TEÓRIA PORTFÓLIA

Základy finančníctva

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva

AKO INVESTOVAŤ

- Každý investor sleduje tri základné hľadiská:
    1. **výnos** – príjmy, ktoré z investície plynú,
    2. **bezpečnosť (riziko)** – stupeň (ne)istoty týkajúci sa očakávaných výnosov z investície,
    3. **likvidita** – rýchlosť, ktorou je schopný premeniť investíciu na hotovosť.
- Tieto tri hľadiská tvoria investičný trojuholník; trojuholník preto, lebo nie je možné všetky tri naraz maximalizovať; jedno potláča druhé.
- **Zlaté pravidlo investovania** hovorí, že neexistuje investícia, ktorá by dosiahla maximum vo všetkých troch ukazovateľoch; existuje len možnosť optimálneho pomeru výnosov, bezpečnosti a likvidity.

VÝNOS

- Akým spôsobom určiť očakávaný výnos a vypočítať riziko bezdividendových akcií sme zistili už v predchádzajúcej prednáške.
- Len poznamenajme, že výnos aktíva ako náhodná premenná môže mať aj iné než diskrétne rozdelenie popísané v predchádzajúcej prednáške.
- Dáta naznačujú, že pri niektorých rizikových cenných papieroch by mohlo ísť o normálne rozdelenie, ktoré je spojitým rozdelením. Každopádne výnosnosť cenného papieru sa aj v tomto prípade určuje ako stredná hodnota a rizikovosť ako smerodajná odchýlka.
- Obyčajne s vyšším výnosom sa spája i vyššie riziko.

RIZIKO

- Pri analýze rizika sa zvykne investor spoliehať na subjektívne odhady, ale, ako bolo spomenuté vyššie, existujú aj objektívne odhady opierajúce sa o pravdepodobnostný model; riziko pri tom odhaduje tak, že skúma rozdelenie pravdepodobnosti očakávaných výnosov.
- **Rizikovosť aktív** – zoradenie od najmenej rizikových k najviac rizikovým:
  1. nehnuteľnosti, drahé kovy, starožitnosti, zbierky
  2. štátne a komunálne dlhopisy, zúročené peňažné vklady so štátnou garanciou, pokladničné poukážky, depozitné certifikáty
  3. zástavné listy, poistky a renty
  4. podnikové obligácie
  5. zmenky, finančná spoluúčasť
  6. akcie, podnikateľské projekty
  7. opcie, termínované kontrakty

LIKVIDITA

- **Likvidita aktív** – zoradenie od najlikvidnejších k najmenej likvidným:
  1. hotovosť
  2. bankové vklady, štátne pokladničné poukážky, depozitné certifikáty, zlato, dlhopisy, akcie kótované na burze
  3. akcie nekótované na burze, majetkové poukážky investičných fondov
  4. CP s obmedzeným obchodovaním
  5. neprenosné CP, nehnuteľnosti, finančná spoluúčasť, umelecké predmety, podnikateľské projekty
- V teórii portfólia sa budeme zaoberať rizikovými aktívami, ktoré sú vysoko likvidné a záujemca o ich kúpu, či predaj obyčajne nemá problém zohnať protistranu na uskutočnenie obchodu. Preto budeme v ďalšom sledovať iba dva faktory: výnos a riziko.

PORTFÓLIO

- **Portfólio** – súbor niekoľkých rôznych investícií,
- pri skladaní portfólia sa investor snaží nájsť optimálny pomer medzi výnosmi a rizikom.
- Uvažujme portfólio pozostávajúce z N cenných papierov (ďalej skratka CP), nech
  - P_i - cena CP_i na začiatku sledovaného obdobia,
  - $\overline{P}_i$ - očakávaná cena CP_i na konci sledovaného obdobia,
  - k_i - počet kusov CP_i,
- kde $i = 1, 2, \ldots, N$, potom:

$$\overline{r}_i = \frac{\overline{P}_i - P_i}{P_i} \tag{1}$$

je očakávaný výnos, resp. očakávaná výnosová sadzba (výnosnosť) CP_i.

VÝNOSNOSŤ PORTFÓLIA

- Výnosnosť portfólia za dobu držania dostaneme ako:

$$\bar{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i(\overline{P}_i - P_i)}{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i \left(\frac{\overline{P}_i - P_i}{P_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i}. \tag{2}$$

- Ak označíme x_i podiel CP_i na hodnote celého portfólia, t.j. $x_i = \frac{k_i P_i}{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i}$, tak vzťah (2) môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\bar{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} k_i P_i} = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i. \tag{3}$$

- Navyše z definície x_i vyplýva, že:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1. \tag{4}$$

PRÍKLAD

- Investor kúpi tri akcie: Alfa, Beta, Gamma. Tieto akcie tvoria investorovo portfólio. Očakáva vzostup ich ceny a potom ich chce po roku predať. Aký bude očakávaný výnos (výnosové percento) portfólia za dobu držania?

akcia	počet kusov	cena za kus	bežná hodnota	očakávaná cena za kus	očakávaná hodnota
Alfa	10	40	400	42	420
Beta	20	35	700	40	800
Gamma	10	62	620	70	700
		bežná hodnota portfólia:	1720	očakávaná hodnota portfólia:	1920

- výnosnosť portfólia za dobu držania:

$$\bar{r}_P = \frac{1920 - 1720}{1720} = \frac{200}{1720} \doteq 0,1163\ (11,63\%)$$

PRÍKLAD

- Aké sú váhy a výnosnosti akcií v portfóliu?

akcia	bežná hodnota	váha akcie	očakávaný výnos akcie
Alfa	400	$400/1720 \doteq 0,23$	$20/400 = 0,05$
Beta	700	$700/1720 \doteq 0,41$	$100/700 = 0,14$
Gamma	620	$620/1720 \doteq 0,36$	$80/620 = 0,13$
	1720	$1,00$	

- Skutočne potom:

$$\bar{r}_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i = \frac{20}{1720} + \frac{100}{1720} + \frac{80}{1720} = \frac{200}{1720} \doteq 0,1163.$$

KORELAČNÁ ZÁVISLOSŤ

- Zmena hodnoty jednej zložky portfólia môže ovplyvňovať hodnoty ostatných zložiek – **korelačná závislosť**,
- napr. investor nekúpi akcie áut a pneumatík, pretože sa dá očakávať, že ak nastane pokles hodnoty akcií automobilky, klesnú aj hodnoty akcií pneumatík,
- hovoríme, že hodnoty týchto CP sú **pozitívne korelované**,
- opakom pozitívnej korelácie je **negatívna korelácia** - v tomto prípade pokles hodnoty jedného aktíva má za následok nárast v hodnote druhého aktíva,
- v praxi sa najčastejšie vyskytujú investície navzájom nesúvisiace – **nekorelované**.

KORELAČNÁ ZÁVISLOSŤ

- Najlepšie je investovať do negatívne korelovaných CP alebo aspoň nekorelovaných CP,
- rozkladanie investícií do portfólia sa nazýva **diverzifikácia rizika**,
- 20-30 rôznych CP obyčajne postačuje na to, aby sme eliminovali **nesystematické (jedinečné) riziko**,
- nedokážeme ňou však eliminovať **systematické (trhové) riziko**,
- riziko portfólia závisí na korelačnej závislosti jeho zložiek, ktorú meriame pomocou koeficientu korelácie (viď. predchádzajúca prednáška).
- Zrodenie teórie portfólia - r. 1952, Harry Markowitz: *Portfolio Selection*.

RIZIKOVOSŤ PORTFÓLIA

- Ako teda určiť rizikovosť portfólia zloženého z N CP? Vzťah (3) môžeme využiť pri výpočte variancie portfólia σ_p^2:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E\left(r_p - \bar{r}_p\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i r_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i (r_i - \bar{r}_i)\right)^2 = E\left(\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j E\left((r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}, \qquad (5)
\end{aligned}$$

- kde σ_{ij} je kovariancia výnosov CP_i a CP_j, s tým, že $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.
- Rizikovosť portfólia je teda σ_p.

KOVARIANČNÁ MATICA

- Označme vektor váh CP v N-zložkovom portfóliu ako $\vec{x}$, t.j. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$. Nech Q označuje kovariančnú maticu, teda

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

- Vzťah (5) potom možno prepísať do tvaru:

$$\sigma_p^2 = \vec{x}^T Q \vec{x}. \tag{6}$$

- Z čoho dostaneme:

$$\sigma_p = \sqrt{\vec{x}^T Q \vec{x}}. \tag{7}$$

MNOŽINA VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH PORTFÓLIÍ

- Portfólio, na ktorého skladbe sa podieľajú CP svojimi váhami, je teda možné reprezentovať jeho výnosnosťou a jeho rizikovosťou,
- pre rôzne váhy zložiek v portfóliu dostaneme rôzne portfólia, hoci výnosnosť alebo rizikovosť niektorých portfólií môže byť rovnaká.
- Všetky portfólia, ktoré je možné vytvoriť z aktív podieľajúcich sa na skladbe portfólia rôznou voľbou ich váh, tvoria **množinu všetkých prípustných portfólií.**
- V nasledujúcom príklade skonštruujeme množinu všetkých prípustných portfólií pre dva CP - bezdividendové akcie.

DVE AKCIE

- Uvažujme, že na trhu existujú dve rizikové aktíva α, β s výnosnosťami $\bar{r}_\alpha$, $\bar{r}_\beta$ a rizikovosťami σ_α, σ_β.
- Bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že $0 < \bar{r}_\alpha < \bar{r}_\beta$, $0 < \sigma_\alpha < \sigma_\beta$ a v dvojrozmernom priestore $\mathcal{O}_{\sigma r}$ je možné množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z aktív α, β s váhami $x_\alpha \geq 0$, $x_\beta \geq 0$, kde $x_\alpha + x_\beta = 1$, reprezentovať krivkou pozostávajúcou z bodov $(\sigma_p, \bar{r}_p)$, kde $\sigma_p \in \langle 0, \sigma_\beta \rangle$ je rizikovosť portfólia a $\bar{r}_p \in \langle \bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta \rangle$ je výnosnosť portfólia.
- Krivku tiež možno chápať ako graf funkcie $\sigma_p = f(\bar{r}_p)$ definovanej na intervale $\langle \bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta \rangle$, kde

$$f(\bar{r}_p) = \sqrt{K\bar{r}_p^2 + L\bar{r}_p + M},$$

teda f je druhá odmocnina z kvadratickej funkcie premennej $\bar{r}_p$ s koeficientami K, L, M.

DVE AKCIE

- Zo vzťahov (3) a (4) máme:

$$x_\alpha = \frac{\bar{r}_\beta - \bar{r}_p}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha}, \; x_\beta = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_\alpha}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha}. \tag{8}$$

- Dosaďme (8) za x_α a x_β do (7), dostaneme:

$$\sigma_p = \sqrt{K\bar{r}_p^2 + L\bar{r}_p + M}, \tag{9}$$

kde:

$$K = \frac{\sigma_\alpha^2 - 2\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_\beta^2}{(\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha)^2}, \tag{10}$$

$$L = 2\left(\frac{(\bar{r}_\beta + \bar{r}_\alpha)\sigma_{\alpha\beta} - \bar{r}_\beta\sigma_\alpha^2 - \bar{r}_\alpha\sigma_\beta^2}{(\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha)^2}\right), \tag{11}$$

$$M = \frac{\bar{r}_\beta^2\sigma_\alpha^2 - 2\bar{r}_\alpha\bar{r}_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \bar{r}_\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha)^2}. \tag{12}$$

DVE PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÉ AKCIE

- Špeciálne, ak $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \sigma_\beta$, tzn. výnosy akcií sú perfektne pozitívne korelované, tak:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2 \sigma_\alpha^2 + 2 x_\alpha x_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta + x_\beta^2 \sigma_\beta^2} = \sqrt{(x_\alpha \sigma_\alpha + x_\beta \sigma_\beta)^2} \\ &= x_\alpha \sigma_\alpha + x_\beta \sigma_\beta = \frac{\bar{r}_\beta - \bar{r}_p}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} \sigma_\alpha + \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_\alpha}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} \sigma_\beta \\ &= \frac{\bar{r}_\beta \sigma_\alpha - \bar{r}_\alpha \sigma_\beta}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} + \bar{r}_p \frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha}, \end{aligned} \tag{13}$$

  kde $\bar{r}_p \in \langle \bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta \rangle$.
- V tomto prípade je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ množina všetkých prípustných portfólií reprezentovaná úsečkou s koncovými bodmi $(\sigma_\alpha, \bar{r}_\alpha)$, $(\sigma_\beta, \bar{r}_\beta)$.

DVE PERFEKTNE NEGATÍVNE KORELOVANÉ AKCIE

- Ak $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_\alpha \sigma_\beta$, tzn. výnosy akcií sú perfektne negatívne korelované, tak:

$$
\begin{aligned}
\sigma_p &= \sqrt{x_\alpha^2 \sigma_\alpha^2 - 2 x_\alpha x_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta + x_\beta^2 \sigma_\beta^2} = \sqrt{(x_\alpha \sigma_\alpha - x_\beta \sigma_\beta)^2} \\
&= |x_\alpha \sigma_\alpha - x_\beta \sigma_\beta| = \left| \frac{\bar{r}_\beta - \bar{r}_p}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} \sigma_\alpha - \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_\alpha}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} \sigma_\beta \right| \\
&= \left| \frac{\bar{r}_\beta \sigma_\alpha + \bar{r}_\alpha \sigma_\beta}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} - \bar{r}_p \frac{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}{\bar{r}_\beta - \bar{r}_\alpha} \right|, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

  kde $\bar{r}_p \in \langle \bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta \rangle$.
- V tomto prípade je v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ množina všetkých prípustných portfólií reprezentovaná dvoma úsečkami. Jedna z úsečiek má koncové body $(0, \bar{r}_{\text{arb}})$, $(\sigma_\alpha, \bar{r}_\alpha)$ a druhá má koncové body $(0, \bar{r}_{\text{arb}})$, $(\sigma_\beta, \bar{r}_\beta)$.

ARBITRÁŽNE PORTFÓLIO

- Pre prípad $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_\alpha \sigma_\beta$ je portfólio s výnosnosťou

$$\bar{r}_{\text{arb}} = \frac{\bar{r}_\beta \sigma_\alpha + \bar{r}_\alpha \sigma_\beta}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha} \in (\bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta)$$

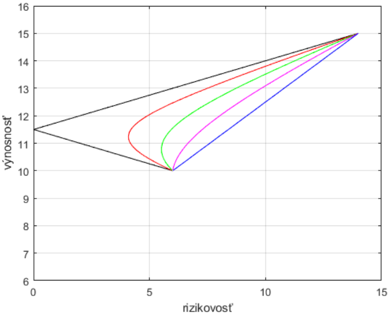
  arbitrážne, pretože vhodnou kombináciou váh

$$x_\alpha = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}, \; x_\beta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta + \sigma_\alpha}$$

  aktív α, β v portfóliu možno dosiahnuť kladný výnos pri nulovom riziku.

MNOŽINA VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH PORTFÓLIÍ

- Na obrázku sú znázornené reprezentácie množiny prípustných portfólií pozostávajúcich z dvoch aktív s výnosnosťami 10% a 15%, pri rizikovosti 6% a 14%, kde korelačný koeficient výnosov aktív je postupne rovný -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ a 1.



VZŤAH INVESTOROV K RIZIKU

- Investori sú rôzni, ale máloktorého zaujíma celá množina prípustných portfólií. Uprednostňovať budú tie, ktoré pri rovnakom riziku prinášajú vyššiu výnosnosť.
- Investori, ktorí si vyberú pri rovnakej výnosnosti portfólio s nižšou rizikovosťou, sa nazývajú **riziko averzní**.
- Investori, ktorí naopak uprednostnia pri rovnakej výnosnosti vyššiu rizikovosť, sa nazývajú **riziko milujúci** alebo **riziko obľubujúci**. Riziko obľubujúci investor rád riskuje predpokladajúc, že skutočne vysoké výnosy dokážu priniesť iba veľmi rizikové aktíva. Prípadnú vysokú stratu, ktorá pri takýchto aktívach môže vzniknúť, títo investori nevnímajú. Zaujíma ich iba vidina vysokého zisku.
- **Rizikovo neutrálny** investor nemá k riziku žiadny postoj, nezaujíma ho σ_p portfólia. Vníma iba výnosnosť.
- V ďalšom uvažujeme len riziko-averzných investorov.

EFEKTÍVNA MNOŽINA

- Spomedzi všetkých prípustných portfólií si riziko averzný investor vyberá podmnožinu tejto množiny, ktorá:
  - pri rôznych úrovniach rizika ponúka maximálnu výnosnosť,
  - pri rozličných úrovniach výnosnosti ponúka minimálne riziko.
- Takáto množina sa nazýva efektívna množina a na ňu sa investor zameriava pri hľadaní svojho optimálneho portfólia.
- Úlohu nájdenia efektívnej množiny na množine všetkých prípustných riešení možno redukovať na úlohu nájdenia množiny portfólií, ktoré pre danú výnosnosť poskytujú minimálne riziko a následne z takto získanej množiny vybrať tie portfólia, ktoré majú pri danom riziku najvyššiu výnosnosť.

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Označme $\vec{r}$ vektor výnosností jednotlivých CP v portfóliu, tj. $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)^T$,
- nech ďalej $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ a R označuje danú výnosnosť.
- Úloha nájsť všetky portfólia poskytujúce pre danú výnosnosť minimálne riziko je ekvivalentná s úlohou minimalizácie druhej mocniny rizika pri danej výnosnosti portfólia.
- Je to úloha kvadratického programovania (U):

$$\begin{array}{ll} \min_{\vec{x} \geq \vec{0}} & \vec{x}^T Q \vec{x} \\ \text{za podmienok:} & \vec{x}^T \vec{r} = R, \\ & \vec{x}^T \vec{1} = 1. \end{array}$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Pri mnohých úlohách býva jednoduchšie riešiť úlohu (U) bez podmienky $\vec{x} \geq \vec{0}$ ako úlohu na viazaný extrém.
- Navyše, ak predpokladáme, že $\vec{x}$ možno vyberať z priestoru $\mathbb{R}^N$ ľubovoľne tak, aby bolo splnené $\vec{x}^T\vec{1} = 1$, aktíva možno na začiatku sledovaného obdobia nielen kupovať, ale ich aj predávať. Pre váhu každého predaného aktíva i platí $x_i < 0$.
- Vypustením obmedzenia $\vec{x} \geq \vec{0}$ sa teda dosahuje isté zovšeobecnenie oproti pôvodnému modelu.

ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM

- Predpokladajme, že matica Q je kladne definitná.
- Napíšme Lagrangeovu funkciu pre túto úlohu:

$$L(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{x}^T Q \vec{x} + \lambda_1 (R - \vec{x}^T \vec{r}) + \lambda_2 (1 - \vec{x}^T \vec{1}), \quad (15)$$

  kde $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú Lagrangeove multiplikátory.
- Nutné podmienky na nájdenie extrému:

$$\begin{aligned} 2Q\vec{x} - \lambda_1 \vec{r} - \lambda_2 \vec{1} &= \vec{0}, & (16) \\ \vec{x}^T \vec{r} &= R, & (17) \\ \vec{x}^T \vec{1} &= 1. & (18) \end{aligned}$$

- Z rovnice (16) po prenásobení Q^{-1} - inverznou maticou k matici Q a následnej úprave dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 Q^{-1} \vec{r} + \lambda_2 Q^{-1} \vec{1} \right). \quad (19)$$

ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM

- Dosadením (19) do (17) a (18) dostaneme sústavu:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \vec{r}^T Q^{-1} \vec{r} + \lambda_2 \vec{1}^T Q^{-1} \vec{r} &= 2R, \\
\lambda_1 \vec{r}^T Q^{-1} \vec{1} + \lambda_2 \vec{1}^T Q^{-1} \vec{1} &= 2.
\end{aligned}$$

- Označme: $\alpha = \vec{r}^T Q^{-1} \vec{r}$, $\beta = \vec{r}^T Q^{-1} \vec{1}$, $\gamma = \vec{1}^T Q^{-1} \vec{1}$, potom môžeme sústavu prepísať ako:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta &= 2R, \\
\lambda_1 \beta + \lambda_2 \gamma &= 2,
\end{aligned}$$

  kde neznáme sú λ_1, λ_2.

- Riešením sústavy sú:

$$\lambda_1 = \frac{2(\gamma R - \beta)}{\alpha\gamma - \beta^2}, \tag{20}$$

$$\lambda_2 = \frac{2(\alpha - \beta R)}{\alpha\gamma - \beta^2}. \tag{21}$$

ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM

- Dosadením (20), (21) späť do (19) dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{(\gamma R - \beta)}{\alpha\gamma - \beta^2} Q^{-1}\vec{r} + \frac{(\alpha - \beta R)}{\alpha\gamma - \beta^2} Q^{-1}\vec{1}. \qquad (22)$$

- Skutočnosť, že vo vypočítanom $\vec{x}$ účelova funkcia naozaj dosahuje svoje minimum, ktoré je navyše globálnym minimom, zabezpečuje požiadavka kladnej definitnosti matice Q.
- Minimálna hodnota účelovej funkcie bude:

$$\sigma_P^2 = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} R^2 - \frac{2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} R + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}. \qquad (23)$$

DVE AKCIE A ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM

- Ľahko možno ukázať, že pre dvojicu bezdividendových akcií α, β na trhu s korelačným koeficientom ich výnosov rôznym od -1, resp. 1 predstavuje graf odmocniny funkcie v (23) premennej $\bar{r}_p \in \langle \bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta \rangle$ množinu všetkých prípustných portfólií, ktoré možno investovaním do akcií α, β vytvoriť.
- Platí totiž:

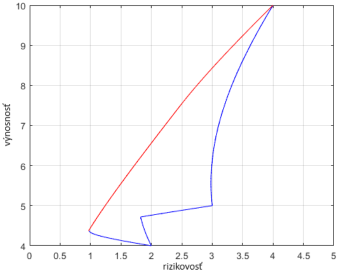
$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}, \\
L &= \frac{-2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}, \\
M &= \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}.
\end{aligned}
$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY PRE DVE AKCIE

- Množina prípustných portfólií pre dvojicu akcií α, β reprezentovaná krivkou, na ktorej ležia v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ body $(\sigma_p, \overline{r}_p)$, kde pre $\overline{r}_p \in \langle \overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta \rangle$ σ_p vyhovuje (9), nemusí byť celá efektívna, keďže na nej môžu ležať portfólia s rovnakou rizikovosťou, ale rôznou výnosnosťou.
- Je potrebné nájsť také $\overline{r}_{min} \in \langle \overline{r}_\alpha, \overline{r}_\beta \rangle$, pre ktoré je hodnota σ_p funkcie (9) minimálna. Označme túto minimálnu hodnotu rizikovosti prípustného portfólia ako σ_{min}, potom efektívna množina bude tá časť krivky, ktorej koncové body sú $(\sigma_{min}, \overline{r}_{min})$, $(\sigma_\beta, \overline{r}_\beta)$.

EFEKTÍVNA MNOŽINA

- Pre viacero CP je hľadanie efektívnej množiny na množine prípustných portfólií náročnejšie.
- Nasledujúci obrázok ilustruje situáciu pre tri bezdividendové akcie. Červená krivka reprezentuje efektívnu množinu na množine všetkých prípustných portfólií (množina ohraničená červenou a modrými krivkami). Hodnoty na osiach obrázka sú uvádzané v percentách.



ARBITRÁŽNE PORTFÓLIÁ

- V prípade, že je kovariančná matica Q singulárna, nie je možné riešiť úlohu na viazaný extrém pomocou Lagrangeových multiplikátorov.
- Pre investora však vzniká jedinečná príležitosť nájsť a identifikovať arbitrážne portfólio, t.j. portfólio, ktoré poskytuje kladnú výnosovú sadzbu pri nulovom riziku.
- Nutná podmienka existencie arbitrážneho portfólia je teda singulárnosť kovariančnej matice Q.
- Nie je to však postačujúca podmienka, pretože sústava rovníc

$$\vec{x}^T \vec{1} = 1, \tag{24}$$

$$\vec{x}^T Q \vec{x} = 0, \tag{25}$$

nemusí mať riešenie.

ARBITRÁŽNE PORTFÓLIÁ

- Pretože Q je kladne semidefinitná kovariančná matica, sústavu rovníc (24), (25) možno previesť na sústavu:

$$\begin{aligned} \vec{1}^T \vec{x} &= 1, \\ Q\vec{x} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{26}$$

- V prípade, že má sústava rovníc (24), (26) nekonečne veľa riešení, vyberie sa to, ktoré poskytuje najväčšiu výnosnosť, pripúšťajúc i nekonečne veľkú výnosnosť.
- Pri hľadaní arbitrážnej príležitosti na trhu, je možné podmienku (24) nahradiť podmienkou:

$$\vec{1}^T \vec{x} = -1 \tag{27}$$

alebo podmienkou:

$$\vec{1}^T \vec{x} = 0. \tag{28}$$

KRIVKY INDIFERENCIE

- reprezentujú investorove preferencie ohľadom rizika a výnosnosti,
- na rovnakej indiferenčnej krivke ležia všetky portfólia pre investora rovnako žiaduce; investor je medzi nimi indiferentný,
- riziko averzný investor uplatňuje dva predpoklady, na základe ktorých sa rozhoduje, ktoré portfólio bude ležať na ktorej krivke indiferencie; sú to:
  - predpoklad nenasýtenosti – pri tom istom riziku preferuje investor portfólio s vyšším výnosom
  - odpor k riziku – pri tom istom výnose preferuje investor portfólio s nižším rizikom
- investor teda uprednostňuje portfólio ležiace na vyššej krivke indiferencie (na vyššej hladine),
- krivky indiferencie sa nepretínajú.

VOĽBA OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA

- Nech ako predtým je Q regulárna matica.
- Ak poznáme investorove krivky indiferencie (jeho preferencie ohľadom výnosu a rizika), tak môžeme určiť investorov výber optimálneho portfólia.
- Spomedzi všetkých portfólií tvoriacich efektívnu množinu to bude zrejme to, ktoré leží na najvyššej možnej krivke indiferencie investora.
- Keďže efektívna množina musí byť konkávna a krivky indiferencie riziko averzného investora majú kladný sklon a sú konvexné, je možné ho nájsť a bude ležať v bode, v ktorom sa investorova indiferenčná krivka dotýka efektívnej množiny.

PRÍKLAD

- Uvažujme efektívnu množinu pre dve bezdividendové akcie popísanú funkciou

  $$\sigma_p = \sigma\left(\bar{r}_p\right) = \sqrt{K\bar{r}_p^2 + L\bar{r}_p + M},$$

  kde $\bar{r}_p \in \langle \bar{r}_{min}, \bar{r}_\beta \rangle$.
- Predpokladajme, že investorove preferencie možno popísať hladkou parametrizovanou funkciou:

  $$\sigma_p = P_c(\bar{r}_p) \tag{29}$$

  kde $\bar{r}_p \geq 0$ a c je hladina preferencie (parameter).
- Potom investorovo optimálne portfólio s výnosnosťou $\bar{r}_p^*$ a rizikovosťou σ_p^* bude bodom dotyku efektívnej množiny s investorovou krivkou indiferencie na optimálnej hladine preferencie c^*.

PRÍKLAD

- Výnosnosť $\overline{r}_p^*$ a rizikovosť σ_p^* optimálneho portfólia musia teda spĺňať:

$$\begin{aligned} \sigma_p^* = \sigma\left(\overline{r}_p^*\right) &= P_{c^*}(\overline{r}_p^*), \\ \sigma'\left(\overline{r}_p^*\right) &= P'_{c^*}(\overline{r}_p^*). \end{aligned}$$

- Váhy akcií α a β v optimálnom portfóliu dostaneme z nasledujúcich rovníc:

$$x_\alpha^* = \frac{\overline{r}_\beta - \overline{r}_p^*}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}, \ x_\beta^* = \frac{\overline{r}_p^* - \overline{r}_\alpha}{\overline{r}_\beta - \overline{r}_\alpha}.$$

- Zlepšiť svoju hladinu preferencie môže investor investovaním do kombinácie rizikových CP a bezrizikového aktíva, ak také na trhu existuje.

BEZRIZIKOVÉ AKTÍVUM

- Uvažujme investovanie na jednu dobu držania portfólia,
- bezrizikové aktívum - štátny dlhopis s dobou splatnosti rovnou dobe držania,
- výnos takéhoto aktíva r_f je istý; vieme, že v prípade štátnych dlhopisov ide vlastne o <u>bezrizikovú úrokovú sadzbu</u> (<u>mieru</u>) na príslušné obdobie,
- riziko je nulové; teda ak označíme smerodajnú odchýlku takéhoto aktíva ako σ_f, tak $\sigma_f = 0$,
- v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ bude takýto CP reprezentovaný bodom so súradnicami $(0, r_f)$,
- keďže kovarianciu dvoch aktív i, j je možné vypočítať ako $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, tak kovariancia akéhokoľvek aktíva i s bezrizikovým aktívom je nulová ($\sigma_{if} = \rho_{if}\sigma_i\sigma_f = 0$).

KOMBINÁCIA BEZRIZIKOVÉHO A RIZIKOVÉHO CP

- Uvažujme portfólio, ktoré pozostáva z bezrizikového CP (s váhou x) a nejakého rizikového CP, resp. kombinácie rizikových CP (s váhou $1 - x$), s výnosnosťou r_i a smerodajnou odchýlkou σ_i,
- potom pre výnosnosť takéhoto portfólia platí:

$$\bar{r} = x r_f + (1 - x)\bar{r}_i, \tag{30}$$

- rizikovosť takéhoto portfólia je:

$$\sigma = \sqrt{x^2\sigma_f^2 + 2x(1 - x)\sigma_{if} + (1 - x)^2\sigma_i^2} = (1 - x)\sigma_i, \tag{31}$$

- všetky možné portfólia tohto typu (pre rôzne hodnoty x) potom ležia na úsečke:

$$\bar{r} = r_f + \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma, \tag{32}$$

- kde $\sigma \in \langle 0, \sigma_i \rangle$.

BEZRIZIKOVÉ ZAPOŽIČIAVANIE

- Ak uvažujeme aj možnosť bezrizikového zapožičiavania pri tej istej úrokovej sadzbe, môžu byť váhy x aj záporné čísla
- Príklad: Investor si požičia 3000 p.j. a investuje v celkovej výške 15000 p.j. do rizikových CP (tj. 12000 p.j. mal a 3000 p.j. si požičal), potom:

$$x_f = \frac{-3000}{12000} = -\frac{1}{4} \text{ a } x_{CP} = \frac{15000}{12000} = \frac{5}{4},$$

- v súčte $x_f + x_{CP} = 1$.
- Všetky možné portfólia ako kombinácie bezrizikového zapožičiavania (s váhou $x < 0$) a nejakého rizikového CP alebo ich kombinácie (s váhou $1 - x > 1$) potom ležia na polpriamke:

$$\bar{r} = r_f + \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_i} \right) \sigma, \tag{33}$$

- kde $\sigma \geq \sigma_i$.

NOVÁ EFEKTÍVNA MNOŽINA

- Kombinovanie bezrizikového aktíva s portfóliom rizikových aktív umožňuje investorovi vylepšiť (z pohľadu jeho preferencií) efektívnu množinu,
- **nová efektívna množina** portfólií reprezentovaná bodmi $(\sigma, \overline{r})$ v rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ vznikne ako kombinácia bezrizikového aktíva a tzv. **dotykového (tangenciálneho) portfólia** s výnosnosťou $\overline{r}_t$ a rizikovosťou σ_t. V rovine $\mathcal{O}_{\sigma r}$ budú tieto reprezentácie portfólií ležať na polpriamke:

$$\overline{r} = r_f + \left(\frac{\overline{r}_t - r_f}{\sigma_t} \right) \sigma, \tag{34}$$

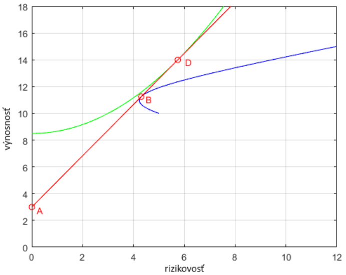
  kde $\sigma \geq 0$, ktorá sa dotýka krivky pôvodnej efektívnej množiny v bode $(\sigma_t, \overline{r}_t)$,
- ak $\sigma \in \langle 0, \sigma_t \rangle$ ide o kombináciu nákupu bezrizikového aktíva a dotykového portfólia a ak $\sigma \geq \sigma_t$, tak ide o kombináciu bezrizikového zapožičiavania (predaja bezrizikového aktíva) s dotykovým portfóliom.

OPTIMÁLNE PORTFÓLIO NA NOVEJ EFEKTÍVNEJ MNOŽINE

- Takže, ak existuje na trhu spolu s rizikovými CP aj bezrizikový cenný papier, investor bude na základe svojich preferencií vyberať optimálne portfólio z novej efektívnej množiny reprezentovanej pre $\sigma \geq 0$ polpriamkou (34), pričom ak smerodajná odchýlka optimálneho portfólia $\sigma^* \in \langle 0, \sigma_t \rangle$, tak investorovo optimálne portfólio je kombináciou nákupu bezrizikového aktíva a dotykového portfólia a ak $\sigma^* \geq \sigma_t$, tak investorovo optimálne portfólio je kombináciou predaja bezrizikového aktíva a nákupu dotykového portfólia.

OPTIMÁLNE PORTFÓLIO

- Optimálne portfólio investora ako kombinácia dotykového portfólia kombinovaného s bezrizikovým požičiavaním si (predajom bezrizikového aktíva).
- Na obrázku nižšie vidno krivku novej efektívnej množiny (červenou), krivku indiferencie investora na optimálnej preferenčnej hladine (zelenou), bod A - bezrizikové aktívum, bod B - dotykové portfólio, bod D - optimálne portfólio investora. Hodnoty na osiach sú v percentách.



OPTIMÁLNE PORTFÓLIO

- Optimálne portfólio investora ako kombinácia dotykového portfólia pozostávajúceho z 3 CP a nákupu dlhopisov.
- Na obrázku nižšie vidno krivku novej efektívnej množiny (červenou), krivku indiferencie investora na optimálnej preferenčnej hladine (zelenou), bod D - optimálne portfólio investora. Hodnoty na osiach sú v percentách.