-q)(8 \text{ p. j.})\right) = 20 \text{ p. j.}, \\
C_D^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(18 \text{ p. j.}) + (1-q)(0 \text{ p. j.})\right) = 6 \text{ p. j.}, \\
P_H^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(0 \text{ p. j.}) + (1-q)(12 \text{ p. j.})\right) = 8 \text{ p. j.}, \\
P_D^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(0 \text{ p. j.}) + (1-q)(19 \text{ p. j.})\right) = \frac{38}{3} \text{ p. j.}
\end{aligned}
$$

Súčasné hodnoty opcií potom budú:

$$
\begin{aligned}
C_0^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_H^{pl} + (1-q)C_D^{pl}\right) = \frac{32}{3} \text{ p. j.}, \\
P_0^{pl} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_H^{pl} + (1-q)P_D^{pl}\right) = \frac{100}{9} \text{ p. j.}
\end{aligned}
$$

Čiže súčasná hodnota dozadu hľadiacej plávajúcej call opcie je $\frac{32}{3}$ p. j. a súčasná hodnota dozadu hľadiacej plávajúcej put opcie je $\frac{100}{9}$ p. j.

Príklad 6.9. *Pri podmienkach z príkladu 6.8 oceňme bezarbitrážnym oceňovaním dozadu hľadiacu fixnú call i put opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy, ak realizačná cena je $K = 102$ p. j.*

Riešenie:
Ohodnotiť dozadu hľadiacu fixnú call i put opciu môžeme bezprostredne na binárnom strome alebo využijeme kúpno-predajnú paritu pre plávajúce opcie, t. j. vzťahy (6.84) a (6.85).

Ohodnoťme ich najprv priamo s využitím riziko-neutrálnej pravdepodobnosti vypočítanej v príklade 6.8 a upraveného stromu z riešenia tohto príkladu.

Zaznamenajme hodnoty oboch derivátov v čase T do nasledujúcej tabuľky:

hodnota aktíva v čase T	hodnota call opcie v čase T	hodnota put opcie v čase T
$S_{HH} = 144$ p. j.	$(S_{HH} - K)^+ = 42$ p. j.	$(K - S_0)^+ = 2$ p. j.
$S_{HD} = 108$ p. j.	$(S_H - K)^+ = 18$ p. j.	$(K - S_0)^+ = 2$ p. j.
$S_{DH} = 108$ p. j.	$(S_{DH} - K)^+ = 6$ p. j.	$(K - S_D)^+ = 12$ p. j.
$S_{DD} = 81$ p. j.	$(S_0 - K)^+ = 0$ p. j.	$(K - S_{DD})^+ = 21$ p. j.

Vypočítajme hodnoty opcií v čase $\Delta T = 1$ č. j.:

$$\begin{aligned}
C_H^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(42 \text{ p. j.}) + (1-q)(18 \text{ p. j.})\right) = 26 \text{ p. j.},\\
C_D^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(6 \text{ p. j.}) + (1-q)(0 \text{ p. j.})\right) = 2 \text{ p. j.},\\
P_H^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(2 \text{ p. j.}) + (1-q)(2 \text{ p. j.})\right) = 2 \text{ p. j.},\\
P_D^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(12 \text{ p. j.}) + (1-q)(21 \text{ p. j.})\right) = 18 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Súčasné hodnoty opcií potom budú:

$$\begin{aligned}
C_0^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_H^{fix} + (1-q)C_D^{fix}\right) = 10 \text{ p. j.},\\
P_0^{fix} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_H^{fix} + (1-q)P_D^{fix}\right) = \frac{38}{3} \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Teda súčasná hodnota dozadu hľadiacej fixnej call opcie je 10 p. j. a súčasná hodnota dozadu hľadiacej fixnej put opcie je $\frac{38}{3}$ p. j.

Teraz vypočítame hodnoty fixných opcií pomocou vzťahov (6.84) a (6.85). Nato je potrebné najprv ohodnotiť plávajúce opcie s S_{min}, resp. S_{max} zmenené na S^*_{min}, resp. S^*_{max}.

Zaznamenajme hodnoty S^*_{min}, S^*_{max} ako aj hodnoty oboch derivátov v čase T do tabuľky:

hodnota aktíva v čase T	S^*_{min}	S^*_{max}	hodnota call opcie v čase T	hodnota put opcie v čase T
$S_{HH} = 144$ p. j.	$S_0 = 100$ p. j.	$S_{HH} = 144$ p. j.	$S_{HH} - S_0 = 44$ p. j.	$S_{HH} - S_{HH} = 0$ p. j.
$S_{HD} = 108$ p. j.	$S_0 = 100$ p. j.	$S_H = 120$ p. j.	$S_{HD} - S_0 = 8$ p. j.	$S_H - S_{HD} = 12$ p. j.
$S_{DH} = 108$ p. j.	$S_D = 90$ p. j.	$S_{DH} = 108$ p. j.	$S_{DH} - S_D = 18$ p. j.	$S_{DH} - S_{DH} = 0$ p. j.
$S_{DD} = 81$ p. j.	$S_{DD} = 81$ p. j.	$K = 102$ p. j.	$S_{DD} - S_{DD} = 0$ p. j.	$K - S_{DD} = 21$ p. j.

Zmena sa dotkla iba koncovej hodnoty put opcie v uzle DD, a preto stačí v čase ΔT počítať iba hodnotu P_D^*. Ostatné hodnoty ostanú nezmenené:

$$\begin{aligned}
C_H^* &= C_H^{pl} = 20 \text{ p. j.},\\
C_D^* &= C_D^{pl} = 6 \text{ p. j.},\\
P_H^* &= P_H^{pl} = 8 \text{ p. j.},\\
P_D^* &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(q(0 \text{ p. j.}) + (1-q)(21 \text{ p. j.})\right) = 14 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Hodnoty opcií v čase 0 sú:

$$\begin{aligned}
C_0^* &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_H^* + (1-q)C_D^*\right) = \frac{32}{3} \text{ p. j.},\\
P_0^* &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_H^* + (1-q)P_D^*\right) = 12 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Aplikujúc vzťahy (6.84) a (6.85), pre súčasné hodnoty fixných opcií dostaneme:

$$\begin{aligned}
C_0^{fix} &= P_0^* + S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} = (12 + 100 - 102) \text{ p. j.} = 10 \text{ p. j.},\\
P_0^{fix} &= C_0^* + K\mathrm{e}^{-RT} - S_0 = \left(\frac{32}{3} + 102 - 100\right) \text{ p. j.} = \frac{38}{3} \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Poznámka 6.14. *V porovnaní so štandardnými európskymi opciami sú fixné dozadu hľadiace opcie drahšie, hoci investormi vyhľadávané, keďže existuje väčšia šanca, že budú v čase svojej splatnosti realizované s kladnou výplatou. Výplata európskych opcií v čase ich splatnosti závisí totiž len od koncovej ceny podkladového aktíva. Na rozdiel od nich fixné dozadu hľadiace opcie poskytujú výplatu, ktorá závisí od maximálnej, resp. minimálnej ceny aktíva dosiahnutej počas splatnosti opcie. Preto šanca, že táto výplata bude kladná, je veľká. Obzvlášť vtedy, keď realizačná cena je stanovená blízko ceny aktíva v čase uzatvorenia kontraktu.*

V prípade opcií z príkladu 6.9 sme mohli zaznamenať, že iba v jednom prípade z ôsmich bola výplata v koncovom uzle stromu pre derivát nulová. Na druhej strane, ak by sme vypočítali súčasné hodnoty európskych opcií na toto podkladové aktívum, zistili by sme, že pri európskej call opcii by bola jej súčasná hodnota rovná $\frac{22}{3}$ p. j. a pri európskej put opcii by bola jej súčasná hodnota rovná $\frac{28}{3}$ p. j. Obe hodnoty sú v porovnaní so súčasnými hodnotami fixných dozadu hľadiacich opcií vypočítaných v príklade 6.9 nižšie ($\frac{22}{3}$ p. j. voči 10 p. j. pri call opciách, resp. $\frac{28}{3}$ p. j. voči $\frac{38}{3}$ p. j. pri put opciách).

6.13 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú opcie na aktívum, ktorých výplata závisí na aritmetickom priemere cien aktíva pozorovaných počas doby trvania (splatnosti) opcie.

Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená ako $\max\{0, \overline{S} - K\}$, kde $\overline{S}$ je priemerná cena aktíva a K je realizačná cena, tak opciu voláme **average price call**.

Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená ako $\max\{0, K - \overline{S}\}$, kde $\overline{S}$ je priemerná cena aktíva a K je realizačná cena, tak opciu voláme **average price put**.

Aj pri týchto opciách platí, že hodnota opcie v čase jej splatnosti, t. j. v niektorom z koncových uzlov pri oceňovaní na binárnom strome, závisí od cesty, po ktorej je možné sa do tohto uzla dostať, keďže priemerná hodnota aktíva závisi od tejto cesty. Rovnako tak platí, že hodnota ázijských opcií je citlivá na frekvenciu pozorovaní ceny aktíva v priebehu jej splatnosti.

Ilustrujme ocenenie average price call aj put opcie na nasledujúcom príklade. Opäť ako v predošlom predpokladajme, že dĺžka jedného časového kroku $\Delta T = 1$ č. j.

Príklad 6.10. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťme average price call i put opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ č. j. a realizačnou cenou $K = 51,8$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{HH} = 86,4 \ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_H = 72 \ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & \nearrow & & & S_{HD} = 43,2 \ p.\ j. \\
S_0 = 60 & & & & \\
 & \searrow & & & S_{DH} = 43,2 \ p.\ j. \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_D = 36 \ p.\ j. & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{DD} = 21,6 \ p.\ j.
\end{array}$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = 1$ č. j. a druhá zmena nastane o ďalšiu č. j. neskôr (čiže doba splatnosti opcie $T = 2\Delta T = 2$ č. j.).

Riešenie:

Keďže na celom strome platí $u = 1,2$ a $d = 0,6$, tak v uzloch HD a DH má aktívum tú istú hodnotu. Ich rozlíšenie je však dôležité z hľadiska výpočtu ceny opcie, pretože do uzlu DH sa nedá dostať z uzlu H, kým do uzlu HD sa zas nedá dostať z uzlu D. Preto bude priemerná cena aktíva v uzle HD iná než v uzle DH.

Vypočítajme priemerné hodnoty aktíva v koncových uzloch, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{HH} &= 72,8 \text{ p. j.}, \\
\overline{S}_{HD} &= 58,4 \text{ p. j.}, \\
\overline{S}_{DH} &= 46,4 \text{ p. j.}, \\
\overline{S}_{DD} &= 39,2 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Hodnoty call opcie v koncových uzloch budú:

$$\begin{aligned}
C_{HH}^{avg} &= 21 \text{ p. j.}, \\
C_{HD}^{avg} &= 6,6 \text{ p. j.}, \\
C_{DH}^{avg} &= 0 \text{ p. j.}, \\
C_{DD}^{avg} &= 0 \text{ p. j.}
\end{aligned}$$

Hodnoty put opcie v koncových uzloch budú:

$$\begin{aligned} P_{HH}^{avg} &= 0 \text{ p. j.}, \\ P_{HD}^{avg} &= 0 \text{ p. j.}, \\ P_{DH}^{avg} &= 5,4 \text{ p. j.}, \\ P_{DD}^{avg} &= 12,6 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Pretože $u = 1,2$ a $d = 0,6$, tak riziko-neutrálna pravdepodobnosť q je na celom strome rovnaká a platí:

$$q = \frac{S_{teraz} - 0,6S_{teraz}}{1,2S_{teraz} - 0,6S_{teraz}} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}.$$

Vypočítajme postupne hodnoty call opcie v uzloch H, D a 0:

$$\begin{aligned} C_H^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_{HH}^{avg} + (1-q)C_{HD}^{avg}\right) = 16,2 \text{ p. j.}, \\ C_D^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_{DH}^{avg} + (1-q)C_{DD}^{avg}\right) = 0 \text{ p. j.}, \\ C_0^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qC_{H}^{avg} + (1-q)C_{D}^{avg}\right) = 10,8 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Súčasná hodnota average price call opcie je $10,8$ p. j.

Vypočítajme postupne hodnoty put opcie v uzloch H, D a 0:

$$\begin{aligned} P_H^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_{HH}^{avg} + (1-q)P_{HD}^{avg}\right) = 0 \text{ p. j.}, \\ P_D^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_{DH}^{avg} + (1-q)P_{DD}^{avg}\right) = 7,8 \text{ p. j.}, \\ P_0^{avg} &= \mathrm{e}^{-R\Delta T}\left(qP_{H}^{avg} + (1-q)P_{D}^{avg}\right) = 2,6 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Súčasná hodnota average price put opcie je $2,6$ p. j.

Ďalším typom ázijskej opcie, ktorý pomenujeme, ale podrobnejšie sa mu venovať nebudeme, je **average strike** opcia.

Ak je výplata opcie v čase jej splatnosti T určená ako $\max\{0, S_T - \overline{S}\}$, kde $\overline{S}$ je priemerná cena aktíva a S_T cena aktíva v čase T, tak opciu voláme **average strike call**.

Ak je výplata opcie v čase jej splatnosti T určená ako $\max\{0, \overline{S} - S_T\}$, kde $\overline{S}$ je priemerná cena aktíva a S_T cena aktíva v čase T, tak opciu voláme **average strike put**.

Oceňovanie average strike opcií na binárnych stromoch funguje na rovnakom princípe ako oceňovanie average price opcií, resp. derivátov vo všeobecnosti.

6.14 Oceňovanie derivátov pri spojitom čase

Cieľom tejto podkapitoly nie je poskytnúť podrobný výklad a všetky odvodenia súvisiace s oceňovaním derivátov pri spojitom čase, ale načrtnúť východiská a metódy tohto oceňovania a objasniť niektoré súvislosti tohto oceňovania s predchádzajúcimi časťami tejto kapitoly, predovšetkým s oceňovaním na binárnych stromoch.

Nástroje, s ktorými sa pracuje pri tomto oceňovaní, nie sú elementárne. Sú matematicky náročné. Preto táto podkapitola predstavuje iba akúsi ochutnávku zo sveta stochastického kalkulu, ktorý sa pri oceňovaní bohato využíva. Pre záujemcov o získanie podrobnejších informácií odporúčame prácu [4], resp. [5], z ktorej budeme v tejto časti predovšetkým čerpať. Veľmi seriózny vhľad do problematiky poskytuje tiež [12], hlavne v prvých kapitolách. Ďalšie informácie možno nájsť v [14], resp. v [16].

6.14.1 Stochastický charakter finančných aktív

Cena aktíva S pozostáva z deterministickej časti a stochastickej fluktuačnej časti. Cena aktíva sleduje istý trend (deterministická časť oceňovania aktíva), okolo ktorého nastávajú výkyvy – fluktuácie (stochastická časť oceňovania aktíva).

Trendovú zložku môžeme popísať rovnicou:

$$S(t) = S_0 e^{\mu t}, \tag{6.86}$$

kde t je čas, μ je výnosová sadzba (miera návratnosti) aktíva a S_0 je počiatočná cena aktíva v nejakom čase t_0, pre jednoduchosť budeme uvažovať $t_0 = 0$. Rovnicu (6.86) môžeme vyjadriť aj cez prírastky ako diferenciálnu rovnicu:

$$dS = \mu S dt. \tag{6.87}$$

Wienerov proces

Stochastický proces je systém $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval a $X(t)$ sú náhodné premenné závisiace od času t.

Wienerov proces $\{W(t), t \in I\}$ je spojitý stochastický proces definovaný na $I = \langle 0, \infty)$ s nasledujúcimi charakteristikami:

1. $W(0) = 0$,
2. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,
3. ak $(s,t) \cap (u,v) = \emptyset$, tak $W(t) - W(s)$ a $W(u) - W(v)$ sú nezávislé.

Stochastický diferenciál dX stochastického procesu $\{X(t), t \in I\}$ dostaneme ako:

$$dX = \mu(t, X)dt + \sigma(t, X)dW, \tag{6.88}$$

kde dW je prírastok Wienerovho procesu, μ sa nazýva drift a σ je volatilita.

Brownov pohyb

Špeciálny prípad (6.88) je autonómny prípad, t. j. keď:

$$dX = \mu(X)dt + \sigma(X)dW, \tag{6.89}$$

napr.:

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW \tag{6.90}$$

alebo:

$$dX = \mu dt + \sigma dW. \tag{6.91}$$

V prípade (6.91) ide o **Brownov pohyb**, t. j. Wienerov proces je Brownov pohyb s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.

Brownov pohyb sa javí ako stochastický proces, ktorý by mohol byť vhodným na modelovanie vývoja ceny aktíva. Nie je to však možné, pretože pre $\sigma = 0$ je $dS = \mu dt + 0dW_t = \mu dt$ a teda $S(t) = S_0 + \mu t$, čo odporuje (6.86). Vhodnejšie je uvažovať nejakú funkciu Brownovho pohybu.

Geometrický Brownov pohyb

Ak totiž $\sigma = 0$, tak máme (6.87). Zo (6.87) dostávame $\frac{dS}{S} = \mu dt$ a teda $d(\ln S) = \mu dt$.

Vezmime $X = \ln S$, kde X vyhovuje (6.91), čiže $S = \mathrm{e}^X$. Nech $\{X(t), t \in I\}$ je Brownov pohyb s driftom μ a volatilitou σ, potom náhodný proces $\{Y(t), t \in I\}$, kde $Y(t) = Y_0\mathrm{e}^{X(t)}$, $Y_0 \in \mathbb{R}$, nazývame **geometrický Brownov pohyb**.

Na odvodenie stochastického diferenciálu geometrického Brownovho pohybu nám poslúži Itô-ova lema, ktorá je veľmi silným matematickým výsledkom.

Itô-ova **lema**: Nech $f(x,t) \in C^2$ a x také, že $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW$, kde W – Wienerov proces. Potom f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} dW. \tag{6.92}$$

Nech $Y = Y_0\mathrm{e}^X$, potom podľa (6.92) máme:

$$\begin{aligned} dY &= \left(0 + \mu Y_0\mathrm{e}^X + \frac{1}{2}\sigma^2 Y_0\mathrm{e}^X\right) dt + \sigma Y_0\mathrm{e}^X dW \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) Y dt + \sigma Y dW. \end{aligned}$$

Označme $\tilde{\mu} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$, potom:

$$dY = \tilde{\mu} Y dt + \sigma Y dW.$$

Zistili sme, že geometrický Brownov pohyb je taký stochastický proces, ktorý vyhovuje (6.90). Vývoj ceny aktíva teda sleduje geometrický Brownov pohyb:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{6.93}$$

6.14.2 Oceňovanie derivátu

Ak označíme cenu derivátu ako Z, potom Z závisí od ceny podkladového aktíva S a času t, t. j. $Z = Z(S,t)$. Ak sú splnené predpoklady Itô-ovej lemy a cena podkladového aktíva sleduje geometrický Brownov pohyb (6.93), tak podľa (6.92) máme:

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \mu S\frac{\partial Z}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 Z}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S\frac{\partial Z}{\partial S} dW. \tag{6.94}$$

Primárne sa zameriame na oceňovanie opcií na akciu bez dividend, ale model možno rozšíriť aj na iné druhy derivátov alebo podkladových aktív v závislosti od toho, či vyhovujú predpokladom modelu. Sformulujme teda predpoklady na oceňovanie:

- Pohyb ceny podkladového aktíva sa riadi geometrickým Brownovým pohybom (6.93),
- investor pri oceňovaní vytvára portfólio pozostávajúce z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov, ktorých bezriziková úroková sadzba R je konštantná počas doby trvania opcie T,
- investor uplatňuje dynamický/ú predaj/kúpu jednotlivých zložiek portfólia tak, že:
  - na udržanie jeho nulovej rizikovosti nie sú potrebné žiadne ďalšie investície (**podmienka nulových investícií**),
  - nákup/predaj niektorej zo zložiek je kompenzovaný predajom/kúpou inej zložky (**podmienka samofinancovateľnosti portfólia**),
- uvažujeme nulové transakčné náklady,
- možno predať/kúpiť ľubovoľné množstvo jednotlivých zložiek portfólia.

Odvodenie Blackovej-Scholesovej rovnice

Podmienku nulových investícií možno prepísať pomocou rovnosti:

$$Q_S S + Q_Z Z + B = 0 \tag{6.95}$$

pre všetky $t \in \langle 0, T\rangle$, kde Q_S je množstvo/počet kusov akcie S, Q_Z je množstvo/počet kusov opcie Z a B je množstvo/počet kusov bezrizikových dlhopisov, resp. finančný objem investovaný do dlhopisov. Všetky premenné v rovnici (6.95) závisia od času t. Podmienka samofinancovateľnosti portfólia určuje, že pre všetky $t \in \langle 0, T\rangle$ dostávame:

$$dQ_S S + dQ_Z Z + \delta B = 0, \tag{6.96}$$

čiže zmena v počte kusov niektorej zo zložiek portfólia je kompenzovaná nákupom alebo predajom inej zložky či zložiek tak, aby celková zmena hodnoty portfólia ostala v čase nemenná, rovná 0 p. j. V tomto prípade symbol d označuje deriváciu a δB je zmena finančného objemu dlhopisov potrebná na realizáciu nákupu ostatných zložiek portfólia.

Pre dlhopisy platí (pozri kapitolu 4.1 o dlhopisoch):

$$\begin{aligned} B = B(t) &= B(0)\mathrm{e}^{Rt}, && (6.97)\\ \frac{dB}{dt} &= RB(t). && (6.98) \end{aligned}$$

Pretože nákup a predaj aktív z portfólia sa deje dynamicky, na zmenu dB v dlhopisoch vplýva aj hodnota δB. S prihliadnutím k tomu zo vzťahu (6.98) získame:

$$dB = RBdt + \delta B. \tag{6.99}$$

Z podmienky nulových investícií (6.95) dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &= d(Q_S S + Q_Z Z + B) \\ &= Q_S dS + dQ_S S + Q_Z dZ + dQ_Z Z + dB. \end{aligned} \tag{6.100}$$

Dosadením (6.99) do (6.100) získame:

$$\begin{aligned} 0 &= Q_S dS + dQ_S S + Q_Z dZ + dQ_Z Z + RBdt + \delta B \\ &= (dQ_S S + dQ_Z Z + \delta B) + (Q_S dS + Q_Z dZ + RBdt). \end{aligned} \tag{6.101}$$

Dosadením (6.96) do (6.101) dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= Q_S dS + Q_Z dZ + RBdt, \\ Q_Z dZ &= -Q_S dS - RBdt, \\ dZ &= -\frac{Q_S}{Q_Z} dS - \frac{R}{Q_Z} Bdt. \end{aligned} \tag{6.102}$$

Dosadením (6.93) za dS do (6.102) a (6.95) za B do (6.102) získame:

$$\begin{aligned} dZ &= -\frac{Q_S}{Q_Z}(\mu S dt + \sigma S dW) - \frac{R}{Q_Z}(-Q_S S - Q_Z Z)\, dt, \\ dZ &= \left(-\frac{Q_S}{Q_Z}\mu S + \frac{Q_S}{Q_Z} RS + RZ\right) dt - \frac{Q_S}{Q_Z}\sigma S dW. \end{aligned} \tag{6.103}$$

Označme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_Z}$, potom zo (6.103) máme:

$$dZ = (\Delta\mu S - \Delta RS + RZ)\, dt + \Delta\sigma S dW. \tag{6.104}$$

Dosadením (6.94) za dZ do (6.104) dostaneme:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \mu S \frac{\partial Z}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial Z}{\partial S} dW = \\ &\qquad = (\Delta(\mu - R)S + RZ)\, dt + \Delta\sigma S dW. \end{aligned} \tag{6.105}$$

Odtiaľ po úprave máme:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \mu S \frac{\partial Z}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} + \Delta(R - \mu)S - RZ\right) dt + \\ &\qquad + \left(\frac{\partial Z}{\partial S} - \Delta\right) \sigma S dW = 0. \end{aligned} \tag{6.106}$$

Vzhľadom nato, že portfólio má byť bezrizikové, je potrebné zo (6.106) eliminovať náhodný činiteľ $\left(\frac{\partial Z}{\partial S} - \Delta\right)\sigma S dW$ spôsobujúci nenulovú rizikovosť portfólia. Príslušná neutralizácia tohto rizika sa dosiahne voľbou $\Delta = \frac{\partial Z}{\partial S}$.

Po neutralizácii zo (6.106) dostaneme:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + RS \frac{\partial Z}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} - RZ = 0. \tag{6.107}$$

Rovnica (6.107) sa nazýva Blackova-Scholesova rovnica.

Blackova-Scholesova rovnica je parciálna diferenciálna rovnica, ktorú možno riešiť prevedením na základný tvar parabolickej diferenciálnej rovnice.

Pre európske opcie riešime rovnicu (6.107), kde $S > 0$, $t \in \langle 0, T \rangle$ a $Z(S,T) = \overline{Z}(S)$ je koncová podmienka, pričom pre európske call opcie je $\overline{Z}(S) = \max\{0, S - K\}$ a pre európske put opcie je $\overline{Z}(S) = \max\{0, K - S\}$, kde K je realizačná cena opcie.

Riešenie Blackovej-Scholesovej rovnice

Po transformácii $Z(S,t) = \mathrm{e}^{-\alpha \ln S - \beta(T-t)} u(\ln S, T-t)$, kde $\alpha = \frac{R}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{R^2}{2\sigma^2} + \frac{R}{2} + \frac{\sigma^2}{8}$, resp. $u(x,\tau) = \mathrm{e}^{\alpha x + \beta \tau} Z(\mathrm{e}^x, T-\tau)$, kde $x = \ln S$ a $\tau = T-t$, zo (6.107) dostaneme:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{6.108}$$

s počiatočnou podmienkou $u(x,0) = \mathrm{e}^{\alpha x} \overline{Z}\,(\mathrm{e}^x)$, kde $-\infty < x < \infty$ a $\tau \in \langle 0, T \rangle$.

Rovnica (6.108) má (známe) riešenie:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-p)^2}{2\sigma^2\tau}} u(p,0)dp, \tag{6.109}$$

ktoré možno transformáciou previesť na tvar:

$$Z(S,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} S^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln S - p)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \mathrm{e}^{\alpha p} \overline{Z}\,(\mathrm{e}^p)\, dp. \tag{6.110}$$

Európska kúpna opcia na akciu bez dividend

Označme C^E hodnotu európskej kúpnej opcie, potom s využitím koncovej podmienky pre európsku kúpnu opciu zo (6.110) po sérii úprav dostaneme:

$$C^E(S,t) = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-R(T-t)}N(d_2), \tag{6.111}$$

kde $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ a $N(\cdot)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Európska predajná opcia na akciu bez dividend

Označme P^E hodnotu európskej predajnej opcie. S využitím vzťahu (6.111) a kúpno-predajnej parity pre európske opcie:

$$P^E(S,t) = C^E(S,t) - S + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} \tag{6.112}$$

dostávame vzťah pre výpočet ceny európskej put opcie:

$$\begin{aligned} P^E(S,t) &= SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-R(T-t)}N(d_2) - S + K\mathrm{e}^{-R(T-t)} \\ &= S\left(N(d_1) - 1\right) + K\mathrm{e}^{-R(T-t)}\left(1 - N(d_2)\right) \\ &= K\mathrm{e}^{-R(T-t)}\left(1 - N(d_2)\right) - S\left(1 - N(d_1)\right) \\ &= K\mathrm{e}^{-R(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned} \tag{6.113}$$

Forward na akciu bez dividend

Označme Z_F cenu forwardu na akciu bez dividend, potom:

$$Z_F(S,t) = S_t - K\mathrm{e}^{-R(T-t)}. \tag{6.114}$$

Z toho:

$$\begin{aligned} Z_F(S,T) &= S_T - K, \\ Z_F(S,0) &= S_0 - K\mathrm{e}^{-RT}. \end{aligned}$$

Aby cena K bola nastavená férovo pre obe strany kontraktu, musí platiť: $Z_F(S,0) = 0$. Z toho dostávame:

$$K = S_0\mathrm{e}^{RT}.$$

6.14.3 Numerické schémy riešenia Blackovej-Scholesovej rovnice

Od (6.107) k (6.108) môžeme bez väčších problémov prejsť tiež použitím podobnej, ale mierne odlišnej transformácie než bola tá, ktorú sme použili vyššie. Konkrétne $Z(S,t) = K\mathrm{e}^{-\alpha x-\beta\tau}u(x,\tau)$, kde $\tau = T-t$, $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ a K je realizačná cena opcie.

Označme

$$g(x,\tau) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha x+\beta\tau}\max\{\mathrm{e}^x-1,0\} & \text{pre call opciu,} \\ \\ \mathrm{e}^{\alpha x+\beta\tau}\max\{1-\mathrm{e}^x,0\} & \text{pre put opciu,} \end{cases}$$

potom počiatočná podmienka $u(x,0) = g(x,0)$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

Rovnicu (6.108) možno riešiť aj numericky. Avšak nekonečný interval pre premennú x musíme zúžiť na uzavretý ohraničený interval $\langle -L, L\rangle$ a tomu adekvátne prispôsobiť hraničné podmienky.

Aplikujeme metódu konečných diferencií (sietí):

$$\begin{aligned} x_i &= ih, && \text{kde } i = -N,\dots,-1,0,1,\dots,N \text{ a } h = \frac{L}{N}, \\ \tau_j &= jk, && \text{kde } j = 0,1,\dots,n \text{ a } k = \frac{T}{n}, \end{aligned}$$

teda h je priestorový krok a k je časový krok. V ďalšom budeme používať označenia: $u_i^j := u(x_i,\tau_j)$, $g_i^j := g(x_i,\tau_j)$. Ako bolo načrtnuté vyššie, úlohu je potrebné riešiť pri špecifikácii istých okrajových podmienok. Ich odvodenie súvisí so správaním sa európskych opcií v okrajových bodoch priestorového intervalu. Pretože úmyslom podkapitoly nie je hľadanie numerického riešenia Blackovej-Scholesovej rovnice, ale len snaha poukázať na súvis numerického oceňovania s oceňovaním na binárnych stromoch, špecifikácii okrajových podmienok sa vyhneme. Možno ich nájsť v [4], resp. [5], odkiaľ sú prevzaté značenia aj niektoré odvodenia v tejto časti učebnice.

Derivácie z rovnice (6.108) je taktiež potrebné upraviť tak, aby zodpovedali použitiu numerickej schémy na sieti bodov (x_i,τ_j). Konkrétne priestorovú deriváciu upravíme na tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,\tau_j) \doteq \frac{\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{h} - \frac{u_i^j-u_{i-1}^j}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \tag{6.115}$$

Na vyjadrenie časovej derivácie možno použiť explicitnú alebo implicitnú schému:

1. explicitná schéma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i,\tau_j) \doteq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \tag{6.116}$$

2. implicitná schéma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i,\tau_j) \doteq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}. \tag{6.117}$$

My budeme v ďalšom používať explicitnú schému.

Dosadením (6.115) a (6.116) do (6.108) dostaneme:

$$\left(\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right) = 0. \tag{6.118}$$

Zo (6.118) máme:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k\sigma^2}{2h^2}\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right). \tag{6.119}$$

Označme $\gamma := \frac{k\sigma^2}{2h^2}$, potom zo (6.119) dostaneme:

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1-2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j. \tag{6.120}$$

Špeciálne pre $\gamma = \frac{1}{2}$ $\left(\text{t. j. keď } h = \sigma\sqrt{k}, \text{ resp. } k = \frac{h^2}{\sigma^2}\right)$ máme:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right). \tag{6.121}$$

Na základe použitej transformácie $Z(Ke^x, T-\tau) = Ke^{-\alpha x-\beta\tau}u(x,\tau)$ a rovnosti $u_i^j = u(x_i,\tau_j)$ získame:

$$Z_i^j := Z(x_i,\tau_j) = Ke^{-\alpha ih-\beta jk}u_i^j. \tag{6.122}$$

Dosadením (6.122) do (6.121) dostávame:

$$\begin{aligned}
u_i^{j+1} &= \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right),\\
Ke^{-\alpha ih-\beta jk}u_i^{j+1} &= \frac{1}{2}\left(Ke^{-\alpha ih-\beta jk}u_{i-1}^j + Ke^{-\alpha ih-\beta jk}u_{i+1}^j\right),\\
e^{\beta k}Z_i^{j+1} &= \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha h}Z_{i-1}^j + e^{\alpha h}Z_{i+1}^j\right),\\
Z_i^{j+1} &= e^{-Rk}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha h-(\beta-R)k}Z_{i+1}^j + \frac{1}{2}e^{-\alpha h-(\beta-R)k}Z_{i-1}^j\right). \qquad (6.123)
\end{aligned}$$

Čiže hodnotu derivátu v čase τ_{j+1} možno vypočítať pomocou dvoch hodnôt derivátu v predchádzajúcom čase τ_j. Pretože však $\tau = T - t$, tak vlastne vzťah (6.123) určuje, že výpočet hodnoty derivátu v danom čase sa deje pomocou hodnôt derivátu v nasledujúcom čase. Navyše sa tak deje pomocou dvoch hodnôt, z ktorých jedna je o jeden priestorový krok vyššie a druhá o jeden priestorový krok nižšie než počítaná hodnota. Inými slovami môžeme pozorovať vetvenie ako na binárnych stromoch.

	$(j+1)$-vý časový krok		j-ty časový krok
$(i+1)$-vá vrstva			Z_{i+1}^j
		$\nearrow$	
i-tá vrstva	Z_i^{j+1}		
		$\searrow$	
$(i-1)$-vá vrstva			Z_{i-1}^j

Vzťah (6.123) nápadne pripomína vzťah (6.32), kde časový krok $k = \Delta T$ a priestorový krok h určuje pohyb ceny derivátu pri skoku ceny podkladového nahor Z_{hore}, resp. nadol Z_{dolu}. Ak hľadáme paralelu medzi týmito dvoma vzťahmi, tak hodnoty $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)k}$, resp. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha h-(\beta-R)k}$ by potom mali vyjadrovať riziko-neutrálne pravdepodobnosti q, resp. $1-q$.

Približné hodnoty $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm\alpha h-(\beta-R)k} \doteq \frac{1\pm\alpha h}{2}$ označme $q_\pm$, t. j. $q_+ = \frac{1+\alpha h}{2}$ a $q_- = \frac{1-\alpha h}{2}$. Potom $q_- + q_+ = 1$ a zo vzťahu (6.123) s q_+ namiesto $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)k}$, resp. q_- namiesto $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha h-(\beta-R)k}$ dostaneme:

$$Z_i^{j+1} = \mathrm{e}^{-Rk}\left(q_+ Z_{i+1}^j + q_- Z_{i-1}^j\right). \tag{6.124}$$

Vzťah (6.124) teda pre každú vetvu stromu umožňuje vypočítať hodnotu opcie v danom uzle stromu $(i, j+1)$ pomocou riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q_+, resp q_- a hodnôt opcie v nasledujúcom časovom kroku j (pripomíname, že vďaka transformácii $\tau = T-t$ postupujeme od väčších časových hodnôt k menším) pri pohybe ceny podkladovej akcie nahor (hore - $(i+1)$), resp. nadol (dolu - $(i-1)$).

Uvedený postup výpočtu teda zodpovedá tomu, ktorý sme uvádzali pri bezarbitrážnom výpočte ceny opcie na binárnom strome v predchádzajúcich kapitolách. Prirodzene vzniká otázka, či aj riziko-neutrálne pravdepodobnosti q_+, q_- zodpovedajú tým, ktoré boli uvádzané v predchádzajúcich kapitolách.

Odpoveď na túto otázku je aspoň na úrovni lineárnej aproximácie kladná. Riziko-neutrálnu pravdepodobnosť sme v predchádzajúcich kapitolách označovali q a počítali pomocou vzťahu (6.31). Prispôsobme zápis tohto vzťahu predchádzajúcemu značeniu a transformáciam:

$$q = \frac{S\mathrm{e}^{Rk} - S_-}{S_+ - S_-} = \frac{K\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{Rk} - K\mathrm{e}^{x-h}}{K\mathrm{e}^{x+h} - K\mathrm{e}^{x-h}} = \frac{\mathrm{e}^{Rk} - \mathrm{e}^{-h}}{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^{-h}} = \frac{\mathrm{e}^{Rk+h} - 1}{\mathrm{e}^{2h} - 1}. \tag{6.125}$$

Porovnajme q s $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)k}$. Nato označme

$$F(h,k) := \frac{\mathrm{e}^{Rk+h} - 1}{\mathrm{e}^{2h} - 1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)k}.$$

Potom pre dostatočne malé h (a teda i k; pripomíname, že $k = \frac{h^2}{\sigma^2}$) bude $F(h,k) \doteq 0$. Ukážeme.

Najprv si uvedomme, že ak $h = \sigma\sqrt{k}$, tak nárast ceny aktíva z hodnoty S_{teraz} na S_{hore}, resp. jeho pokles na S_{dolu} sa udeje takým spôsobom, že $S_{hore} = uS_{teraz}$ a $S_{dolu} = dS_{teraz}$, kde $d = \frac{1}{u}$ a $u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{k}} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$. Teda takým spôsobom, aký navrhovali autori práce [23] a na ktorý sme upozornili v časti 6.10 o špeciálnych prípadoch oceňovania derivátov.

Pre $k = \frac{h^2}{\sigma^2}$ bude F funkciou len jednej premennej h a teda označme

$$w(h) := F\left(h, \frac{h^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h} - 1}{\mathrm{e}^{2h} - 1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)\frac{h^2}{\sigma^2}}.$$

Potom:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} w(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1}{\mathrm{e}^{2h}-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)\frac{h^2}{\sigma^2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1}{\mathrm{e}^{2h}-1} - \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)\frac{h^2}{\sigma^2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1}{\mathrm{e}^{2h}-1} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ak teda $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1}{\mathrm{e}^{2h}-1} = \frac{1}{2}$, tak $\lim\limits_{h\to 0} w(h) = 0$. Počítajme:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1}{\mathrm{e}^{2h}-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}}{2\mathrm{e}^{2h}} = \frac{1}{2}.$$

Ďalej máme:

$$w'(h) = \frac{\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right) - 2\mathrm{e}^{2h}\left(\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\alpha - 2\left(\frac{\beta-R}{\sigma^2}\right)h\right)\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)\frac{h^2}{\sigma^2}}.$$

Ukážeme, že aj $\lim\limits_{h\to 0} w'(h) = 0$. Platí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\alpha - 2\left(\frac{\beta-R}{\sigma^2}\right)h\right)\mathrm{e}^{\alpha h-(\beta-R)\frac{h^2}{\sigma^2}} = \frac{\alpha}{2}.$$

Počítajme:

$$\begin{gathered}\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right) - 2\mathrm{e}^{2h}\left(\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)^2} = \\ \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2R}{\sigma^2}h-1\right)\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+3h} - \left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h} + 2\mathrm{e}^{2h}}{\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)^2} = \\ \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+3h}\left(\frac{2R}{\sigma^2} + \left(\frac{2R}{\sigma^2}h-1\right)\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+3\right)\right) - \mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\frac{2R}{\sigma^2} + \left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)^2\right) + 4\mathrm{e}^{2h}}{4\mathrm{e}^{2h}\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)} = \\ \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\frac{2R}{\sigma^2} + \left(\frac{2R}{\sigma^2}h-1\right)\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+3\right)\right) - \mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}-h}\left(\frac{2R}{\sigma^2} + \left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)^2\right) + 4}{4\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)} = \\ \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\frac{4R^2}{\sigma^4}h^2 + \frac{4R}{\sigma^2}h + \frac{2R}{\sigma^2} - 3\right) - \mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}-h}\left(\frac{4R^2}{\sigma^4}h^2 + \frac{4R}{\sigma^2}h + \frac{2R}{\sigma^2} + 1\right) + 4}{4\left(\mathrm{e}^{2h}-1\right)} = \\ \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}+h}\left(\left(\frac{2R}{\sigma^2}h+1\right)\left(\frac{4R^2}{\sigma^4}h^2 + \frac{4R}{\sigma^2}h + \frac{2R}{\sigma^2} - 3\right) + \frac{8R^2}{\sigma^4}h + \frac{4R}{\sigma^2}\right)}{8\mathrm{e}^{2h}} - \\ \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{R\frac{h^2}{\sigma^2}-h}\left(\left(\frac{2R}{\sigma^2}h-1\right)\left(\frac{4R^2}{\sigma^4}h^2 + \frac{4R}{\sigma^2}h + \frac{2R}{\sigma^2} + 1\right) + \frac{8R^2}{\sigma^4}h + \frac{4R}{\sigma^2}\right)}{8\mathrm{e}^{2h}} = \\ \frac{\frac{6R}{\sigma^2}-3}{8} - \frac{\frac{2R}{\sigma^2}-1}{8} = \frac{R}{2\sigma^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.\end{gathered}$$

Pretože $\lim\limits_{h\to 0} w(h) = 0$ aj $\lim\limits_{h\to 0} w'(h) = 0$, tak aj $q - q_+ \doteq 0$ pre $h \to 0$. Presnejšie q môžeme pre h blízke 0 aproximovať q_+ a ak niekde nastáva nerovnosť, tak až v členoch druhého a vyššieho rádu Taylorovho rozvoja.

Vidíme, že diskretizácia a oceňovanie na binárnych stromoch so špeciálnou vlastnosťou opísanou vyššie je dobrou aproximáciou oceňovania opcií pri spojitom čase a predchádzajúce odvodenie týkajúce sa riziko-neutrálnej pravdepodobnosti dáva spolu využívaním vzťahu (6.32) oceňovaniu na binárnych stromoch kredit.

6.15 Opčné stratégie

Investori často (na základe nejakých indícií) predpokladajú pohyb v cene podkladového aktíva, ktorý môže byť výrazný alebo menej výrazný. V mnohých prípadoch však nevedia presne určiť, ktorým smerom tento pohyb nastane. Chcú preto eliminovať prípadné straty súvisiace s kúpou či predajom nejakého aktíva a naopak, ak je to možné, znásobiť profit, a preto volia rôzne opčné stratégie.

Opčnou stratégiou budeme rozumieť kúpu alebo predaj, prípadne oboje, rôznych druhov opcií (put, call) na to isté podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti s rovnakými alebo rôznymi realizačnými cenami.

Budeme uvažovať len kombinácie európskeho typu opcií na akciu bez dividend a vo všetkých nasledujúcich príkladoch budeme nazerať na výnosy, straty a hodnoty stratégií len z pohľadu držiteľa stratégie, teda investora, ktorý podľa zvolenej stratégie nakupuje a predáva opcie.

6.15.1 Straddle

Straddle je stratégia využívajúca nákup dvoch opcií európskeho typu (put a call) na to isté podkladové aktívum, s tou istou realizačnou cenou K p. j. blízkou cene aktíva v čase 0 a s tou istou dobou splatnosti.

Investor využije túto stratégiu, ak očakáva veľkú zmenu v cene aktíva, ale nevie, v ktorom smere táto zmena nastane.

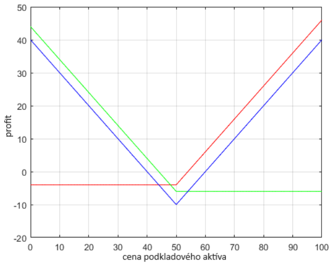
Ponechajme značenie ako v predchádzajúcom. Potom, ak v čase splatnosti opcií prekročí cena aktíva realizačnú cenu, t. j. $S_T > K$ p. j., investor uplatní call opciu umožňujúcu kúpu aktíva za K p. j. V opačnom prípade investor uplatní put opciu.

Keďže na začiatku (v čase 0) zaplatil za obe opcie v súčte $\left(P_0^E + C_0^E\right)$ p. j., tak v čase splatnosti oboch opcií nebude v strate v prípade, že cena aktíva S_T vyjde z intervalu $(K - P_0^E - C_0^E, K + P_0^E + C_0^E)$, t. j. buď bude $S_T \leq K - P_0^E - C_0^E$ (investor uplatňuje put opciu) alebo bude $S_T \geq K + P_0^E + C_0^E$ (investor uplatňuje call opciu). Tieto závery môžeme ilustrovať na nasledujúcom profit diagrame (Obr. 6.8) držiteľa straddle stratégie.

Samozrejme, ak chceme zohľadniť časovú hodnotu peňazí, je potrebné v čase T pracovať s hodnotami $P_0^E \mathrm{e}^{RT}$ a $C_0^E \mathrm{e}^{RT}$ miesto P_0^E a C_0^E, kde R je bezriziková spojitá úroková sadzba, konštantná počas doby splatnosti derivátov, pretože budúca hodnota kapitálu $\left(P_0^E + C_0^E\right)$ p.

j. zaplateného v čase 0 je v čase T zúročená príslušnou úrokovou sadzbou za príslušné časové obdobie.

Aj pri ďalších stratégiach to treba mať na pamäti, ale už si to pri profit diagramoch nasledujúcich stratégií nebudeme viac pripomínať.



Obr. 6.8: Červenou – call opcia, zelenou – put opcia, modrou – straddle, $K = 50$ p. j. [32] [33]

6.15.2 Strip

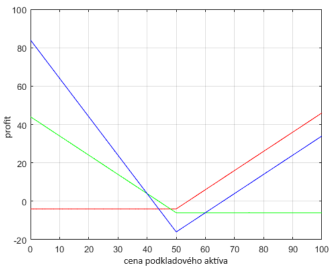
Strip je stratégia využívajúca nákup jednej európskej call opcie a dvoch európskych put opcií na rovnaké podkladové aktívum s rovnakou dobou splatnosti a s rovnakou realizačnou cenou K p. j. blízkou cene aktíva v čase 0.

Investor v prípade tejto stratégie vsádza na výrazný posun v cene aktíva, pričom predpokladá, že tento posun nastane skôr smerom nadol než smerom nahor.

Ak v čase splatnosti opcií prekročí cena aktíva realizačnú cenu, t. j. $S_T > K$, tak investor uplatní call opciu umožnujúcu kúpu aktíva za K p. j. V opačnom prípade investor uplatní obe put opcie.

Keďže v čase 0 zaplatil za obe opcie v súčte $2P_0^E + C_0^E$, tak nebude v strate v prípade, že cena aktíva S_T vyjde z intervalu $\left(K - P_0^E - \frac{C_0^E}{2}, K + 2P_0^E + C_0^E\right)$, t. j. buď bude $S_T \leq K - P_0^E - \frac{C_0^E}{2}$ (investor uplatňuje obe put opcie) alebo bude $S_T \geq K + 2P_0^E + C_0^E$ (investor uplatňuje call opciu).

Profit diagram držiteľa stratégie sa nachádza na Obr. 6.9.



Obr. 6.9: Červenou – call opcia, zelenou – put opcia, modrou – strip, $K = 50$ p. j. [32] [33]

6.15.3 Strap

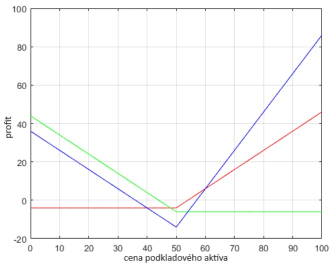
Strap je stratégia využívajúca nákup jednej európskej put opcie a dvoch európskych call opcií na rovnaké podkladové aktívum s rovnakou dobou splatnosti a s rovnakou realizačnou cenou K p. j. blízkou cene aktíva v čase 0.

Investor v prípade tejto stratégie vsádza na výrazný posun v cene aktíva, pričom predpokladá, že tento posun nastane skôr smerom nahor než smerom nadol.

Ak v čase splatnosti opcií prekročí cena aktíva realizačnú cenu, t. j. $S_T > K$, tak investor uplatní obe call opcie umožnujúcu kúpu aktíva za K p. j. V opačnom prípade investor uplatní put opciu.

Keďže v čase 0 zaplatil za obe opcie v súčte $P_0^E + 2C_0^E$, tak nebude v strate v prípade, že cena aktíva S_T vyjde z intervalu $\left(K - P_0^E - 2C_0^E, K + \frac{P_0^E}{2} + C_0^E\right)$, t. j. buď bude $S_T \leq K - P_0^E - 2C_0^E$ (investor uplatňuje put opciu) alebo bude $S_T \geq K + \frac{P_0^E}{2} + C_0^E$ (investor uplatňuje obe call opcie).

Profit diagram držiteľa stratégie sa nachádza na Obr. 6.10.



Obr. 6.10: Červenou – call opcia, zelenou – put opcia, modrou – strap, $K = 50$ p. j. [32] [33]

6.15.4 Strangle

Strangle je stratégia využívajúca nákup jednej európskej put opcie a jednej európskej call opcie na rovnaké podkladové aktívum s rovnakou dobou splatnosti, ale s rozdielnou realizačnou cenou.

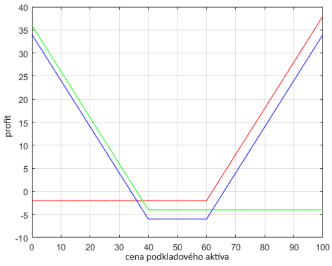
Ide o podobnú stratégiu ako je straddle. Investor využije túto stratégiu, ak očakáva veľkú zmenu v cene aktíva, ale nevie, v ktorom smere táto zmena nastane.

Označme realizačnú cenu put opcie ako K_1, nech realizačná cena call opcie je K_2, kde $K_2 > K_1$. Označme súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) put opcie ako P_0^1 a súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) call opcie ako C_0^2.

Ak v čase splatnosti opcií prekročí cena aktíva realizačnú cenu K_2, t. j. $S_T > K_2$, investor uplatní call opciu. Ak v čase splatnosti opcií bude $S_T < K_1$, investor uplatní put opciu.

Keďže v čase 0 zaplatil za obe opcie v súčte $P_0^1 + C_0^2$, tak nebude v strate v prípade, že cena aktíva S_T vyjde z intervalu $(K_1 - P_0^1 - C_0^2, K_2 + P_0^1 + C_0^2)$, t. j. buď bude $S_T \leq K_1 - P_0^1 - C_0^2$ (investor uplatňuje put opciu) alebo bude $S_T \geq K_2 + P_0^1 + C_0^2$ (investor uplatňuje call opciu).

Profit diagram držiteľa stratégie sa nachádza na Obr. 6.11.

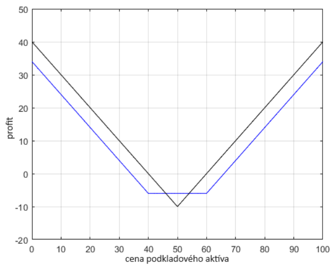


Obr. 6.11: Červenou – call opcia, zelenou – put opcia, modrou – strangle, $K_1 = 40$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

Profit z tejto stratégie závisí od toho, ako ďaleko od seba sa K_1 a K_2 nachádzajú. Čím sú od seba ďalej, pričom K_1 zmenšujeme a K_2 zväčšujeme, tým nižšie sú ceny opcií (vzťah (6.35) v tvrdení 6.3 pre európske opcie na akcie nevyplácajúce dividendy), a teda nižšia je aj strata plynúca z držby stratégie v prípade, že cena aktíva v čase T skončí v intervale $\langle K_1, K_2\rangle$. Zároveň sa tým zmenšuje priestor na dosiahnutie zisku, pretože cena aktíva v čase T musí byť väčšia ako $K_2 + P_0^1 + C_0^2$, resp. menšia než $K_1 - P_0^1 - C_0^2$ na to, aby bolo možné zisk dosiahnuť.

V prípade, že $K_1 < K < K_2$, kde K je realizačná cena opcií z predchádzajúcich stratégií blízka cene aktíva v čase 0, podľa (6.35) je $P_0^1 \leq P_0$ a $C_0^2 \leq C_0$ (P_0, C_0 tak, ako v predchádzajúcom). To znamená, že na rozdiel od straddle stratégie síce táto stratégia dáva nižší profit, ale zároveň to kompenzuje nižšími stratami tým spôsobom, že rozširuje interval pre ich vznik.

Ako ilustráciu (Obr. 6.12) môžeme obrazovo porovnať profit diagramy držiteľa straddle a strangle stratégie s realizačnými cenami opcií $K_1 < K < K_2$ takými, že $K = \frac{K_1+K_2}{2}$.



Obr. 6.12: Modrou – strangle, čiernou – straddle, $K_1 = 40$ p. j., $K = 50$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

6.15.5 Bull spread

Bull spread je stratégia využívajúca nákup európskej call opcie na nejaké podkladové aktívum s určitou dobou splatnosti a nejakou realizačnou cenou K_1 p. j. a predaj európskej call opcie na rovnaké podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti, ale s vyššou realizačnou cenou K_2.

Investor očakáva, že cena aktíva vzrastie, avšak v tomto prípade sú prípadná strata, ale aj zisk ohraničené.

Označme súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) call opcie s realizačnou cenou K_1 p. j. ako C_0^1 a súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) call opcie s realizačnou cenou K_2 p. j. ako C_0^2. Poznamenajme, že ak ide o aktívum neposkytujúce žiadne mimoriadne platby, napr. pri akciách dividendy, tak podľa (6.35) platí $C_0^1 \geq C_0^2$.

Ak v čase splatnosti opcií je cena aktíva nižšia alebo rovnaká ako realizačná cena K_1, t. j. $S_T \leq K_1$, investor ani protistrana neuplatňujú žiadnu zo zakúpených call opcií. Pretože $C_0^1 \geq C_0^2$, držiteľ stratégie je v strate vo výške $C_0^1 - C_0^2$ p. j.

Ak v čase splatnosti opcií prekročí cena aktíva realizačnú cenu K_1, t. j. $S_T > K_1$, investor uplatňuje zakúpenú call opciu. Súčasne, ak je $S_T \in (K_1, K_2\rangle$, nevzniká nárok protistrany na kúpu aktíva z predanej opcie a investor si ponecháva opčnú prémiu C_0^2 p. j. za jej predaj.

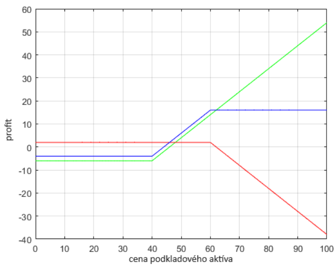
Ak v čase splatnosti opcií bude $S_T > K_2$, vzniká nárok na zakúpenie aktíva za cenu K_2 p. j. protistranou, čím sa znižuje zisk z nákupu aktíva za cenu K_1 p. j. a tento rozdiel ostáva s rastom S_T konštantný.

Výplaty stratégie v čase T sú v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva	$S_T \leq K_1$	$K_1 < S_T \leq K_2$	$S_T > K_2$
výplata	0	$S_T - K_1$	$K_2 - K_1$

Profit investora je potom výplata znížená o počiatočnú investíciu $C_0^1 - C_0^2$ p. j.

Profit diagram držiteľa stratégie pozostávajúcej z kúpnych opcií sa nachádza na Obr. 6.13.



Obr. 6.13: Zelenou – kúpená call opcia, červenou – predaná call opcia, modrou – bull spread, $K_1 = 40$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

Bull spread stratégia môže tiež využívať kúpu európskej put opcie na nejaké podkladové aktívum s určitou dobou splatnosti a nejakou realizačnou cenou K_1 p. j. a predaj európskej put opcie na rovnaké podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti, ale s vyššou realizačnou cenou K_2 p. j.

Označme súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) put opcie s realizačnou cenou K_1 p. j. ako P_0^1 a súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) put opcie s realizačnou cenou K_2 p. j. ako P_0^2. Poznamenajme, že ak ide o aktívum neposkytujúce žiadne mimoriadne platby, napr. pri akciách dividendy, tak podľa (6.35) platí $P_0^1 \leq P_0^2$.

Ak v čase splatnosti opcií je cena aktíva nižšia ako realizačná cena K_1, t. j. $S_T < K_1$, obe strany uplatňujú svoju put opciu. Pretože $K_1 < K_2$ a teda $K_1 - S_T < K_2 - S_T$, výplata plynúca pre držiteľa stratégie je záporná v profit diagrame zvýšená o rozdiel $P_0^2 - P_0^1$ p. j. dosiahnutý nákupom stratégie v čase 0.

Ak v čase splatnosti je $S_T \in \langle K_1, K_2)$, investor zakúpenú opciu neuplatňuje, kým protistrana áno. Rozdiel $K_2 - S_T$ je však tým nižší, čím je hodnota S_T bližšia K_2 p. j. Držiteľ stratégie zároveň disponuje rozdielom $P_0^2 - P_0^1$ p. j. nadobudnutým v čase 0.

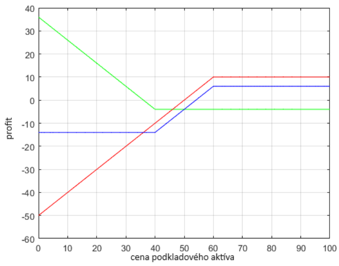
Ak v čase splatnosti opcií bude $S_T \geq K_2$, žiadna zo strán nebude put opciu uplatňovať. Profit držiteľa stratégie je daný príjmom $P_0^2 - P_0^1$ p. j. nadobudnutým v čase 0 a s rastúcim S_T sa nemení.

Výplaty stratégie v čase T sú v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva	$S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$S_T \geq K_2$
výplata	$K_1 - K_2$	$S_T - K_2$	0

Profit investora je potom výplata zvýšená o počiatočný príjem $P_0^2 - P_0^1$ p. j.

Profit diagram držiteľa stratégie pozostávajúcej z predajných opcií sa nachádza na Obr. 6.14.



Obr. 6.14: Zelenou – kúpená put opcia, červenou – predaná put opcia, modrou – bull spread, $K_1 = 40$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

Z porovnania Obr. 6.13 a Obr. 6.14 môže pozorný čitateľ nadobudnúť pocit, že pri bull spread stratégii využívajúcej call opcie je strata držiteľa stratégie pre hodnoty $S_T < K_1$ nižšia, než je tomu pri bull spread stratégii využívajúcej put opcie. Podobne profit je pre $S_T > K_2$ pre držiteľa stratégie vyšší pri call opciách než pri put opciách. Ak predpokladáme, že $R > 0$ a podkladové aktívum je akcia bez dividend, s využitím vzťahu (6.35) a kúpno-predajnej parity pre európske opcie na akciu bez dividend (6.38) možno ľahko ukázať, že dané pozorovanie platí aj vo všeobecnosti. Zo (6.38) totiž dostaneme:

$$S_0 + P_0^1 - C_0^1 = K_1 e^{-RT}, \tag{6.126}$$

$$S_0 + P_0^2 - C_0^2 = K_2 e^{-RT}. \tag{6.127}$$

Odčítaním rovníc (6.126) a (6.127) získame:

$$C_0^2 - C_0^1 = P_0^2 - P_0^1 + (K_1 - K_2)e^{-RT} > P_0^2 - P_0^1 + K_1 - K_2. \tag{6.128}$$

Ak $S_T < K_1$ p. j., profit držiteľa stratégie s call opciami je $C_0^2 - C_0^1$ p. j., kým profit držiteľa stratégie s put opciami je $K_1 - K_2 + P_0^2 - P_0^1$ p. j. Čiže profit držiteľa stratégie s call opciami je podľa (6.128) väčší než profit držiteľa stratégie s put opciami. Keďže podľa (6.35) je $C_0^2 \leq C_0^1$, tak strata držiteľa stratégie s call opciami je menšia než strata držiteľa stratégie s put opciami.

Ak $S_T > K_2$ p. j., profit držiteľa stratégie s call opciami je $K_2 - K_1 + C_0^2 - C_0^1$ p. j., kým profit držiteľa stratégie s put opciami je $P_0^2 - P_0^1$ p. j. Pretože platí (6.128), tak profit držiteľa stratégie s call opciami je väčší než profit držiteľa stratégie s put opciami. Keďže podľa (6.35) je $P_0^2 \geq P_0^1$, tak ide skutočne o kladný zisk, nie o stratu.

Z toho zároveň dostávame, že aj pre $K_1 \leq S_T \leq K_2$ je profit držiteľa stratégie s call opciami väčší než profit držiteľa stratégie s put opciami.

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že držať sa bull spread stratégie s call opciami je za každých okolností lepšie, než mať v tejto stratégii put opcie. Je to pravda, ale len pre absolútne čísla. Ak do porovnávania zapojíme časovú hodnotu peňazí a teda porovnávame ceny k rovnakému dátumu, napr. k času 0, situácia sa zmení.

Ak $S_T < K_1$ p. j., tak v čase 0 je hodnota stratégie s call opciami rovná $C_0^2 - C_0^1$ p. j., kým hodnota stratégie s put opciami je $(K_1 - K_2)\mathrm{e}^{-RT} + P_0^2 - P_0^1$ p. j. Pretože podľa (6.128) je $C_0^2 - C_0^1 = P_0^2 - P_0^1 + (K_1 - K_2)\mathrm{e}^{-RT}$, tak obe stratégie majú v čase 0 rovnakú hodnotu.

Podobne ak $S_T > K_2$ p. j., tak v čase 0 je hodnota stratégie s call opciami rovná $(K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-RT} + C_0^2 - C_0^1$ p. j., kým hodnota stratégie s put opciami je $P_0^2 - P_0^1$ p. j. Pretože platí (6.128), tak v čase 0 majú obe stratégie rovnakú hodnotu.

Z uvedeného zároveň vyplýva, že obe stratégie sú rovnocenné aj pre $K_1 \leq S_T \leq K_2$.

6.15.6 Bear spread

Bear spread je stratégia využívajúca nákup európskej put opcie na nejaké podkladové aktívum s určitou dobou splatnosti a nejakou realizačnou cenou K_2 p. j. a predaj európskej put opcie na rovnaké podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti, ale s nižšou realizačnou cenou K_1 p. j.

Investor očakáva, že cena aktíva poklesne. Prípadná strata, ale aj zisk zo stratégie sú ohraničené.

Použijeme značenie z predchádzajúcej časti. Ak v čase splatnosti opcií je $S_T \geq K_2$, investor neuplatňuje zakúpenú put opciu a prichádza o zaplatenú opčnú prémiu P_0^2, súčasne si však ponecháva opčnú prémiu z predaja druhej opcie P_0^1.

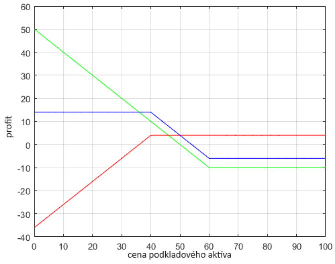
Ak je $S_T \in \langle K_1, K_2)$, stále nevzniká nárok protistrany na predaj aktíva z predanej opcie a investor si ponecháva opčnú prémiu za jej predaj a súčasne mu ním zakúpená put opcia dovoľuje predaj podkladového aktíva za realizačnú cenu K_2 p. j. Ak v čase splatnosti opcií bude $S_T < K_1$, vzniká nárok na predaj aktíva za cenu K_1 p. j. protistranou, čím sa znižuje zisk z predaja aktíva za cenu K_2 p. j. držiteľom stratégie a tento rozdiel ostáva pre klesajúce S_T konštantný.

Výplaty stratégie v čase T sú v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva	$S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$S_T \geq K_2$
výplata	$K_2 - K_1$	$K_2 - S_T$	0

Profit investora je potom pre každú z možností výplata znížená o počiatočnú investíciu $P_0^2 - P_0^1$ p. j.

Profit diagram držiteľa stratégie pozostávajúcej z predajných opcií sa nachádza na Obr. 6.15.



Obr. 6.15: Zelenou – kúpená put opcia, červenou – predaná put opcia, modrou – bear spread, $K_1 = 40$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

Meno zvieraťa v bull spread stratégii a bear spread stratégii súvisí s úzusom ohľadom pomenovania investorov na burze podľa spôsobu, akým zohľadňujúc svoje očakávania investujú, pripomínajúcim útok býka, resp. medveďa. Badať to aj na profit diagramoch týchto stratégií.

Bull spread profit diagram prechádza s rastúcim S_T zo straty do kladných hodnôt, teda profit držiteľa stratégie s rastúcim S_T sleduje pohyb rohov býka pri útoku, ktoré sú najprv sklopené a vo finálnej fáze nasledujú pohyb hlavy smerom nahor.

Bear spread profit diagram prechádza s rastúcim S_T z kladných čísel zisku do stratových hodnôt, teda profit držiteľa stratégie s rastúcim S_T sleduje pohyb medveďa pri útoku, ktorý sa najprv postaví na zadné a potom pohybom smerom nadol sa snaží váhou tela zhodiť a eliminovať protivníka zapájajúc pritom svoje pazúry.

Bear spread stratégia môže tiež využívať kúpu európskej call opcie na nejaké podkladové aktívum s určitou dobou splatnosti a nejakou realizačnou cenou K_2 p. j. a predaj európskej call opcie na rovnaké podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti, ale s nižšou realizačnou cenou K_1 p. j.

Ak v čase splatnosti opcií je $S_T \geq K_2$, investor i protistrana uplatňujú zakúpené call opcie. Výplata držiteľa stratégie je záporná, rovná rozdielu $K_1 - K_2$ p. j., v profit diagrame zvýšená o počiatočný príjem $C_0^1 - C_0^2$ p. j.

Ak je $S_T \in \langle K_1, K_2)$, držiteľ stratégie prichádza o výplatu plynúcu z realizácie zakúpenej opcie a jeho jediný príjem predstavuje C_0^1 p. j. obdržaných v čase 0. Jeho výplata $K_1 - S_T \leq 0$ p. j. je v profit diagrame navyše znížená o C_0^2 p. j. zaplatených v čase 0 protistrane.

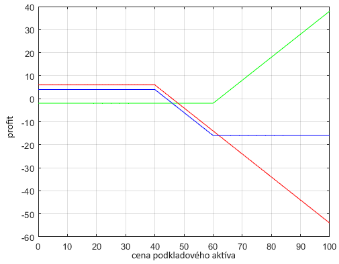
Ak v čase splatnosti opcií bude $S_T < K_1$, ani jedna zo strán nerealizuje svoju call opciu. Profit držiteľa opcie je $C_0^1 - C_0^2$ p. j. a s klesajúcim S_T ostáva konštantný.

Výplaty stratégie v čase T sú v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva	$S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$S_T \geq K_2$
výplata	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - K_2$

Profit investora je potom pre každú z možností výplata zvýšená o počiatočný príjem $C_0^1 - C_0^2$ p. j.

Profit diagram držiteľa stratégie pozostávajúcej z kúpnych opcií sa nachádza na Obr. 6.16.



Obr. 6.16: Zelenou – kúpená call opcia, červenou – predaná call opcia, modrou – bear spread, $K_1 = 40$ p. j., $K_2 = 60$ p. j. [32] [33]

Podobne ako pri bull spread stratégii aj pri bear spread stratégii platí, že v absolútnych číslach je profit držiteľa stratégie väčší a strata menšia pri put opciách než pri call opciách. Dôkaz by analogicky ako pri bull stratégii využíval vzťahy (6.128) a (6.35).

Navyše rovnako ako pri bull spread stratégii, aj tu by bolo možné ukázať, že ak do porovnávania zapojíme časovú hodnotu peňazí, a teda porovnávame hodnoty stratégií k rovnakému dátumu, tak je jedno, či investor využije put alebo call opcie, pretože v takomto prípade je hodnota stratégií rovnaká pre akúkoľvek cenu podkladovej akcie S_T v čase T.

6.15.7 Box spread

Box spread je kombináciou bull call spread s realizačnými cenami $K_1 < K_2$ a bear put spread s tými istými K_1 a K_2.

To znamená, že výplata plynúca z držby takejto kombinácie je v čase T splatnosti všetkých opcií pre všetky možné hodnoty S_T rozdiel $K_2 - K_1$. Aby nenastala arbitráž, musí byť preto súčasná hodnota stratégie rovná $(K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-RT}$.

Platnosť tohto tvrdenia pre európske opcie na akciu bez dividend možno dokázať pomocou vzťahu (6.38) kúpno-predajnej parity. Ak si uvedomíme, že súčasná hodnota stratégie pre takéto opcie je rovná $C_0^1 - C_0^2 + P_0^2 - P_0^1$ p. j. a využijeme vzťah (6.38), tak dostaneme:

$$C_0^1 - P_0^1 + P_0^2 - C_0^2 = S_0 - K_1\mathrm{e}^{-RT} + K_2\mathrm{e}^{-RT} - S_0 = (K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-RT}.$$

6.15.8 Butterfly spread

Butterfly spread zahŕňa kúpu európskej call opcie s relatívne nízkou realizačnou cenou K_1, kúpu európskej call opcie s relatívne vysokou realizačnou cenou K_3 a predaj dvoch európskych call opcií s realizačnou cenou K_2 ležiacou uprostred intervalu (K_1, K_3), vo všeobecnosti blízkou aktuálnej hodnote aktíva. Všetky opcie sú s rovnakou maturitou a na rovnaké podkladové aktívum.

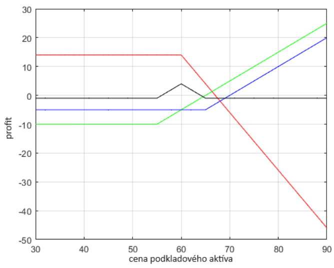
Je to stratégia vhodná pre investorov, ktorí predpokladajú, že výrazný posun v cene aktíva je nepravdepodobný a skôr príde k malému posunu niektorým smerom.

Výplaty zo stratégie sa nachádzajú v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva v čase T	výplata opcie s K_1	výplata opcie s K_3	výplata predaných opcií s K_2	celková výplata
$S_T \leq K_1$	0	0	0	0
$S_T \in (K_1, K_2\rangle$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$
$S_T \in (K_2, K_3\rangle$	$S_T - K_1$	0	$-2(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$
$S_T > K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2(S_T - K_2)$	0

Stratégia vypláca na konci splatnosti opcií kladnú hodnotu len v prípade, že $S_T \in (K_1, K_3)$. Profit plynúci z držby takejto stratégie je potom znížený o hodnotu počiatočnej investície $C_0^1 + C_0^3 - 2C_0^2$, kde C_0^i je hodnota call opcie s K_i pre $i = 1, 2, 3$.

Profit diagram držiteľa butterfly spread stratégie pozostávajúcej z kúpnych opcií sa nachádza na Obr. 6.17.



Obr. 6.17: Zelenou – kúpená call opcia s $K_1 = 55$ p. j., modrou – kúpená call opcia s $K_3 = 65$ p. j., červenou – predané call opcie s $K_2 = 60$ p. j., čiernou – butterfly spread. [32] [33]

Podobne ako pri predchádzajúcich stratégiach možno zostaviť butterfly spread stratégiu aj z put opcií, konkrétne kúpou európskej put opcie s relatívne nízkou realizačnou cenou K_1, kúpou európskej put opcie s relatívne vysokou realizačnou cenou K_3 a predajom dvoch európskych put opcií s realizačnou cenou K_2 ležiacou uprostred intervalu (K_1, K_3), vo všeobecnosti blízkou aktuálnej hodnote aktíva. Všetky opcie sú s rovnakou maturitou a na rovnaké podkladové aktívum.

Dá sa ukázať, že výplaty zo stratégie s put opciami sú rovnaké ako zo stratégie s call opciami. Nachádzajú sa v nasledujúcej tabuľke:

cena aktíva v čase T	výplata opcie s K_1	výplata opcie s K_3	výplata predaných opcií s K_2	celková výplata
$S_T < K_1$	$K_1 - S_T$	$K_3 - S_T$	$-2(K_2 - S_T)$	0
$S_T \in \langle K_1, K_2)$	0	$K_3 - S_T$	$-2(K_2 - S_T)$	$S_T - K_1$
$S_T \in \langle K_2, K_3)$	0	$K_3 - S_T$	0	$K_3 - S_T$
$S_T \geq K_3$	0	0	0	0

Vzhľadom nato by mali mať tieto stratégie rovnakú súčasnú hodnotu. Ukážeme, že v prípade európskych opcií na akciu bez dividend to je pravda. S využitím kúpno-predajnej parity pre európske opcie na akciu bez dividend dostaneme:

$$P_0^1 - 2P_0^2 + P_0^3 = C_0^1 - S_0 + K_1 e^{-RT} - 2C_0^2 + 2S_0 - 2K_2 e^{-RT} + C_0^3 - S_0 + K_3 e^{-RT} = C_0^1 - 2C_0^2 + C_0^3,$$

kde sme za K_2 dosadili $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$.

6.16 Úlohy na precvičenie

Úloha 6.1. *Uvažujte európsku kúpnu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti T rovnou dvom týždňom a realizačnou cenou $K = 50$ p. j., pričom cena akcie dnes (v čase 0) je $S_0 = 50$ p. j. a vývoj ceny akcie sa nachádza na jednoduchom binárnom strome, kde na cenu akcie za dobu T majú vplyv dve náhodné udalosti H a D tak, že:*

$$\begin{array}{llll}
H: & & S_H = 70 \text{ p. j.} & \text{s pp. } p \\
& & \nearrow & \\
& S_0 = 50 \text{ p. j.} & & \\
& & \searrow & \\
D: & & S_D = 30 \text{ p. j.} & \text{s pp. } 1-p
\end{array}$$

Nech spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je konštantná počas obdobia T. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie C_0^E.
$\left[\text{Výsledok: } C_0^E = 10 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 6.2. *Uvažujte európsku predajnú opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti T rovnou dvom týždňom a realizačnou cenou $K = 50$ p. j., pričom cenový vývoj akcie je rovnaký ako v úlohe 6.1. Uvažujte, že spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je konštantná počas obdobia T. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie P_0^E.*
$\left[\text{Výsledok: } P_0^E = 10 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 6.3. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte európsku predajnú opciu na akciu, ktorá nevypláca dividendy, s dobou splatnosti $T = \frac{2}{3}$ roka a realizačnou cenou $K = 50$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,03$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{21} = 70 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_{11} = 60 \text{ p. j.} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 50 \text{ p. j.} & & & & S_{22} = 50 \text{ p. j.} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_{12} = 40 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{23} = 30 \text{ p. j.}
\end{array}$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = \frac{1}{3}$ roka a druhá zmena nastane o ďalšiu tretinu roka neskôr. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.
$\left[\text{Výsledok: } P_0^E = \left(150\mathrm{e}^{-0,02} - 245\mathrm{e}^{-0,01} + 100\right) \text{ p. j.} \doteq 4,47 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 6.4. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte európsku kúpnu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* $T = \frac{2}{3}$ *roka a realizačnou cenou* $K = 50$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,03$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.3. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^E = \big(100\mathrm{e}^{-0,02} - 245\mathrm{e}^{-0,01} + 150\big)$ *p. j.* $\doteq 5,46$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.5. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu európskej kúpnej aj predajnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* T *rovnou 10 dní a realizačnou cenou* $K = 30$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,0002$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s 240 časovými krokmi dĺžky jednej hodiny a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou* $S_0 = 100$ *p. j., kde na každej vetve stromu platí, že* $S_{hore} = 1,001 S_{teraz}$ *a* $S_{dolu} = 0,995 S_{teraz}$*. Výsledky zaokrúhlite na celé čísla.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^E = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} = \big(100 - 30\mathrm{e}^{-0,002/365}\big)$ *p. j.* $\doteq 70$ *p. j.*, $P_0^E = 0$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.6. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu európskej kúpnej aj predajnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* T *rovnou 10 dní a realizačnou cenou* $K = 130$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,0002$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s 240 časovými krokmi dĺžky jednej hodiny a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou* $S_0 = 100$ *p. j., kde na každej vetve stromu platí, že* $S_{hore} = 1,001 S_{teraz}$ *a* $S_{dolu} = 0,995 S_{teraz}$*. Výsledky zaokrúhlite na celé čísla.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^E = 0$ *p. j.*, $P_0^E = K\mathrm{e}^{-RT} - S_0 = \big(130\mathrm{e}^{-0,002/365} - 100\big)$ *p. j.* $\doteq 30$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.7. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu európskej kúpnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* T *rovnou 10 dní a realizačnou cenou* $K = 109$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,005$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s 10 časovými krokmi dĺžky jedného dňa a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou* $S_0 = 100$ *p. j., kde na každej vetve stromu platí, že* $S_{hore} = 1,01 S_{teraz}$ *a* $S_{dolu} = 0,99 S_{teraz}$*. Výsledok zaokrúhlite na tri desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^E = \mathrm{e}^{-RT} q^{10} \left(S_0(1,01)^{10} - K\right) \doteq 0,001$ *p. j., kde* q *je riziko-neutrálna pravdepodobnosť, rovnaká na každej vetve stromu.*$\big]$

Úloha 6.8. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu európskej predajnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* T *rovnou 10 dní a realizačnou cenou* $K = 94$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,005$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s 10 časovými krokmi dĺžky jedného dňa a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou* $S_0 = 100$ *p. j., kde na každej vetve stromu platí, že* $S_{hore} = 1,05 S_{teraz}$ *a* $S_{dolu} = 0,99 S_{teraz}$*. Výsledok zaokrúhlite na tri desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $P_0^E = \mathrm{e}^{-RT}(1-q)^{10} \left(K - S_0(0,99)^{10}\right) \doteq 0,574$ *p. j., kde* q *je riziko-neutrálna pravdepodobnosť, rovnaká na každej vetve stromu.*$\big]$

Úloha 6.9. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte americkú predajnú opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti* $T = \frac{2}{3}$ *roka a realizačnou cenou* $K = 50$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,03$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.3. Výsledok zaokrúhlite na jedno desatinné miesto.*
$\big[$*Výsledok:* $P_0^A = \big(30\mathrm{e}^{-0,01} - 25\big)$ *p. j.* $\doteq 4,7$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.10. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte americkú kúpnu opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti* $T = \frac{2}{3}$ *roka a realizačnou cenou* $K = 50$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,03$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.3. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^A = C_0^E = \big(100\mathrm{e}^{-0,02} - 245\mathrm{e}^{-0,01} + 150\big)$ *p. j.* $\doteq 5,46$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.11. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte americkú predajnú opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti* $T = \frac{1}{3}$ *roka a realizačnou cenou* $K = 54$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,06$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{21} = 72 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_{11} = 60 \text{ p. j.} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 50 \text{ p. j.} & & & & S_{22} = 36 \text{ p. j.} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_{12} = 30 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{23} = 18 \text{ p. j.}
\end{array}
$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = \frac{1}{6}$ *roka a druhá zmena nastane o ďalšiu šestinu roka neskôr. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $P_0^A = \big(138\mathrm{e}^{-0,01} - 36\mathrm{e}^{-0,02} - 90\big)$ *p. j.* $\doteq 11,34$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.12. *Bezarbitrážnym oceňovaním ohodnoťte americkú kúpnu opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti* $T = \frac{1}{3}$ *roka a realizačnou cenou* $K = 30$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,06$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.11. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^A = \big(\frac{250}{3} + 18\mathrm{e}^{-0,02} - 80\mathrm{e}^{-0,01}\big)$ *p. j.* $\doteq 21,77$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.13. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu americkej kúpnej aj predajnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti* T *rovnou* 10 *dní a realizačnou cenou* $K = 30$ *p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba* $R = 0,0002$ *je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s* 240 *časovými krokmi dĺžky jednej hodiny a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou* $S_0 = 100$ *p. j., kde na každej vetve stromu platí, že* $S_{hore} = 1,001 S_{teraz}$ *a* $S_{dolu} = 0,995 S_{teraz}$*. Výsledky zaokrúhlite na celé čísla.*
$\big[$*Výsledok:* $C_0^A = C_0^E = S_0 - K\mathrm{e}^{-RT} = \big(100 - 30\mathrm{e}^{-0,002/365}\big)$ *p. j.* $\doteq 70$ *p. j.*, $P_0^A = 0$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.14. *Bezarbitrážnym oceňovaním určte súčasnú hodnotu americkej kúpnej aj predajnej opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti T rovnou 10 dní a realizačnou cenou $K = 130$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,0002$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je možné zobraziť na strome s 240 časovými krokmi dĺžky jednej hodiny a s hodnotou akcie v počiatočnom uzle rovnou $S_0 = 100$ p. j., kde na každej vetve stromu platí, že $S_{hore} = 1,001 S_{teraz}$ a $S_{dolu} = 0,995 S_{teraz}$.*
$\left[\right.$*Výsledok:* $C_0^A = 0$ p. j., $P_0^A = K - S_0 = (130 - 100)$ p. j. $= 30$ p. j.$\left.\right]$

Úloha 6.15. *Uvažujte typ binárnej opcie cash-or-nothing na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = \frac{1}{2}$ roka a realizačnou cenou $K = 21$ p. j. vyplácajúcu hotovosť $B = K$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,02$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & S_H = 24 \text{ p. j.} \\
 & \nearrow & \\
S_0 = 20 \text{ p. j.} & & \\
 & \searrow & \\
 & & S_D = 18 \text{ p. j.}
\end{array}
$$

Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu B_0^C kúpnej aj B_0^P predajnej opcie tohto typu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.
$\left[\right.$*Výsledok:* $B_0^C = \left(70 - 63\mathrm{e}^{-0,01}\right)$ p. j. $\doteq 7,63$ p. j., $B_0^P = \left(84\mathrm{e}^{-0,01} - 70\right)$ p. j. $\doteq 13,16$ p. j.$\left.\right]$

Úloha 6.16. *Uvažujte typ binárnej opcie asset-or-nothing na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = \frac{1}{2}$ roka a realizačnou cenou $K = 21$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,02$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.15. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu A_0^C kúpnej aj A_0^P predajnej opcie tohto typu. Výsledky zaokrúhlite na dve desatinné miesta.*
$\left[\right.$*Výsledok:* $A_0^C = \left(80 - 72\mathrm{e}^{-0,01}\right)$ p. j. $\doteq 8,72$ p. j., $A_0^P = \left(72\mathrm{e}^{-0,01} - 60\right)$ p. j. $\doteq 11,28$ p. j.$\left.\right]$

Úloha 6.17. *Uvažujte európsku kúpnu a európsku predajnú opciu na tú istú podkladovú bezdividendovú akciu s rovnakou dobou splatnosti $T = \frac{1}{2}$ roka a rovnakou realizačnou cenou $K = 21$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0,02$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.15. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu C_0^E kúpnej aj P_0^E predajnej opcie. Ukážte, že platí: $C_0^E = A_0^C - B_0^C$ a $P_0^E = B_0^P - A_0^P$.*
$\left[\right.$*Výsledok:* $C_0^E = \left(10 - 9\mathrm{e}^{-0,01}\right)$ p. j. $= \left(\left(80 - 72\mathrm{e}^{-0,01}\right) - \left(70 - 63\mathrm{e}^{-0,01}\right)\right)$ p. j. $= A_0^C - B_0^C$,
$P_0^E = \left(12\mathrm{e}^{-0,01} - 10\right)$ p. j. $= \left(\left(84\mathrm{e}^{-0,01} - 70\right) - \left(72\mathrm{e}^{-0,01} - 60\right)\right)$ p. j. $= B_0^P - A_0^P\left.\right]$

Úloha 6.18. *Uvažujte plávajúcu dozadu hľadiacu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ č. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{21} = 28 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_{11} = 24 \text{ p. j.} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 20 \text{ p. j.} & & & & S_{22} = 22 \text{ p. j.} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_{12} = 18 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{23} = 16 \text{ p. j.}
\end{array}
$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = 1$ č. j. a druhá zmena nastane o ďalšiu časovú jednotku neskôr. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu C_0^{pl} kúpnej aj P_0^{pl} predajnej opcie tohto typu.

$\Big[$*Výsledok:* $C_0^{pl} = \frac{20}{9}$*p. j.,* $P_0^{pl} = \frac{20}{9}$*p. j.*$\Big]$

Úloha 6.19. *Uvažujte fixnú dozadu hľadiacu opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ č. j. a realizačnou cenou $K = 21$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je rovnaký ako v úlohe 6.18. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu C_0^{fix} kúpnej aj P_0^{fix} predajnej opcie tohto typu.*

$\Big[$*Výsledok:* $C_0^{fix} = \frac{5}{3}$*p. j.,* $P_0^{fix} = \frac{29}{9}$*p. j.*$\Big]$

Úloha 6.20. *Uvažujte typ ázijskej opcie average price na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ č. j. a realizačnou cenou $K = 32$ p. j., ak spojitá bezriziková úroková sadzba $R = 0$ je počas tohto obdobia nemenná, pričom predpokladaný vývoj ceny akcie je na nasledujúcom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_{21} = 42 \text{ p. j.} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_{11} = 36 \text{ p. j.} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0 = 30 \text{ p. j.} & & & & S_{22} = 33 \text{ p. j.} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_{12} = 27 \text{ p. j.} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_{23} = 24 \text{ p. j.}
\end{array}
$$

kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $\Delta T = 1$ č. j. a druhá zmena nastane o ďalšiu časovú jednotku neskôr. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu C_0^{avg} kúpnej aj P_0^{avg} predajnej opcie tohto typu.

$\big[$*Výsledok:* $C_0^{avg} = \frac{2}{3}$*p. j.,* $P_0^{avg} = \frac{8}{3}$*p. j.*$\big]$

Úloha 6.21. *Uvažujte akciu bez dividend ako podkladové aktívum pre európsku kúpnu aj predajnú opciu s dobou splatnosti $T = 1$ č. j. a realizačnou cenou 80 p. j.$< K <$ 120 p. j., ktorej vývoj ceny sa nachádza na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & S_H = 120 \ p.\ j. \\
 & \nearrow & \\
S_0 = 100 \ p.\ j. & & \\
 & \searrow & \\
 & & S_D = 80 \ p.\ j.
\end{array}
$$

Nech spojitá bezriziková úroková sadzba R na obdobie T je konštantná počas obdobia T taká, že $R = 0,05$. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu $C_0^E(K)$ kúpnej aj $P_0^E(K)$ predajnej opcie v závislosti od hodnoty K.

$\Big[$*Výsledok:* $C_0^E(K) = \left(300 - 240\mathrm{e}^{-0,05} + K\left(2\mathrm{e}^{-0,05} - 2,5\right)\right)$ *p. j.*, $P_0^E(K) = \left(200 - 240\mathrm{e}^{-0,05} + K\left(3\mathrm{e}^{-0,05} - 2,5\right)\right)$ *p. j.*$\Big]$

Úloha 6.22. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ straddle stratégie v kladnom zisku, nech nastane ktorákoľvek z dvoch udalostí ovplyvňujúcich pohyb ceny podkladového aktíva. Určte K_{RN}, pre ktoré bude tento zisk riziko-neutrálny (teda jeho výška nebude závisieť od toho, ktorá z udalostí vplývajúcich na cenu akcie nastala). Aká je hodnota ω tohto zisku?*

$\Big[$*Výsledok:* $\frac{580-480\mathrm{e}^{-0,05}}{6-5\mathrm{e}^{-0,05}}$ *p. j.* $< K <$ $\frac{480\mathrm{e}^{-0,05}-380}{5\mathrm{e}^{-0,05}-4}$ *p. j.*, $K_{RN} = 100$ *p. j.*, $\omega = 20 - 20\mathrm{e}^{-0,05}$ *p. j.*$\Big]$

Úloha 6.23. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ straddle stratégie v nezápornom riziko-neutrálnom zisku pri investičnej alternatíve nákupu bezrizikových dlhopisov na obdobie T (t. j. zohľadňuje sa časová hodnota peňazí). Aký je tento zisk ω?*

$\big[$*Výsledok:* $K = 100$ *p. j.*, $\omega = \left(20\mathrm{e}^{-0,05} - 20\mathrm{e}^{-0,05}\right)$ *p. j.* $= 0$ *p. j.*$\big]$

Úloha 6.24. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ strip stratégie v kladnom zisku, nech nastane ktorákoľvek z dvoch udalostí ovplyvňujúcich pohyb ceny podkladového aktíva. Určte K_{RN}, pre ktoré bude tento zisk riziko-neutrálny. Aká je hodnota ω tohto zisku?*

$\Big[$*Výsledok:* $\frac{430-360\mathrm{e}^{-0,05}}{4,75-4\mathrm{e}^{-0,05}}$ *p. j.* $< K <$ $\frac{720\mathrm{e}^{-0,05}-580}{8\mathrm{e}^{-0,05}-6,5}$ *p. j.*, $K_{RN} = \frac{280}{3}$ *p. j.*, $\omega = \left(\frac{80-80\mathrm{e}^{-0,05}}{3}\right)$ *p. j.*$\Big]$

Úloha 6.25. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ strip stratégie v nezápornom riziko-neutrálnom zisku pri investičnej alternatíve nákupu bezrizikových dlhopisov na obdobie T. Aký je tento zisk ω?*

$\Big[$*Výsledok:* $K = \frac{280}{3}$ *p. j.*, $\omega = \left(\frac{80\mathrm{e}^{-0,05}-80\mathrm{e}^{-0,05}}{3}\right)$ *p. j.* $= 0$ *p. j.*$\Big]$

Úloha 6.26. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ strap stratégie v kladnom zisku, nech nastane ktorákoľvek z dvoch udalostí ovplyvňujúcich pohyb ceny podkladového aktíva. Určte K_{RN}, pre ktoré bude tento zisk riziko-neutrálny. Aká je hodnota ω tohto zisku?*

$\Big[$*Výsledok:* $\frac{880-720\mathrm{e}^{-0,05}}{8,5-7\mathrm{e}^{-0,05}}$ *p. j.* $< K <$ $\frac{360\mathrm{e}^{-0,05}-280}{3,5\mathrm{e}^{-0,05}-2,75}$ *p. j.*, $K_{RN} = \frac{320}{3}$ *p. j.*, $\omega = \left(\frac{80-80\mathrm{e}^{-0,05}}{3}\right)$ *p. j.*$\Big]$

Úloha 6.27. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K opcií tak, aby bol pre túto voľbu K držiteľ strap stratégie v nezápornom riziko-neutrálnom zisku pri investičnej*

alternatíve nákupu bezrizikových dlhopisov na obdobie T. Aký je tento zisk ω?
$\left[\text{Výsledok: } K = \frac{320}{3} \text{ p. j.}, \omega = \left(\frac{80\mathrm{e}^{-0{,}05} - 80\mathrm{e}^{-0{,}05}}{3}\right) \text{ p. j.} = 0 \text{ p. j.}\right]$

Úloha 6.28. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K^P put opcie a realizačnej ceny K^C ($> K^P$) call opcie tak, aby bol pre takto vybrané realizačné ceny držiteľ strangle stratégie v kladnom zisku, nech nastane ktorákoľvek z dvoch udalostí ovplyvňujúcich pohyb ceny podkladového aktíva. Určte K^C_{RN}, resp. K^P_{RN}, pre ktoré bude tento zisk riziko-neutrálny. Aká je hodnota ω tohto zisku?*
$\Big[$*Výsledok: pre* $K^P \in \left(80, \frac{580 - 480\mathrm{e}^{-0{,}05}}{6 - 5\mathrm{e}^{-0{,}05}}\right)$ *je* $f(K^P) < K^C < g(K^P)$, *kde* $f(K^P) = \frac{580 - 480\mathrm{e}^{-0{,}05}}{2{,}5 - 2\mathrm{e}^{-0{,}05}} + \frac{K^P\left(3\mathrm{e}^{-0{,}05} - 3{,}5\right)}{2{,}5 - 2\mathrm{e}^{-0{,}05}}$, $g(K^P) = \frac{480\mathrm{e}^{-0{,}05} - 380 - K^P\left(3 - 2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}05}\right)}{2\mathrm{e}^{-0{,}05} - 1{,}5}$, *pre* $K^P \in \left(\frac{580 - 480\mathrm{e}^{-0{,}05}}{6 - 5\mathrm{e}^{-0{,}05}}, \frac{480\mathrm{e}^{-0{,}05} - 380}{5\mathrm{e}^{-0{,}05} - 4}\right)$ *je* $K^P < K^C < g(K^P)$; *pre* $K^P_{RN} \in (80, 100)$ *je* $K^C_{RN} = 200 - K^P_{RN}$ *a* $\omega = \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}05}\right)\left(K^P - 80\right)\Big]$

Úloha 6.29. *Pri podmienkach z úlohy 6.21 určte rozsah voľby realizačnej ceny K^P put opcie a realizačnej ceny K^C call opcie tak, aby bol pre takto vybrané realizačné ceny držiteľ strangle stratégie v nezápornom riziko-neutrálnom zisku pri investičnej alternatíve nákupu bezrizikových dlhopisov na obdobie T. Aký je tento zisk ω?*
[*Výsledok: pre* $K^P \in (80, 100)$ *je* $K^C = 200 - K^P$, $\omega = 0$ *p. j.*]

Úloha 6.30. *Uvažujte opčnú stratégiu bull spread využívajúcu kúpu jednej call opcie s realizačnou cenou $K_1 = 90$ p. j. a predaj jednej call opcie s realizačnou cenou $K_2 = 110$ p. j., obe pre aktívum, dobu splatnosti a bezrizikovú úrokovú sadzbu definované v podmienkach úlohy 6.21. Rozhodnite, či je držiteľ tejto stratégie v zisku, ak nastala udalosť spôsobujúca nárast ceny aktíva na $S_H = 120$ p. j., resp. ak nastala udalosť spôsobujúca pokles ceny aktíva na $S_D = 80$ p. j. Ukážte, ako sa zisky/straty držiteľa strátegie zmenia, ak ju vytvorí nákupom európskej put opcie s realizačnou cenou K_1 p. j. a predajom európskej put opcie s realizačnou cenou K_2 p. j.*
[*Výsledok:* $\omega_H^{call} = 40\mathrm{e}^{-0{,}05} - 30 > 0$ *p. j.*, $\omega_D^{call} = 40\mathrm{e}^{-0{,}05} - 50 < 0$ *p. j.*, $\omega_H^{put} = 60\mathrm{e}^{-0{,}05} - 50 > 0$ *p. j.*, $\omega_D^{put} = 60\mathrm{e}^{-0{,}05} - 70 < 0$ *p. j.*]

Úloha 6.31. *Uvažujte opčnú stratégiu bull spread využívajúcu kúpu jednej call opcie s realizačnou cenou $K_1 = 90$ p. j. a predaj jednej call opcie s realizačnou cenou $K_2 = 110$ p. j., obe pre aktívum, dobu splatnosti a bezrizikovú úrokovú sadzbu definované v podmienkach úlohy 6.21. Rozhodnite, či je držiteľ tejto stratégie v zisku pri zohľadnení časovej hodnoty peňazí, ak nastala udalosť spôsobujúca nárast ceny aktíva na $S_H = 120$ p. j., resp. ak nastala udalosť spôsobujúca pokles ceny aktíva na $S_D = 80$ p. j. Ukážte, ako sa tieto zisky/straty držiteľa strátegie zmenia, ak ju vytvorí nákupom európskej put opcie s realizačnou cenou K_1 p. j. a predajom európskej put opcie s realizačnou cenou K_2 p. j.*
[*Výsledok:* $\omega_H^{call} = \omega_H^{put} = 60\mathrm{e}^{-0{,}05} - 50 > 0$ *p. j.*, $\omega_D^{call} = \omega_D^{put} = 40\mathrm{e}^{-0{,}05} - 50 < 0$ *p. j.*]

Úloha 6.32. *Uvažujte opčnú stratégiu bear spread využívajúcu kúpu jednej put opcie s realizačnou cenou $K_2 = 110$ p. j. a predaj jednej put opcie s realizačnou cenou $K_1 = 90$ p. j.,*

obe pre aktívum, dobu splatnosti a bezrizikovú úrokovú sadzbu definované v podmienkach úlohy 6.21. Rozhodnite, či je držiteľ tejto stratégie v zisku, ak nastala udalosť spôsobujúca nárast ceny aktíva na $S_H = 120$ p. j., resp. ak nastala udalosť spôsobujúca pokles ceny aktíva na $S_D = 80$ p. j. Ukážte, ako sa zisky/straty držiteľa stratégie zmenia, ak ju vytvorí nákupom európskej call opcie s realizačnou cenou K_2 p. j. a predajom európskej call opcie s realizačnou cenou K_1 p. j.
[*Výsledok:* $\omega_H^{put} = 50 - 60\mathrm{e}^{-0,05} < 0$ *p. j.*, $\omega_D^{put} = 70 - 60\mathrm{e}^{-0,05} > 0$ *p. j.*, $\omega_H^{call} = 30 - 40\mathrm{e}^{-0,05} < 0$ *p. j.*, $\omega_D^{call} = 50 - 40\mathrm{e}^{-0,05} > 0$ *p. j.*]

Úloha 6.33. *Uvažujte opčnú stratégiu bear spread využívajúcu kúpu jednej put opcie s realizačnou cenou $K_2 = 110$ p. j. a predaj jednej put opcie s realizačnou cenou $K_1 = 90$ p. j., obe pre aktívum, dobu splatnosti a bezrizikovú úrokovú sadzbu definované v podmienkach úlohy 6.21. Rozhodnite, či je držiteľ tejto stratégie v zisku pri zohľadnení časovej hodnoty peňazí, ak nastala udalosť spôsobujúca nárast ceny aktíva na $S_H = 120$ p. j., resp. ak nastala udalosť spôsobujúca pokles ceny aktíva na $S_D = 80$ p. j. Ukážte, ako sa tieto zisky/straty držiteľa stratégie zmenia, ak ju vytvorí nákupom európskej call opcie s realizačnou cenou K_2 p. j. a predajom európskej call opcie s realizačnou cenou K_1 p. j.*
[*Výsledok:* $\omega_H^{put} = \omega_H^{call} = 50 - 60\mathrm{e}^{-0,05} < 0$*p. j.*, $\omega_D^{put} = \omega_D^{call} = 50 - 40\mathrm{e}^{-0,05} > 0$ *p. j.*]

Úloha 6.34. *Uvažujte opčnú stratégiu butterfly spread využívajúcu kúpu call opcie s realizačnou cenou $K_1 = 90$ p. j., kúpu call opcie s realizačnou cenou $K_3 = 110$ p. j. a predaj dvoch call opcií s realizačnou cenou $K_2 = 100$ p. j., všetky pre aktívum, dobu splatnosti a bezrizikovú úrokovú sadzbu definované v podmienkach úlohy 6.21. Rozhodnite, či je držiteľ tejto stratégie v zisku, ak nastala udalosť spôsobujúca nárast ceny aktíva na $S_H = 120$ p. j., resp. ak nastala udalosť spôsobujúca pokles ceny aktíva na $S_D = 80$ p. j. Ukážte, ako sa zisky/straty držiteľa stratégie zmenia, ak ju vytvorí zodpovedajúcim spôsobom z put opcií.*
[*Výsledok:* $\omega_H^{call} = \omega_D^{call} = \omega_H^{put} = \omega_D^{put} = 0$ *p. j.*]

Literatúra

[1] VLACHYNSKÝ, K. a kolektív: Podnikové financie, vysokoškolská učebnica, *SÚVAHA, spol. s.r.o.* (1999), ISSN 1335-2024

[2] KRÁĽOVIČ, J., VLACHYNSKÝ, K.: Finančný manažment, *Iura Edition* (2006), ISBN 80-80780-42-0

[3] KOMORNÍK, J.: Základy finančného manažmentu, vysokoškolská učebnica (elektronické skriptá), *Univerzita Komenského Bratislava* (2004)

[4] ŠEVČOVIČ, D.: Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives, *Lectures on Computational Finance*, vysokoškolský učebný text, *FMFI UK* (2011); dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta.html (stav zo 17.1.2022)

[5] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, *STU v Bratislave* (2009), ISBN 978–80–227–3014–3; dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta.html (stav z 5.12.2022)

[6] HULL, J.: Options, Futures, And Other Derivatives, *Prentice Hall* (2012), ISBN 978-0-273-75907-2

[7] BAXTER, M., RENNIE, A.: Financial Calculus, An introduction to derivative pricing, *Cambridge University Press* (1996), ISBN 978-0-521-55289-9

[8] BAYE, M.: Managerial Economics and Business Strategy, *McGraw-Hill* (2009), ISBN 978-0073375960

[9] PINDYCK, R, RUBINFELD, D.: Microeconomics, *Pearson Series in Economics* (2017), ISBN 978-0134184241

[10] BLANCHARD, O.: Macroeconomics, *Pearson* (2011), ISBN 978-0-13-038771-4

[11] ROMER, D.: Advanced Macroeconomics, *McGraw-Hill* (2012), ISBN 978-0-07-351137-5

[12] CHANG, Fwu-Ranq: Stochastic Optimization in Continuous Time, *Cambridge University Press* (2004), ISBN 978-0521834063

[13] SHREVE, S.: Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, *Springer* (2004), ISBN 978-0-387-40100-3

[14] SHREVE, S.: Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, *Springer* (2004), ISBN 978-0-387-40101-0

[15] JANKOVÁ, K., KILIANOVÁ, S., BRUNOVSKÝ, P., BOKES, P.: Markovove reťazce a ich aplikácie, *Epos* (2015), ISBN 978-80-562-0075-9

[16] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V.: Kapitoly z finančnej matematiky, *Epos* (2005), ISBN 80-8057-651-3

[17] BREALEY, R., MYERS, S.: Principles of Corporate Finance, *McGraw-Hill* (1991), ISBN 0-07-007405-4

[18] LUENBERGER, D.: Investment Science, *Oxford University Press Inc.* (1997), ISBN 978-0195108095

[19] ROSA, S., HARMAN, R.: Maticová algebra pre štatistiku a dátovú vedu, *Knižničné a edičné centrum FMFI UK* (2022), ISBN 978-80-8147-109-4; dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta.html (stav z 18.10.2022)

[20] ZVÁRA, K., ŠTEPÁN, J.: Pravděpodobnost a matematická statistika, *MATFYZPRESS - Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy* (1997), ISBN 80-85863-24-3

[21] MARKOWITZ, H.: Portfolio Selection, *Journal of Finance* **7/1**, 77-91 (1952)

[22] ROSS, S.: Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory* **13/3**, 331-360 (1976), ISSN 0022-0531

[23] COX, J. C., ROSS, S. A., RUBINSTEIN, M.: Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* **7**, 229-264 (1979), ISSN 0304-405X

[24] WONG, H. Y., KWOK, Y. K.: Sub-replication and Replenishing Premium: Efficient Pricing of multi-state Lookbacks, *Review of Derivatives Research* **6**, 83-106 (2003), ISSN 1380-6645

[25] WOLFE, P.: The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica* **27/3**, 382-398 (1959)

[26] Oficiálna webstránka Národnej banky Slovenska: https://www.nbs.sk/

[27] Oficiálna webstránka Burzy cenných papierov v Bratislave: http://www.bsse.sk/ (stav z 27.9.2021)

[28] Oficiálna webstránka spoločnosti Slovak Banking Credit Bureau (SBCB) s. r. o.: http://www.sbcb.sk/ (údaj z 18.11.2022)

[29] Oficiálna webstránka Európskej centrálnej banky: https://www.ecb.europa.eu/ (údaj zo 14.10.2021)

[30] Oficiálna webstránka Európskej centrálnej banky: https://www.ecb.europa.eu/ (údaj zo 16.11.2022)

[31] Webstránka spoločnosti Yahoo! poskytujúca finančné informácie: https://finance.yahoo.com/

[32] Obrázok je výstupom programu napísaného v prostredí MATLAB verzie R2021a od spoločnosti The MathWorks, Inc. v čase písania diela (roky 2021-2022) využívajúceho univerzitnú licenciu Total Academic Headcount (TAH) pre Slovenskú technickú univerzitu v Bratislave: https://www.mathworks.com/academia/tah-portal/stu-31232627.html (stav z 22.11.2022)

[33] Názvy osí v obrázku sú výsledkom spracovania pomocou desktopovej aplikácie ©2023 Microsoft Skicár patriacej pod operačný systém Windows (11 Education) od spoločnosti Microsoft Corporation v čase finálnych úprav obrázkov v diele (2024) využívajúceho univerzitnú licenciu *Microsoft 365 A3 for faculty* pre Slovenskú technickú univerzitu v Bratislave.

Register

Mgr. Michal Zákopčan, PhD.

ZÁKLADY FINANČNÍCTVA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2024.

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 268 strán, 35 obrázkov, 43 tabuliek, 15,334 AH, 15,748 VH, 1. vydanie, edičné číslo 6194.

85 – 212 – 2024

ISBN 978-80-227-5413-2