MODEL OCEŇOVANIA KAPITÁLOVÝCH AKTÍV, FAKTOROVÉ MODELY

Základy finančníctva

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva

CAPM

- **CAPM** – z angl. „capital asset pricing model“ - model oceňovania kapitálových aktív; nadväzuje na Markowitzov model.
- Predpoklady:
  1. investori ohodnocujú svoje portfólio podľa očakávanej výnosnosti a rizika v horizonte jedného obdobia (predpoklad nenasýtenosti+odpor k riziku),
  2. investori majú homogénne očakávania (tj. nikto nepredpokladá inú výnosnosť, riziko, či kovarianciu aktív než niekto iný),
  3. jednotlivé aktíva sú nekonečne deliteľné,
  4. existuje bezriziková sadzba (rovnaká pre všetkých), pri ktorej môže investor požičiavať alebo si požičiavať,
  5. dane a transakčné náklady sú zanedbané,
  6. informácie sú voľne a okamžite dostupné všetkým investorom,
  7. trh je v rovnováhe (ponuka=dopytu).

TRHOVÉ PORTFÓLIO

- V dôsledku predpokladov modelu si všetci investori (homogénne očakávania) vyberú trhové (tangenciálne) portfólio, ktoré potom nakombinujú s bezrizikovým aktívom alebo požičiavaním si podľa svojich preferencií,
- teda platí tzv. separačná teoréma:
- Optimálna kombinácia rizikových CP môže byť stanovená bez akýchkoľvek znalostí investorových postojov k výnosnosti a riziku.
- V rovnováhe bude mať každý CP nenulový podiel na skladbe trhového portfólia.
- Trhové portfólio je tvorené investíciami do všetkých rizikových CP v takom pomere, že proporcia investovaná do jednotlivého CP zodpovedá jeho relatívnej trhovej hodnote.

TRHOVÉ PORTFÓLIO

- Predpokladajme, že celý trh je tvorený 3 rizikovými CP: A, B, C, vydanými v počtoch 10000 kusov, 30000 kusov, resp. 40000 kusov. Potom:

CP	počet kusov	cena za kus	kapitalizácia	váhy
A	10000	10 p.j.	100000	$\frac{1}{5} = 0,2$
B	30000	5 p.j	150000	$\frac{3}{10} = 0,3$
C	40000	$6,25$ p.j.	250000	$\frac{1}{2} = 0,5$
súčty:	80000		500000	1

- V praxi sa trhové portfólio nahrádza indexami:
- Standard & Poor’s 500 Stock Price Index (S&P 500) – akciový index z americkej burzy obsahujúci 500 najvýznamnejších akcií, pričom váhy sú rátané tak ako v príklade,
- DowJones – najvýznamnejší, obsahuje 30 akcií, ale váhy rátané iným spôsobom.

PRIAMKA KAPITÁLOVÉHO TRHU

- Priamka daná rovnicou:

$$\bar{r} = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \right) \sigma, \tag{1}$$

- kde $\bar{r}_M$ - výnosnosť trhového portfólia, σ_M - riziko (smerodajná odchýlka) trhového portfólia a r_f - bezriziková sadzba (miera), sa nazýva priamka kapitálového trhu (z angl. „capital market line" - CML),
- obsahuje všetky efektívne portfólia,
- všetky portfólia na nej ležiace sú lineárnou kombináciou trhového portfólia a bezrizikového požičiavania alebo požičiavania si.

RIZIKO TRHOVÉHO PORTFÓLIA

- Predpokladajme, že trhové portfólio je N zložkové,
- označme x_{iM} - váha CP_i v trhovom portfóliu,
- potom smerodajná odchýlka trhového portfólia:

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} x_{iM} x_{jM} \sigma_{ij}} = \\ = \sqrt{x_{1M} \sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{1j} + x_{2M} \sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{2j} + \dots \\ \dots + x_{NM} \sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{Nj}},$$

- označme kovarianciu CP_i s trhovým portfóliom ako σ_{iM}, tj.:

$$\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{ij}, \tag{2}$$

- potom:

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_{kM} \sigma_{kM}}.$$

PRIAMKA CENNÝCH PAPIEROV

- Uvažujme všetky portfólia, ktoré vzniknú kombináciou CP_i a trhového portfólia,
- nech x označuje váhu CP_i v takomto portfóliu, potom $(1-x)$ je váha trhového portfólia v takomto portfóliu,
- označme krivku, na ktorej ležia, ako Mi; dostaneme ju pre rôzne hodnoty $x \in \langle 0, 1 \rangle$,
- pre očakávaný výnos $\overline{r}$ a riziko σ portfólií ležiacich na krivke Mi platí:

$$
\begin{aligned}
\overline{r} &= f(x) = x\overline{r}_i + (1-x)\overline{r}_M, \\
\sigma &= g(x) = \sqrt{x^2\sigma_i^2 + 2x(1-x)\sigma_{iM} + (1-x)^2\sigma_M^2},
\end{aligned}
$$

- skúmajme smernicu dotyčnice ku krivke Mi v bode trhového portfólia, tj. v bode $(\overline{r}_M, \sigma_M)$ (čiže keď $x = 0$).

PRIAMKA CENNÝCH PAPIEROV

- Ak je funkcia g invertovateľná, tak hodnotu výnosnosti $\bar{r}$ portfólia ležiaceho na krivke Mi môžeme vyjadriť ako funkciu rizika σ tohto portfólia:

$$\bar{r} = f(x) = f(g^{-1}(\sigma)) := h(\sigma),$$

- derivácia funkcie h v bode σ_M bude:

$$h'(\sigma_M) = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2},$$

- využijúc, že smernica dotyčnice ku krivke Mi v bode trhového portfólia sa rovná smernici CML, dostávame vzťah pre výnosnosť CP_i:

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{iM}, \tag{3}$$

PRIAMKA CENNÝCH PAPIEROV

- Vzťah (3):

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{iM},$$

- ide o lineárnu závislosť $\bar{r}_i$ od kovariancie CP_i s trhovým portfóliom σ_{iM}; priamka (3) sa nazýva priamka cenných papierov (z angl. „security market line“ - SML),
- rovnica (3) hovorí, že CP s vyššou σ_{iM} bude mať vyššiu výnosnosť (pretože $\bar{r}_M > r_f$),
- ak $\sigma_{iM} = 0$, tak $\bar{r}_i = r_f$, čiže CP, ktorý má nulovú kovarianciu s trhovým portfóliom, neprispieva k riziku trhového portfólia a preto je jeho výnosnosť rovnaká ako výnosová sadzba r_f bezrizikového CP,
- ak $\sigma_{iM} = \sigma_M^2$, tak $\bar{r}_i = \bar{r}_M$, teda CP prispieva „priemernou“ hodnotou k riziku trhového portfólia.

BETA PARAMETER

- Iný spôsob vyjadrenia SML:

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i, \tag{4}$$

- kde $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ - parameter (faktor) beta CP_i.
- Ak uvažujeme portfólio P s N CP a váhami x_1, $x_2, \ldots, x_N$, tak beta portfólia:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i. \tag{5}$$

- je to skutočne tak, pretože s využitím vzťahu (2) máme:

$$\begin{aligned}
\beta_P &= \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_M^2} = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{j=1}^{N} x_{jM}\sigma_{Pj} = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{j=1}^{N} x_{jM}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\sigma_{ij}\right) = \\
&= \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\sum_{j=1}^{N} x_{jM}\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\sigma_{iM} = \sum_{i=1}^{N} x_i\beta_i
\end{aligned}$$

OCEŇOVANIE

- Z predchádzajúceho vyplýva, že ak na SML leží každý CP, tak na nej leží aj každé portfólio,
- efektívne portfólia ležia na CML aj na SML, ale neefektívne len na SML,
- názov oceňovanie (*pricing*) kapitálových aktív má svoje opodstatnenie.
- Nech P_i je hodnota (cena) aktíva i na začiatku sledovaného obdobia a $\overline{P}_i$ je očakávaná hodnota (cena) aktíva i na konci sledovaného obdobia, potom z (4) dostaneme:

$$\bar{r}_i = \frac{\overline{P}_i}{P_i} - 1 = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i. \tag{6}$$

- Odtiaľ po úprave získame:

$$P_i = \frac{\overline{P}_i}{1 + r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i}. \tag{7}$$

CHARAKTERISTICKÁ PRIAMKA

- Podľa CAPM sa budú ceny aktív nastavovať tak dlho, kým sa nedosiahne rovnováha, pri ktorej bude ležať každý CP na SML,
- ekvivalentne bude výnosnosť CP_i v nasledujúcej perióde držania daná podľa (4), kde $\bar{r}_i$ je rovnovážny očakávaný výnos CP_i.
- Skutočná výnosnosť CP_i v nasledujúcej perióde držania bude daná charakteristickou priamkou:

$$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i, \tag{8}$$

- kde $\varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_{\varepsilon i})$ - náhodná chyba,
- napr. v prípade akcie predstavuje ε_i „dianie vo firme, ktoré nesúvisí s okolím“; preto sa obyčajne predpokladá, že komponenty náhodných chýb výnosností nie sú korelované, tj. kovariancia $\sigma_{\varepsilon i, \varepsilon j} = 0$ pre každé $i \neq j$; rovnako sa zvykne predpokladať, že $\sigma_{M\varepsilon i} = 0$.

RIZIKO CENNÉHO PAPIERA

- β – dôležitá miera rizika CP; preto je vhodné vyšetriť vzťah medzi ňou a celkovým rizikom CP,
- z (8) máme:

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= Var(r_i) = E\,(r_i - \bar{r}_i)^2 \\
&= E\,(r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i - (r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i))^2 \\
&= E\,((r_M - \bar{r}_M)\,\beta_i + \varepsilon_i)^2 \\
&= E\left((r_M - \bar{r}_M)^2\,\beta_i^2 + 2\,(r_M - \bar{r}_M)\,\beta_i\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) \\
&= \beta_i^2 Var(r_M) + Var(\varepsilon_i) = \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2.
\end{aligned}
$$

- Pre riziko CP_i teda platí:

$$
\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2}. \tag{9}
$$

TRHOVÉ A JEDINEČNÉ RIZIKO

- Celkové riziko CP_i môžeme podľa (9) rozložiť na dve zložky:
  1. *trhové (systematické) riziko* - vzťahuje sa k trhovému portfóliu,
  2. *jedinečné (nesystematické) riziko*.
- Trhové riziko $\beta_i^2 \sigma_M^2$ je spojené s rizikom trhového portfólia a parametrom beta CP_i; zo SML vieme, že čím je vyššia beta, tým vyššia je aj výnosnosť takéhoto CP_i, resp. portfólia cenných papierov,
- jedinečné riziko $\sigma_{\varepsilon i}^2$ nesúvisí s beta a teda CP s väčším množstvom jedinečného rizika nemusí dávať aj vyšší očakávaný výnos.

CELKOVÉ RIZIKO PORTFÓLIA

- Uvažujme N zložkové portfólio CP s váhami $x_1, x_2, \ldots, x_N$ jednotlivých zložiek, potom pre jeho očakávaný výnos s využitím (8) získame:

$$\begin{aligned} r_P &= \sum_{i=1}^{N} x_i r_i = \sum_{i=1}^{N} x_i (r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i) = \\ &= r_f + \sum_{i=1}^{N} x_i (r_M - r_f)\beta_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_P + \varepsilon_P, \end{aligned}$$

- kde $\varepsilon_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i$ je náhodná chyba portfólia, pričom $\sigma_{\varepsilon P} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2}$ je nesystematické riziko portfólia.
- Pre riziko portfólia teda máme:

$$\sigma_P = \sqrt{\beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon P}^2}.$$

DIVERZIFIKÁCIA RIZIKA

- Uvažujme n-zložkové portfólio CP, kde $n < N$ (N - počet zložiek v trhovom portfóliu), nech váhy jednotlivých CP v tomto portfóliu sú $x_i = \frac{1}{n}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$,
- potom beta portfólia: $\beta_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\beta_i$.
- Ak zväčšíme počet zložiek portfólia o jednu (tj. máme $n+1$ miesto n), tak o tom, či sa beta portfólia zväčší, či zmenší, rozhodne dodatočná hodnota β_{n+1}; zvýšenie počtu zložiek portfólia teda vedie len k spriemerovaniu trhového rizika portfólia, keďže o ňom rozhoduje súčin $\beta_P^2\sigma_M^2$.
- na druhej strane nesystematické riziko portfólia je určené:

$$\sigma_{\varepsilon P}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 + \ldots + \sigma_{\varepsilon n}^2}{n}\right),$$

- preto pri zvýšení počtu zložiek portfólia klesá jedinečné riziko, alias diverzifikácia vedie k zníženiu jedinečného rizika.

NEROVNOVÁHA

- Veľa investorov trávi mnoho času vyhľadávaním CP, ktoré sa zdajú byť nesprávne ohodnotené:
- <u>podhodnotený</u> - jeho očakávaný výnos je vyšší než očakávaný výnos CP s porovnateľnými podstatnými atribútmi,
- <u>nadhodnotený</u> - jeho očakávaný výnos je nižší než očakávaný výnos CP s porovnateľnými podstatnými atribútmi.
- Pre CAPM je jediný podstatný atribút - β a príslušný očakávaný výnos je daný SML,
- ceny CP a očakávané výnosy sú buď v zhode s danou rovnovážnou teóriou alebo nie sú (**nerovnováha**).

ALFA

- α - rozdiel medzi výnosnosťou CP_i a jeho rovnovážnou výnosnosťou, teda:

$$\alpha_i = r_i - \bar{r}_i,$$

- ak $\alpha_i = 0$, tak CP_i je v rovnováhe.
- Pretože pre $\bar{r}_i$ platí (4), tak:

$$\alpha_i = r_i - r_f - (\bar{r}_M - r_f)\beta_i,$$

- z čoho:

$$r_i = \alpha_i + r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i.$$

- Pridaním náhodnej chyby dostávame skutočnú výnosnosť CP_i:

$$r_i = \alpha_i + r_f + (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i.$$

POROVNANIE

- Porovnanie dvoch prístupov:
  1. konštrukcia efektívnej množiny,
  2. charakteristické priamky.
- Ak uvažujeme N CP, potom pri konštrukcii efektívnej množiny potrebuje investor odhadnúť:

očakávaný výnos každého CP	N parametrov
rozptyl (variancia) každého CP	N parametrov
kovariancia medzi vš. dvojicami CP	$\frac{N^2-N}{2}$ parametrov
určiť bezrizikovú sadzbu	1 parameter
spolu:	$\frac{N^2+3N+2}{2}$ parametrov

- pri charakteristických priamkach:

bezriziková sadzba+výnosnosť a rozptyl trhového portfólia	3 parametre
alfa a beta koeficienty každého CP	$2N$ parametrov
rozptyl náhodnej chyby	N parametrov
spolu:	$3N+3$ parametrov

FAKTOROVÉ MODELY

- Pri CAPM sme predpokladali, že výnosy CP sú závislé len od pohybu trhového portfólia,
- existujú modely, v ktorých je výnos CP závislý od viacerých faktorov:

$$r_i = a_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} F_j + \varepsilon_i,$$

- kde a_i - očakávaný výnos CP_i pri nulovej hodnote všetkých faktorov; F_j - j-ty faktor vplývajúci na výnos CP ($j = 1, 2, \ldots, m$); b_{ij} - citlivosť CP_i na faktor F_j; ε_i - náhodná chyba.
- príklady faktorov vplývajúcich na výnosnosť CP: tempo rastu HDP, pohyb úrokových sadzieb, inflácia, cena ropy ...
- pri týchto modeloch sa obyčajne predpokladá, že kovariancia $\sigma_{\varepsilon i, \varepsilon j} = 0$ pre každé $i \neq j$ a tiež kovariancia $\sigma_{\varepsilon i, F_j} = 0$ pre každé i, j.

JEDNOFAKTOROVÝ MODEL

- Ak uvažujeme len jeden faktor, tak:

$$r_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i,$$

- napríklad pre CAPM je tým faktorom $(r_M - r_f)$ a citlivosť CP_i na tento faktor je meraná cez β_i,
- a_i pre CAPM dostaneme ako $a_i = \alpha_i + r_f$ pre každé i,
- teda CAPM je len špeciálnym prípadom jednofaktorového modelu.
- Pretože

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \overline{F},$$

tak pre CAPM dostaneme:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f).$$

CAPM AKO JEDNOFAKTOROVÝ MODEL

- Ak $r_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i$, tak dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= Var(r_i) = E\left(r_i - \overline{r}_i\right)^2 = E\left(a_i + b_i F + \varepsilon_i - (a_i + b_i \overline{F})\right)^2 \\
&= E\left(b_i^2 \left(F - \overline{F}\right)^2 + 2b_i \left(F - \overline{F}\right) \varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right) \\
&= b_i^2 Var(F) + Var(\varepsilon_i) = b_i^2 \sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2. \qquad (10)
\end{aligned}$$

- Pre CAPM potom z (10) získame

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2},$$

čo sa zhoduje s (9).

CAPM AKO JEDNOFAKTOROVÝ MODEL

- Ak $r_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i$, resp. $r_j = a_j + b_j F + \varepsilon_j$, tak máme:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= E\left(r_i - \overline{r}_i\right)\left(r_j - \overline{r}_j\right) \\
&= E\left(b_i\left(F - \overline{F}\right) + \varepsilon_i\right)\left(b_j\left(F - \overline{F}\right) + \varepsilon_j\right) \\
&= E\left(b_i b_j\left(F - \overline{F}\right)^2 + b_i\left(F - \overline{F}\right)\varepsilon_j + b_j\left(F - \overline{F}\right)\varepsilon_i + \varepsilon_i\varepsilon_j\right) \\
&= b_i b_j Var(F) + 0 = b_i b_j \sigma_F^2. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

- Z (11) zas pre kovarianciu dvoch rôznych CP v modeli oceňovania kapitálových aktív získame:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2.$$

TEÓRIA BEZARBITRÁŽNEHO OCEŇOVANIA

- Uvažujme jednofaktorový model a dve dobre diverzifikované portfólia, ktoré sú obe citlivé na faktor F, ale inou mierou $b_1 \neq b_2$, pričom tiež platí, že $a_1 \neq a_2$,
- v rovnováhe dostaneme pre výnosy portfólií: $r_1 = a_1 + b_1 F$, $r_2 = a_2 + b_2 F$ a pre ich stredné hodnoty: $\overline{r}_1 = a_1$, $\overline{r}_2 = a_2$ (predpokladáme $\overline{F} = 0$),
- investujme do týchto portfólií x a $1 - x$ (váhy); bude nás zaujímať očakávaný výnos takéhoto portfólia (teda stredná hodnota výnosov),
- výnos portfólia bude:

$$r_P = xa_1 + (1 - x)a_2 + [xb_1 + (1 - x)b_2]F$$

- nech je toto portfólio bezrizikové, tj. postavme výraz v hranatých zátvorkách rovný 0; tomu vyhovuje:

$$x^* = \frac{b_2}{b_2 - b_1}.$$

TEÓRIA BEZARBITRÁŽNEHO OCEŇOVANIA

- Aby nebola arbitráž musí platiť: $x^* a_1 + (1 - x^*)a_2 = r_f$, kde r_f je bezriziková úroková sadzba.
- Z toho po dosadení za x^* dostávame:

$$\frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{b_2 - b_1} = \frac{b_2 r_f - b_1 r_f}{b_2 - b_1}$$

- Úpravou:

$$\frac{a_1 - r_f}{b_1} = \frac{a_2 - r_f}{b_2},$$

- čo nech sa rovná nejakej konštante λ, potom:

$$\bar{r}_1 = a_1 = r_f + b_1 \lambda, \text{ resp. } \bar{r}_2 = a_2 = r_f + b_2 \lambda.$$

- Závery z predchádzajúceho príkladu možno rozšíriť pre ľubovoľný počet CP N a počet faktorov $m < N$: *Existujú konštanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ také, že:* $\bar{r}_i = r_f + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\lambda_j$ *pre každé* $i = 1, 2, \ldots, N$.

CAPM V TEÓRII BEZARBITRÁŽNEHO OCEŇOVANIA

- Pre CAPM platí, že v rovnováhe by hodnota λ mala byť taká, aby bolo splnené:

$$\lambda = \bar{r}_M - r_f.$$

- Avšak podľa požiadavky:

$$\frac{a_1 - r_f}{b_1} = \lambda = \frac{a_2 - r_f}{b_2}$$

  to nemožno splniť, keďže také $\lambda = 0$ pre akékoľvek portfólio.
- CAPM je síce jednofaktorový model s faktorom $F = r_M - r_f$, ale neplatí, že $\overline{F} = 0$, t.j. neplatí, že $\bar{r}_M = r_f$.