

FINANČNÉ DERIVÁTY A ICH OCEŇOVANIE

Oceňovanie európskych a amerických opcií

Základy finančníctva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

OCEŇOVANIE DERIVÁTOV

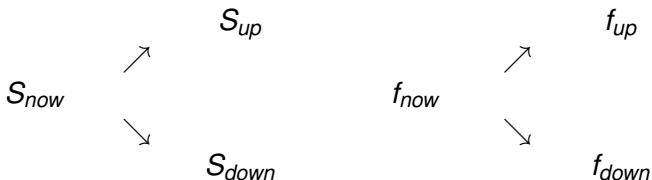
- oceňujeme podľa nasledujúcej schémy vývoja hodnoty podkladového aktíva a hodnoty derivátu:

Hodnota
aktíva
v čase 0

Hodnota
aktíva
v čase T

Hodnota
derivátu
v čase 0

Hodnota
derivátu
v čase T



- kde "skok hore" sa udeje s pp. p a "skok dole" s pp. $1 - p$,
- uvažujeme obdobie dĺžky T od času 0 (napr. dnes) po čas T a konštantnú úrokovú sadzbu R na toto obdobie; tzn. 1 p.j. za toto obdobie prinesie držiteľovi dlhopisu e^{RT} p.j.,
- za predpokladu, že: $S_{down} < S_{now} \leq S_{now}e^{RT} < S_{up}$.

OCEŇOVANIE DERIVÁTOV

- S využitím predchádzajúcej schémy a predpokladov oceňovania spolu so zapojením bezarbitrážneho princípu prídeme k vzťahu:

$$f_{now} = e^{-RT} (qf_{up} + (1 - q)f_{down}), \quad (1)$$

kde $q = \frac{S_{now}e^{RT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}$ je riziko-neutrálna pravdepodobnosť.

KÚPNA OPCIA

- Uvažujme európsky typ kúpnej opcie na akciu bez dividend a oceňme ju jedнокrokovým modelom oceňovania na binárnom strome, kde cena akcie v čase 0 S_{now} môže za čas T skočiť na S_{up} alebo na S_{down} s určitou pp.
- Hodnota opcie v čase T pri nastaní udalosti cena akcie vzrástla na S_{up} : $f_{up} = \max(0, S_{up} - K)$.
- Hodnota opcie v čase T pri nastaní udalosti cena akcie poklesla na S_{down} : $f_{down} = \max(0, S_{down} - K)$.
- Využijúc (1) dostávame:

$$f_{now} = e^{-RT} (q \max(0, S_{up} - K) + (1 - q) \max(0, S_{down} - K)). \quad (2)$$

KÚPNA OPCIA

- Ak $K \geq S_{up}$, tak $f_{now} = 0$, pretože $f_{up} = 0 = f_{down}$.
- Ak $S_{down} \leq K < S_{up}$, tak $f_{now} = e^{-RT} (q(S_{up} - K))$, pretože $f_{down} = 0$ a $f_{up} = S_{up} - K > 0$.
- Ak $K < S_{down}$, tak $f_{now} = e^{-RT} (q(S_{up} - K) + (1 - q)(S_{down} - K)) = S_{now} - Ke^{-RT}$, pretože $f_{down} = S_{down} - K > 0$ a $f_{up} = S_{up} - K > 0$.
- Uvažovať $K < S_{down}$, resp. $K \geq S_{up}$ je možnosť skôr hypotetická a hoci ju z teórie nemožno vylúčiť, v praxi by sa pri rovnakých očakávaniach investorov pravdepodobne nemala príležitosť vyskytnúť.

PREDAJNÁ OPCIA

- Uvažujme európsky typ predajnej opcie na akciu bez dividend a oceňme ju jednokrokovým modelom oceňovania na binárnom strome.
- Hodnota opcie v čase T pri nastaní udalosti cena akcie vzrástla na S_{up} : $f_{up} = \max(0, K - S_{up})$.
- Hodnota opcie v čase T pri nastaní udalosti cena akcie poklesla na S_{down} : $f_{down} = \max(0, K - S_{down})$.
- Využijúc (1) dostávame:

$$f_{now} = e^{-RT} (q \max(0, K - S_{up}) + (1 - q) \max(0, K - S_{down})) .$$

(3)

PREDAJNÁ OPCIA

- Ak $K \leq S_{down}$, tak $f_{now} = 0$, pretože $f_{up} = 0 = f_{down}$.
- Ak $S_{down} < K \leq S_{up}$, tak $f_{now} = e^{-RT} ((1 - q)(K - S_{down}))$, pretože $f_{up} = 0$ a $f_{down} = K - S_{down} > 0$.
- Ak $K > S_{up}$, tak $f_{now} = e^{-RT} (q(K - S_{up}) + (1 - q)(K - S_{down})) = Ke^{-RT} - S_{now}$, pretože $f_{down} = K - S_{down} > 0$ a $f_{up} = K - S_{up} > 0$.
- Aj v tomto prípade, podobne ako pri kúpnych opciach platí, že uvažovať $K > S_{up}$, resp. $K \leq S_{down}$ je možnosť skôr hypotetická a hoci ju z teórie nemožno vylúčiť, v praxi by sa pri rovnakých očakávaniach investorov pravdepodobne nemala príležitosť vyskytnúť.

PRÍKLAD

- Na princípe žiadna arbitráž oceňte európsku kúpnu opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $T = 1$ rok, ak $S_{now} = 20$ p.j., $S_{up} = 28$ p.j., $S_{down} = 16$ p.j., $K = 22$ p.j. a bezriziková úroková sadzba na obdobie T je $R = \ln(1,05)$.

Riešenie:

Pretože $S_{down} < K < S_{up}$, tak $f_{up} = S_{up} - K = 28 - 22 = 6$ p.j. a $f_{down} = 0$. Vypočítajme riziko-neutrálnu pravdepodobnosť:

$$q = \frac{S_{now}e^{RT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{21 - 16}{28 - 16} = \frac{5}{12}.$$

Potom

$$f_{now} = e^{-RT} (qf_{up} + (1 - q)0) = \frac{20}{21} \frac{5}{12} 6 = \frac{50}{21} \doteq 2,38.$$

PRÍKLAD

- Na princípe žiadna arbitráž oceňte európsku predajnú opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $T = 1$ rok, ak $S_{now} = 20$ p.j., $S_{up} = 28$ p.j., $S_{down} = 16$ p.j., $K = 22$ p.j. a bezriziková úroková sadzba na obdobie T je $R = \ln(1,05)$.

Riešenie:

Pretože $S_{down} < K < S_{up}$, tak

$f_{down} = K - S_{down} = 22 - 16 = 6$ p.j. a $f_{up} = 0$.

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je: $q = \frac{5}{12}$, z čoho

$$1 - q = \frac{7}{12}.$$

Hodnota put opcie bude:

$$f_{now} = e^{-RT} (q \cdot 0 + (1 - q) f_{down}) = \frac{20}{21} \cdot \frac{7}{12} \cdot 6 = \frac{10}{3} \doteq 3,33.$$

DVOJKROKOVÝ MODEL

Hodnota aktíva
(derivátu)
v čase 0

Hodnota aktíva
(derivátu)
v čase ΔT

Hodnota aktíva
(derivátu)
v čase $2\Delta T$

$S_0(f_0)$



$S_2(f_2)$

$S_1(f_1)$



$S_{22}(f_{22})$

$S_{21}(f_{21})$

$S_{12}(f_{12})$

$S_{11}(f_{11})$

DVOJKROKOVÝ MODEL

- V tomto prípade nastáva pohyb ceny podkladového aktíva v dvoch ekvidistantných obdobiach pri rovnakej úrokovej sadzbe R ,
- teda aj derivát musíme ohodnocovať v dvoch krokoch:
- vyčíslime postupne hodnoty derivátu v koncových uzloch, vrátíme sa o krok späť a vypočítame hodnoty derivátu po prvom kroku,
- výpočet finalizujeme vyčíslením počiatočnej hodnoty f_0 derivátu s využitím vypočítaných hodnôt derivátu po prvom kroku.
- Za tým účelom v každej časti binárneho stromu (skupina troch uzlov) vypočítame riziko-neutrálnu pravdepodobnosť využívajúc pri tom vzťah $q = \frac{S_{now}e^{R\Delta T} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}$.

DVOJKROKOVÝ MODEL

- V rámci tohto stromu možno vypočítať tri riziko-neutrálne pravdepodobnosti:
 - na časti stromu tvorenej skupinou uzlov, v ktorých sa nachádzajú f_2 , f_{21} a f_{22} - pp. $q_2 = \frac{S_2 e^{r\Delta T} - S_{21}}{S_{22} - S_{21}}$,
 - na časti stromu tvorenej skupinou uzlov, v ktorých sa nachádzajú f_1 , f_{11} a f_{12} - pp. $q_1 = \frac{S_1 e^{r\Delta T} - S_{11}}{S_{12} - S_{11}}$,
 - na časti stromu tvorenej skupinou uzlov, v ktorých sa nachádzajú f_0 , f_1 a f_2 - pp. $q_0 = \frac{S_0 e^{r\Delta T} - S_1}{S_2 - S_1}$.
- S ich využitím dostaneme:

$$f_2 = e^{-r\Delta T} (q_2 f_{22} + (1 - q_2) f_{21}) \quad (4)$$

$$f_1 = e^{-r\Delta T} (q_1 f_{12} + (1 - q_1) f_{11}) \quad (5)$$

$$f_0 = e^{-r\Delta T} (q_0 f_2 + (1 - q_0) f_1) \quad (6)$$

DVOJKROKOVÝ MODEL

- Označme:

$$\begin{aligned} E_Q(f) = & q_0 q_2 f_{22} + q_0 (1 - q_2) f_{21} + \\ & + (1 - q_0) q_1 f_{12} + (1 - q_0) (1 - q_1) f_{11} \end{aligned}$$

- $E_Q(f)$ teda reprezentuje strednú (očakávanú) hodnotu derivátu pri riziko-neutrálnych pravdepodobnostiach.
- Dosadením (4) a (5) do (6) získame:

$$f_0 = e^{-2R\Delta T} E_Q(f),$$

kde $T = 2\Delta T$ je doba splatnosti derivátu.

- Keďže $P(0, T) = e^{-RT}$ je hodnota diskontného dlhopisu na obdobie T pri spojitom úrokovaní a nominálnej úrokovej sadzbe R , tak:

$$f_0 = E_Q(P(0, T)f).$$

VIACKROKOVÝ MODEL

- Ak uvažujeme časové obdobie dĺžky $T = n\Delta T$, kde n - označuje počet období dĺžky ΔT , v ktorých dochádza k vetveniu binárneho stromu, tak počet koncových uzlov bude 2^n .
- Hodnotu derivátu budeme potom počítať spätne cez jednotlivé uzly pomocou riziko-neutrálnych pravdepodobností a vzťahu (1):

$$f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down}).$$

- Teda na výpočet hodnoty derivátu v uzle, v ktorom nastáva vetvenie stromu, použijeme hodnoty derivátu v uzloch po ňom nasledujúcich.
- Hodnota derivátu v čase 0 potom bude:

$$f_0 = E_Q(P(0, T)f).$$

PRÍKLAD

- Nech $R = 0$; uvažujme európsku kúpnu opciu s $K = 100$ p.j. na akciu, ktorej hodnoty sú vyjadrené v tabuľke.

dnes(0)	T	2T	3T
			160
		140	
	120		120
100		100	
	80		80
		60	
			40

- Na princípe žiadna arbitráž vypočítajte súčasnú hodnotu opcie.

PRÍKLAD

- Hodnoty opcie sú zatiaľ známe len na konci obdobia (posledný stĺpec tabuľky).
- Ostatné hodnoty je potrebné spätne dopočítať; napr. vypočítajme najprv hodnotu opcie v uzle v tabuľke označenom ako X.

dnes(0)	T	2T	3T
			60
		X	
	?		20
?		?	
	?		0
		?	
			0

PRÍKLAD

- Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je na celom strome rovnaká:

$$q = \frac{S_{now}e^{R\Delta T} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_{now} - (S_{now} - 20)}{S_{now} + 20 - (S_{now} - 20)} = \frac{1}{2}.$$

- Keďže $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, hodnota opcie v uzle X bude:

$$X = \frac{1}{2} (60 + 20) = 40.$$

- V každom uzle (až na koncové) bude hodnota derivátu jednoducho:

$$f_{now} = \frac{1}{2} (f_{up} + f_{down}).$$

- Vypočítané hodnoty opcie môžete nájsť v nasledujúcej tabuľke:

PRÍKLAD

dnes(0)	T	2T	3T
			60
		40	
	25		20
15		10	
	5		0
		0	
			0

- Keďže úlohou bolo nájsť hodnotu opcie dnes, tj. oceniť opciu na princípe žiadna arbitráž, tak hľadaná cena takejto kúpnej opcie je 15 p.j.

EURÓPSKE OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Ako sme mohli vidieť v predchádzajúcom, hodnota európskej call a put opcie na isté podkladové aktívum závisí od toho, ako modelujeme vývoj ceny aktíva na binárnom strome a od toho, koľko stupňov vetvenia sa na strome nachádza. Čím je model bližšie realite (čo nevyhnutne nemusí znamenať vyšší počet časových krokov), tým presnejšie sme schopní určiť cenu derivátu, špeciálne opcie. Pochopiteľne, čím je doba splatnosti opcie dlhšia, tým väčšie odchýlky od skutočnej ceny opcie môžu vzniknúť. Tieto odchýlky sú spojené jednak s modelovaním vývoja ceny podkladového aktíva, pretože čím dlhšia je doba splatnosti, tým nepresnejšie budeme určovať pohyb ceny aktíva v časoch vzdialenejších od súčasnosti. Podobne však je na dĺžku doby splatnosti citlivá úroková sadzba a predpoklad jej konštantnosti počas príveľmi dlhého obdobia nie je možné naplniť. Ďalšie nepresnosti teda môžu vzniknúť v spojení so zmenami úrokových sadzieb.

EURÓPSKE CALL A PUT OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Ak sa oprostíme od možných komplikácií popísaných vyššie a budeme vývoj ceny podkladového aktíva považovať za daný a bezrizikovú úrokovú sadzbu na toto obdobie za fixovanú na určitej konštantnej výške, tak jediným určujúcim faktorom, ktorý bude vplývať na cenu európskej opcie so zvolenou maturitou T , bude výška strike price K , tj. realizačnej ceny.
- Výška K v čase splatnosti opcie rozhodne o tom, či má opcia v tom čase nejakú hodnotu a teda, či sa oplatí ju realizovať. Pretože hodnota európskej call opcie v čase T závisí od rozdielu $S_T - K$, dá sa očakávať, že jej hodnota v čase 0 bude tým vyššia, čím je K nižšie. Pri put opciách je situácia opačná a preto sa dá očakávať, že čím väčšie bude K , tým aj hodnota put opcie v čase 0 bude vyššia.

EURÓPSKE OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Zhrňme predchádzajúce úvahy do tvrdenia.
- Nech $0 \leq K_1$ je realizačná cena call (put) opcie európskeho typu na akciu bez dividend a s danou dobou splatnosti T , počas ktorej je bezriziková úroková sadzba R konštantná. Označme hodnotu takejto opcie ako C_1 (P_1). Nech $K_2 > K_1$ je iná realizačná cena takejto opcie. Cenu call (put) opcie s realizačnou cenou K_2 označme C_2 (P_2). Potom za predpokladu bezarbitrážneho oceňovania platí:

$$C_1 \geq C_2 \quad (P_1 \leq P_2).$$

- Pri oceňovaní opcií na binárnych stromoch si stačí uvedomiť, že tým väčšie množstvo koncových uzlov stromu je nenulových (kladných), čím menšie je K pri call opciach, resp. čím väčšie je K pri put opciach. Viac nenulových koncových uzlov induktívne vedie k vyšším hodnotám opcie vo všetkých predchádzajúcich časových krokoch a teda aj k vyššej hodnote opcie v čase 0.

EURÓPSKE CALL A PUT OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Predchádzajúce tvrdenie však možno ľahko ukázať aj bez použitia binárneho stromu na modelovanie vývoja ceny podkladovej akcie.
- Ukážeme to pre call opcie (dôkaz pre put opcie analogicky): Ponechajme označenia ako v predchádzajúcom, tj. nech $K_2 > K_1$ a chceme ukázať, že $C_1 \geq C_2$.
- Nech by to nebola pravda, tj. predpokladajme $C_1 < C_2$. Nakúpme 1 call opciu s realizačnou cenou K_1 a predajme 1 call opciu s realizačnou cenou K_2 . Pretože podľa predpokladu je $C_1 < C_2$, v čase 0 je takto možné zarobiť $0 < C_2 - C_1$ p.j.
- Nech S_T označuje cenu podkladovej akcie v čase splatnosti opcií T .

EURÓPSKE CALL A PUT OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Ak v čase T je $S_T \leq K_1$, žiadnu z opcií sa neoplatí realizovať a obe majú nulovú hodnotu.
- Ak $K_1 < S_T \leq K_2$, tak nami zakúpená opcia má nenulovú hodnotu $S_T - K_1$, kým opcia s realizačnou cenou K_2 má nulovú hodnotu.
- Konečne, ak $S_T > K_2$, tak obe opcie majú nenulovú hodnotu, ale nami zakúpená opcia ju má vyššiu: $S_T - K_1 > S_T - K_2$.
- Inými slovami vznikla arbitrážna príležitosť.
- Aby sme oceňovali bez arbitráže, musí platiť $C_1 \geq C_2$.

PUT-CALL PARITA

- Majme európsku call a put opciu na to isté podkladové aktívum (napr. akcia) s rovnakou maturitou T a rovnakou realizačnou cenou K ,
- nech R označuje úrokovú sadzbu na obdobie T , konštantnú počas tohto obdobia,
- označujme hodnoty aktíva v čase t ako S_t , hodnoty put opcie v čase t ako P_t a hodnoty call opcie v čase t ako C_t .
- Vezmime portfólio: 1 akcia + 1 put opcia – 1 call opcia.
- V čase maturity opcií T je hodnota portfólia:

$$S_T + P_T - C_T = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = K,$$

- kde symbol $()^+$ znamená: $(x)^+ = \max\{0, x\}$.
- Z toho vyplýva (princíp: žiadna arbitráž), že hodnota portfólia v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ bude:

$$S_t + P_t - C_t = Ke^{-R(T-t)}. \quad (7)$$

PUT-CALL PARITA

- Zo vzťahu (7) dostávame pre $t = 0$:

$$S_0 + P_0 - C_0 = Ke^{-RT}. \quad (8)$$

- Odtiaľ:

$$P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-RT}, \quad (9)$$

- resp.:

$$C_0 = P_0 + S_0 - Ke^{-RT}. \quad (10)$$

- Vidíme, že ak poznáme hodnotu call opcie, put-call parita nám umožňuje zistiť hodnotu príslušnej put opcie (vzťah (9)) bez nutnosti počítania na binárnom strome a opačne (vzťah (10)).

PUT-CALL PARITA

- Overíme platnosť put-call parity na príklade výpočtu ceny put a call opcie na akciu bez dividend s dobou splatnosti $T = 1$ rok v jednokrokovom modeli, ak $S_{now} = 20$ p.j., $S_{up} = 28$ p.j., $S_{down} = 16$ p.j., $K = 22$ p.j. a bezriziková úroková sadzba na obdobie T je $R = \ln(1,05)$.
- Pamätáme si, že hodnota C_{now} (C_0) call opcie vyšla rovná $\frac{50}{21} \doteq 2,38$ a hodnota P_{now} (P_0) put opcie bola $\frac{10}{3} \doteq 3,33$.
- Keďže $S_{now} = S_0 = 20$ a $Ke^{-RT} = \frac{22}{1,05} = \frac{440}{21}$, dosadením do (8) získame:

$$S_0 + P_0 - C_0 = 20 + \frac{10}{3} - \frac{50}{21} = \frac{440}{21} = Ke^{-RT}.$$

AMERICKÉ OPCIE

- Keďže pri amerických opciach je možnosť uplatniť opciu do času jej vypršania, dá sa predpokladať, že ich cena bude vyššia alebo aspoň rovnaká ako cena ich európskych ekvivalentov, tj. opcií na to isté aktívum, s tou istou dobou splatnosti a rovnakou realizačnou cenou.
- Ak označíme hodnotu americkej call opcie C_A a európskej call opcie C_E , tak sa dá očakávať, že $C_A \geq C_E$, resp. ak označíme hodnotu americkej put opcie P_A a európskej put opcie P_E , tak $P_A \geq P_E$.

AMERICKÁ CALL OPCIA NA AKCIU BEZ DIVIDEND

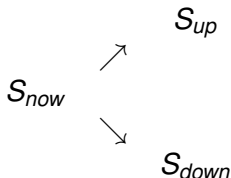
- Ukážeme, že pre americkú call opciu na akciu bez dividend platí $C_A = C_E$.
- Uvažujme dve portfólia: **A**: americká call opcia na akciu bez dividend so strike price K a maturitou $T + K$ kusov diskontných dlhopisov (vlastník portfólia je držiteľom opcie a šetrí na strike price), **B**: samotná akcia bez dividend (vlastník portfólia je majiteľom podkladovej akcie).
- Nech $R > 0$, hodnoty portfólií v čase $0 \leq t \leq T$ sú:
$$\mathbf{A}: C_A(t) + Ke^{-R(T-t)}, \quad \mathbf{B}: S_t,$$
kde $C_A(t)$ je hodnota americkej call opcie na akciu bez dividend v čase t a S_t je hodnota akcie v čase t .
- Ak v čase $t < T$ je opcia zrealizovaná, tak hodnota portfólia **A** je $S_t - K + Ke^{-R(T-t)} < S_t$,
- ak je zrealizovaná až v čase T , tak hodnota portfólia **A** je $(S_T - K)^+ + K = \max\{S_T, K\}$, čo je viac alebo rovné hodnote portfólia **B** v tomto čase: S_T .

AMERICKÁ CALL OPCIA NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Hodnota portfólia **A** musí byť v každom čase $\geq$ než hodnota portfólia **B**, lebo inak by vznikla arbitráž; konkrétne ak by hodnota portfólia **A** bola menšia než hodnota portfólia **B** v nejakom čase $t_0 < T$, tak by bolo možné predat' akciu za S_{t_0} (portfólio **B**) a kúpiť portfólio **A** s kladným ziskom, následne počkať do konca, uplatniť opciu a kúpiť akciu za naštrenú sumu K (ak $S_T - K > 0$) alebo neuplatniť opciu a kúpiť akciu za S_T (ak $S_T \leq K$); tak či tak je arbitrážér na konci splatnosti opcie držiteľom akcie v hodnote S_T (čo by mal aj v prípade držby portfólia **B**), ale popritom získal v čase t_0 nejaké peniaze navyše.
- Situácia **B** > **A** teda nemôže nastať a oplatí sa počkať do konca (realizáciou tratíme hodnotu).
- Dôsledkom predchádzajúcich úvah je, že $C_A(t) = C_E(t)$ v každom čase $0 \leq t \leq T$ a pre americké call opcie na akciu bez dividend platia rovnaké vzorce ako pre európske call opcie.

OCEŇOVANIE AMERICKÝCH PUT OPCÍ

- Uvažujme oceňovanie pomocou binárneho stromu:



- Vieme, že pre európsku opciu na akciu bez dividend s maturitou T a strike price K máme $P_E = E_Q (P(0, T)(K - S_T)^+)$, kde $P(0, T) = e^{-RT}$ - hodnota diskontného dlhopisu na obdobie T pri konštantnej úrokovej sadzbe R , S_T - hodnota aktíva (napr. akcie) v čase T (v tomto prípade buď S_{up} alebo S_{down}).
- Pre americkú opciu s maturitou T a strike price K platí:

$$P_A = \max\{(K - S_0)^+, E_Q (P(0, T)(K - S_T)^+)\},$$

- kde S_0 - hodnota akcie v čase 0 (v tomto prípade S_{now}).

OCEŇOVANIE AMERICKÝCH PUT OPCÍ NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Keby niekto ponúkal opciu lacnejšie než je

$$\max\{(K - S_0)^+, E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)\},$$

investor kúpi a buď:

1. okamžite zrealizuje so ziskom
(ak $(K - S_0)^+ > E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)$)
alebo
2. predá replikačné portfólio (portfólio, ktoré nahrádza opciu)
(ak $(K - S_0)^+ \leq E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)$); z čoho má
kladný zisk, lebo hodnota tohto portfólia je väčšia než cena
opcie.

OCEŇOVANIE AMERICKÝCH PUT OPCÍ NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Keby niekto chcel kúpiť opciu za drahšie než je

$$\max\{(K - S_0)^+, E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)\},$$

investor predá a buď:

1. má kladný zisk pri okamžitej realizácii opcie protistranou, tj. v prípade, že $(K - S_0)^+ > E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)$ (musí síce kúpiť akciu za dohodnutú cenu K vyššiu než S_0 , ale opciu predal za cenu vyššiu než je rozdiel $K - S_0$) alebo
2. kúpi replikačné portfólio (v prípade, že $(K - S_0)^+ \leq E_Q(P(0, T)(K - S_T)^+)$), ktoré má však nižšiu hodnotu ako ponúkaná cena opcie (má preto kladný zisk).

VIACKROKOVÝ MODEL

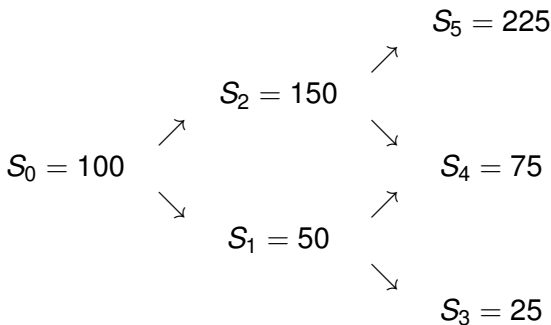
- V prípade binárneho stromu s viacnásobným vetvením budeme v každom uzle (až na koncové) počítat hodnotu americkej put opcie na akciu bez dividend ako:

$$\max\{(K - S_{now})^+, e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})\},$$

- kde $q = \frac{S_{now}e^{R\Delta T} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}$ je riziko-neutrálna pravdepodobnosť na príslušnej vetve stromu.
- Poznámka: algoritmus funguje aj pre americké call opcie s tým rozdielom, že v každom uzle sa vyberá maximum z čísel $(S_{now} - K)^+$ a $e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$.

PRÍKLAD

- Uvažujme americkú put opciu s $K = 100$ p.j. na akciu, ktorej hodnoty sú vyjadrené na binárnom strome:



- kde $\Delta T = 1$ a teda $T = 2$. Nech $R = 0,1$ na obdobie ΔT je úroková sadzba rovnaká v prvom aj druhom období.
- Na princípe žiadna arbitráž vypočítajte súčasnú hodnotu opcie.

PRÍKLAD

- Pretože na celom strome platí $S_{up} = 1,5S_{now}$ a $S_{down} = 0,5S_{now}$, tak na celom strome bude rovnaká riziko-neutrálna pravdepodobnosť:

$$q = \frac{S_{now}e^{R\Delta T} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_{now}e^{0,1} - 0,5S_{now}}{1,5S_{now} - 0,5S_{now}} = e^{0,1} - 0,5.$$

- Hodnota put opcie v koncových uzloch bude:

$f_3 = 75$ p.j. v uzle 3,

$f_4 = 25$ p.j. v uzle 4,

$f_5 = 0$ p.j. v uzle 5.

- Vypočítajme postupne hodnotu opcie v uzloch 2, 1 a 0:

PRÍKLAD

- Hodnota put opcie v uzle 2 bude:

$$\begin{aligned}f_2 &= \max \left\{ (100 - 150)^+, e^{-0,1} \left((e^{0,1} - 0,5)0 + (1,5 - e^{0,1})25 \right) \right\} \\&= \max \{ 0; 37,5e^{-0,1} - 25 \} \doteq 8,931\end{aligned}$$

- Hodnota put opcie v uzle 1 bude:

$$\begin{aligned}f_1 &= \max \left\{ (100 - 50)^+, e^{-0,1} \left((e^{0,1} - 0,5)25 + (1,5 - e^{0,1})75 \right) \right\} \\&= \max \{ 50; 100e^{-0,1} - 50 \} = 50\end{aligned}$$

- Hodnota put opcie v uzle 0 bude:

$$\begin{aligned}f_0 &= \max \left\{ (100 - 100)^+, e^{-0,1} \left((e^{0,1} - 0,5)f_2 + (1,5 - e^{0,1})f_1 \right) \right\} \\&= \max \{ 0; 125e^{-0,1} - 75 - 18,75e^{-0,2} \} \doteq 22,753\end{aligned}$$

PRÍKLAD

- Teda súčasná hodnota americkej put opcie je približne 22, 753 príslušných p.j.
- Ak každé vetvenie na strome nastáva s pp. $p = \frac{1}{2}$, intuitívne by sa mal rizikoaverzný investor zamerať na realizáciu opcie v uzle 1 (ak sa doňho cena akcie dostane), v ktorom mu opcia prináša najväčšiu, v danom okamihu istú, výplatu 50 p.j. oproti neistote plynúcej z držby opcie ďalšie obdobie a hrozby poklesu jej hodnoty na 25 p.j., resp. na $25e^{-0,1}$ p.j. pri zohľadnení úrokovej miery.
- Pre porovnanie hodnota európskej opcie na túto akciu je v čase 0 rovná:

$$25 - 125e^{-0,1} + 131,25e^{-0,2} \doteq 19,354 \text{ p.j.}$$

PUT-CALL PARITA PRE AMERICKÉ OPCIE NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Majme americkú call a put opciu na akciu bez dividend s rovnakou maturitou T a rovnakou realizačnou cenou K .
- Vieme, že pri európskych opciach na takúto akciu platí:
 $S_t + P_E(t) - C_E(t) = Ke^{-R(T-t)}$ pre každé $t \in \langle 0, T \rangle$.
- Keďže $C_E(t) = C_A(t)$, tak: $S_t + P_E(t) - C_A(t) = Ke^{-R(T-t)}$.
- Keďže $P_E(t) \leq P_A(t)$, tak: $S_t + P_A(t) - C_A(t) \geq Ke^{-R(T-t)}$.
- Ak počkáme s realizáciou opcií do času T , tak
 $S_T + P_A(T) - C_A(T) = K$.
- Ak zrealizujeme put opciu v čase $0 \leq t < T$ (pretože sa neoplatí realizovať call opciu skôr ako v čase T), potom:
 $S_t + K - S_t - C_A(t) = K - C_E(t) \leq K$.
- Celkovo teda v každom čase $0 \leq t \leq T$ máme:

$$Ke^{-R(T-t)} \leq S_t + P_A(t) - C_A(t) \leq K.$$