AKCIE
Pravdepodobnostný model oceňovania akcií, arbitráž na akciovom trhu

Základy finančníctva

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva

PRAVDEPODOBNOSTNÝ MODEL OCEŇOVANIA AKCIÍ

- Oceňovanie akcií nevyplácajúcich dividendu,
- nech súčasná cena akcie je P_0 p.j.,
- predpokladáme investovanie na obdobie dĺžky 1 časovej jednotky (ďalej č.j.), počas ktorého na cenu P_1 akcie v čase 1 č.j. neskôr vplývajú rôzne náhodné udalosti $\mathcal{U}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $n \geq 2$ je počet udalostí,
- každá z udalostí je súhrnom ekonomických i neekonomických okolností súbežne vplývajúcich na výšku ceny akcie,
- každej udalosti $\mathcal{U}_i$ môžeme priradiť pravdepodobnosť p_i, s ktorou udalosť nastane,
- platí:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

PRAVDEPODOBNOSTNÝ MODEL OCEŇOVANIA AKCIÍ

- Pretože cena P_1 závisí od toho, ktorá z udalostí nastane, investor nahliada na očakávanú cenu akcie v čase 1 skôr než na každý z jednotlivých variantov,
- preto budeme budúcu cenu akcie chápať ako očakávanú (strednú) hodnotu ceny akcie v čase 1 a označíme ju ako $\overline{P}_1$, t.j. platí:

$$\overline{P}_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i,$$

kde u_i je cena akcie v čase 1 pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_i$.

PRÍKLAD

- Uvažujme bezdividendovú akciu A, ktorej súčasná cena je $P_0 = 20$ p.j. Na obdobie $T = 1$ č.j. držme túto akciu a potom ju predajme za cenu P_1, ktorá s pp. $p \in (0, 1)$ pri vzniku udalosti H bude 24 p.j. a s pp. $1 - p$ pri vzniku udalosti D bude 16 p.j.
- Graficky znázorníme:

$$
\begin{array}{lcccl}
\text{H:} & & & 24 & \text{s pp. } p \\
 & & \nearrow & & \\
 & 20 & & & \\
 & & \searrow & & \\
\text{D:} & & & 16 & \text{s pp. } 1 - p
\end{array}
$$

- Očakávania o cene P_1 budú závisieť od pravdepodobnosti p, s ktorou sa cena hýbe smerom nahor (udalosť H) alebo nadol (D):

$$\overline{P}_1 = 24p + 16(1 - p) = 16 + 8p$$

VÝNOS AKCIE

- ak akciu predáme v čase 1 za P_1 p.j., výnos, resp. výnosovú sadzbu akcie za dobu držania dostaneme ako podiel:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \tag{1}$$

- pretože $\overline{P}_1$ chápeme ako strednú (očakávanú) hodnotu ceny akcie v nasledujúcom období, tak i tento výnos bude iba očakávaný; budeme ho označovať $\overline{r}$ a nazývať výnosnosťou akcie,
- skutočný výnos akcie bude závisieť od udalostí $\mathcal{U}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, a bude mať pre rôzne i rôznu hodnotu:

$$r_i = \frac{u_i - P_0}{P_0} \tag{2}$$

- keďže $\overline{P}_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$, tak z (1) dostaneme:

$$\overline{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i - P_0}{P_0} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{u_i - P_0}{P_0} = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \tag{3}$$

RIZIKO AKCIE

- riziko, s ktorým sa bude odchyľovať skutočná cena akcie a teda i výnos akcie od investorových očakávaní, budeme merať smerodajnou odchýlkou a nazývať rizikom, resp. rizikovosťou akcie
- nech σ^2 označuje varianciu výnosov akcie, potom smerodajná odchýlka bude σ
- platí:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (r_i - \bar{r})^2 \tag{4}$$

- podobným spôsobom by sme vypočítali aj varianciu ceny akcie, akurát by sme miesto výnosov dosádzali ceny akcie,
- platí:

$$r_i - \bar{r} = \frac{u_i - \overline{P}_1}{P_0}$$

KOVARIANCIA VÝNOSOV AKCIÍ

- Ak uvažujeme dve bezdividendové akcie A, B, tak môžeme merať ich kovarianciu - „spoločnú menlivosť“.
- Označme:
  - a_i - výnos akcie A pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_i$,
  - b_i - výnos akcie B pri vzniku udalosti $\mathcal{U}_i$,
- potom:
  - $\bar{r}_A = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$ - výnosnosť akcie A,
  - $\bar{r}_B = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$ - výnosnosť akcie B,
  - $\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (a_i - \bar{r}_A)^2$ - variancia výnosov akcie A,
  - $\sigma_B^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (b_i - \bar{r}_B)^2$ - variancia výnosov akcie B,
- kovarianciu σ_{AB} výnosov akcií A, B vypočítame ako:

$$\sigma_{AB} = \sum_{i=1}^{n} p_i (a_i - \bar{r}_A)(b_i - \bar{r}_B) \tag{5}$$

KOEFICIENT KORELÁCIE

- koeficient korelácie:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \tag{6}$$

- platí: $\rho_{AB} \in \langle -1, 1 \rangle$,
- ak:
  - $\rho_{AB} = 0$ - výnosy sú nekorelované,
  - $\rho_{AB} > 0$ - výnosy sú pozitívne korelované,
  - $\rho_{AB} < 0$ - výnosy sú negatívne korelované,
  - $\rho_{AB} = 1$ - perfektná pozitívna korelácia,
  - $\rho_{AB} = -1$ - perfektná negatívna korelácia.

PRÍKLAD

- Ak uvažujeme, že na trhu spolu s akciou A vystupuje iná bezdividendová akcia B s týmito vlastnosťami:

$$\begin{array}{llll} \text{H:} & & 36 & \text{s pp. } p \\ & & \nearrow & \\ & 40 & & \\ & & \searrow & \\ \text{D:} & & 50 & \text{s pp. } 1-p \end{array}$$

- je možné vypočítať koreláciu medzi výnosmi týchto akcií.
- V čase $T = 1$ bude očakávaná cena akcie A (predtým označená ako $\overline{P}_1$): $\overline{P}_A = 24p + 16(1-p) = 16 + 8p$.
- V čase $T = 1$ bude očakávaná cena akcie B: $\overline{P}_B = 36p + 50(1-p) = 50 - 14p$.
- Čo sa týka výnosností akcií, dostaneme:

$$\bar{r}_A = \frac{8p-4}{20}, \bar{r}_B = \frac{10-14p}{40}.$$

PRÍKLAD

- Variancia v cene akcie A bude $\sigma^2_{P_A} = p(24 - \overline{P}_A)^2 + (1-p)(16 - \overline{P}_A)^2 = p(1-p)(24-16)^2 = 64p(1-p)$ a teda smerodajná odchýlka $\sigma_{P_A} = 8\sqrt{p(1-p)}$. Pre výnosy dostaneme:

$$\sigma^2_A = \frac{64}{400}p(1-p) \text{ a } \sigma_A = \frac{2}{5}\sqrt{p(1-p)}.$$

- Podobne pre akciu B máme $\sigma^2_{P_B} = 196p(1-p)$, $\sigma_{P_B} = 14\sqrt{p(1-p)}$ a

$$\sigma^2_B = \frac{196}{1600}p(1-p),\ \sigma_B = \frac{7}{20}\sqrt{p(1-p)}.$$

PRÍKLAD

- Kovariancia cien akcií:

$$\sigma_{P_A P_B} = -112p(1-p)$$

- Kovariancia výnosov akcií:

$$\sigma_{AB} = -\frac{112}{800}p(1-p)$$

- Korelačný koeficient cien akcií bude:

$$\rho_{P_A P_B} = \frac{\sigma_{P_A P_B}}{\sigma_{P_A}\sigma_{P_B}} = \frac{-112p(1-p)}{112p(1-p)} = -1$$

- Korelačný koeficient výnosov akcií bude:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0,14p(1-p)}{0,14p(1-p)} = -1$$

- Vidíme, že korelačný koeficient je rovný -1, či už ide o ceny alebo výnosy akcií a teda akcie (ich ceny i výnosy) sú perfektne negatívne korelované.

ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- Uvažujeme bezdividendové akcie A, B popísané vyššie,
- môžeme sa zamyslieť nad tým, či neexistuje na trhu arbitrážna príležitosť,
- skutočne by mohla takáto príležitosť vzniknúť, pretože intuitívne vnímame, že perfektná negatívna korelácia cien akcií by pri vhodne navolených investíciach do akcií v čase 0 mohla viesť ku kladnému zisku bez ohľadu na to, ktorá z udalostí ovplyvňujúcich cenu akcie v čase 1 nastane,
- takýmto spôsobom by bolo možné úplne eliminovať riziko, tj. na rozhodnutia investora, ktorý si arbitráž všimne, nemá vplyv pp. p nastania udalosti H.

ELIMINÁCIA RIZIKA

- Uvažujme nasledujúcim spôsobom:
- Nech veľkosť kapitálu, ktorý je investor ochotný/schopný investovať do kúpy akcií, je m p.j., z toho nech investícia do akcie A predstavuje x p.j. a do akcie B nech je y p.j., tj. máme:

$$x + y = m$$

- S takýmto rozvrhnutím investície je pri vzniku udalosti H výnos investora $1,2x + 0,9y - m$ a pri vzniku udalosti D: $0,8x + 1,25y - m$.
- Aby investor eliminoval riziko, zvolí:

$$1,2x + 0,9y - m = 0,8x + 1,25y - m$$

- Z čoho:

$$y = \frac{8}{7}x$$

ARBITRÁŽNY ZISK INVESTORA

- Keďže $x + y = m$, tak $x = \frac{7m}{15}$ a $y = \frac{8m}{15}$.
- Výnos investora bude v prípade nastania udalosti H rovnaký ako v prípade nastania udalosti D a totiž:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{7m}{15}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{8m}{15}\right) - m = \frac{m}{25} > 0$$

- Výška zisku investora, ktorý dosiahne bez rizika vplyvu náhodných udalostí na cenu akcie v čase 1, je určená jeho počiatočným imaním m.
- Teda výnosová sadzba (výnosové percento) investora je pri vzniku oboch udalostí rovnaká, rovná $0,04$ (4%).
- Ak napr. uvažujeme $m = 3000$ p.j., tak arbitrážny zisk investora je 120 p.j., ktorý dosiahne v čase 1 pri počiatočnom rozvrhnutí investície $x = 1400$ p.j. (70 kusov akcie) do akcie A a $y = 1600$ p.j. (40 kusov akcie) do akcie B.

BEZARBITRÁŽNA CENA AKCIE

- Existencia arbitrážnej príležitosti implikuje, že niektorá z akcií je nesprávne ohodnotená.
- Predpokladajme, že ňou je akcia B. Aká by mala byť jej súčasná cena P, aby nenastala možnosť arbitráže?
- Eliminujme riziko:

$$
\begin{aligned}
0,2x + \left(\frac{36-P}{P}\right) y &= -0,2x + \left(\frac{50-P}{P}\right) y \\
0,4x &= \frac{14}{P} y \\
x &= \frac{35}{P} y
\end{aligned}
$$

BEZARBITRÁŽNA CENA AKCIE

- Aby nebola arbitráž, tak výnosová sadzba musí byť pri vzniku udalosti H alebo D nulová, teda:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0,2\left(\frac{35}{P}\right)y + \left(\frac{36-P}{P}\right)y \\
0 &= \left(\frac{43-P}{P}\right)y
\end{aligned}
$$

- Čiže P musí byť rovná 43 p.j.
- Ak na trhu existujú práve dve akcie, v prípade stanovenia ich aktuálnych cien sa stáva určujúcou arbitráž. Hovoríme, že oceňujeme na princípe žiadna arbitráž.

ZÁNIK ARBITRÁŽNEJ PRÍLEŽITOSTI

- Existencia arbitrážnej príležitosti spôsobí jej takmer okamžitý zánik.
- Investori na trhu začnú okamžite nakupovať akcie vo veľkých množstvách v zodpovedajúcom riziko eliminačnom pomere.
- Zvýšený dopyt po akciách, skoro okamžite zdvihne ich aktuálnu cenu, čo povedie k prerovnaniu cien a výnosov akcií a arbitráž zanikne.
- Preto oceňovanie na princípe žiadna arbitráž je rozumné oceňovanie.

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Arbitráž možno dosiahnuť aj predajom akcií v čase 0 a ich spätným dokúpením v rovnakých množstvách v čase 1.
- Uvažujme napr., že spolu s akciou A existuje na trhu akcia C s týmito vlastnosťami:

$$
\begin{array}{llll}
\text{H:} & & 40 & \text{s pp. } p \\
 & & \nearrow & \\
 & 50 & & \\
 & & \searrow & \\
\text{D:} & & 55 & \text{s pp. } 1-p
\end{array}
$$

- Ceny a výnosy akcií sú aj v tomto prípade perfektne negatívne korelované.

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Postup nájdenia a využitia arbitrážnej príležitosti ostáva rovnaký, t.j. najprv investor eliminuje riziko spojené s náhodnými udalosťami H, D:

$$1,2x + 0,8y = 0,8x + 1,1y$$

- Z čoho:

$$y = \frac{4}{3}x$$

- V tomto prípade investor akcie v čase 0 predáva, preto volí $x < 0$ a súčasne $y < 0$ pri $x + y = m$, kde $-m$ je počiatočná veľkosť kapitálu uloženého v akciách A, C.
- Čiže: $x = \frac{3}{7}m$, $y = \frac{4}{7}m$. Tzn. ak napr. $m = 7000$ p.j., tak v čase 0 vlastní investor 150 kusov akcie A a 80 kusov akcie C.

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Ak v čase 1 príde k udalosti H, tak investor dokúpi späť akcie A, C v príslušných počtoch kusov:

$$-150(24 \text{ p.j.}) - 80(40 \text{ p.j.}) = -6800 \text{ p.j.}$$

- Podobne pri vzniku udalosti D:

$$-150(16 \text{ p.j.}) - 80(55 \text{ p.j.}) = -6800 \text{ p.j.}$$

- Pretože v čase 0 bol investor vlastníkom rovnakého počtu kusov akcií v celkovej hodnote 7000 p.j., ich predajom v tomto čase získal finančné prostriedky v tejto výške a spätným dokúpením akcií zarobil 200 p.j. bez ohľadu na to, ktorá z udalostí nastala, a súčasne má rovnaké množstvá akcií späť.

ZOVŠEOBECNENIE

- V predchádzajúcich príkladoch sme zakaždým uvažovali dvojicu perfektne negatívne korelovaných cien (výnosov) akcií. Zovšeobecnenie môžeme urobiť pre akúkoľvek dvojicu akcií, ktorých cena sa za časové obdobie T zmení s nejakou pravdepodobnosťou $p \in (0, 1)$, resp. $1 - p$ na inú hodnotu.
- Uvažujme nasledujúcu dvojicu akcií E, F:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & \text{H:} & & & uS & & & gW & \text{s pp. } p \\
 & & & \nearrow & & & \nearrow & & \\
\textbf{E:} & & S & & & \textbf{F:} \quad W & & & \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & \\
 & \text{D:} & & & dS & & & hW & \text{s pp. } 1 - p
\end{array}
$$

- kde S, W je cena akcie E, resp. F v čase 0 a u, d, g, h sú kladné koeficienty, ktorými je prenásobená S, resp. W v čase T, reprezentujúc tak zmenu ceny v dôsledku nastania udalosti H alebo D.

KORELÁCIA AKCIÍ

- Potom očakávané ceny v čase T pre jednotlivé akcie budú:

$$\begin{aligned} \overline{P}_E &= (pu + (1-p)d)\, S \\ \overline{P}_F &= (pg + (1-p)h)\, W \end{aligned}$$

- Smerodajné odchýlky budú:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_E} &= \sqrt{p(1-p)}\, |u-d|\, S \\ \sigma_{P_F} &= \sqrt{p(1-p)}\, |g-h|\, W \end{aligned}$$

- Kovariancia:

$$\sigma_{P_E P_F} = p(1-p)(u-d)(g-h)SW$$

- Teda korelačný koeficient bude:

$$\rho_{EF} = \frac{p(1-p)(u-d)(g-h)SW}{p(1-p)\,|u-d|\,|g-h|\,SW} = \frac{(u-d)(g-h)}{|u-d|\,|g-h|}$$

KORELÁCIA AKCIÍ

- Ak $u > d$ a súčasne $g < h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g > h$, tak $\rho_{EF} = -1$.
- To znamená, že medzi cenami akcií existuje perfektná negatívna korelácia a teda je tu možnosť vzniku arbitrážnej príležitosti.
- Ak $u > d$ a súčasne $g > h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g < h$, tak $\rho_{EF} = 1$.
- To znamená, že medzi cenami akcií existuje perfektná pozitívna korelácia. Neskôr ukážeme, že aj v tomto prípade môže na trhu existovať arbitrážna príležitosť.
- Poznámka: Všetky uvádzané závery platia aj pre výnosy akcií E, F. Ak teda hovoríme, že ceny akcií E, F sú perfektne negatívne (pozitívne) korelované, znamená to, že aj výnosy z nich sú také.

PREDPOKLADY OCEŇOVANIA

- Technika nájdenia maximálneho arbitrážneho zisku je pre dve akcie na trhu rovnaká bez ohľadu na koreláciu cien (výnosov) akcií.
- Skôr než sa pustíme do jej popisu, urobme niekoľko predpokladov kladených na koeficienty u, d, g, h.
- Nech u, d, g, h spĺňajú:

$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \tag{7}$$

alebo

$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \tag{8}$$

alebo

$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \tag{9}$$

alebo

$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \tag{10}$$

- Pri splnení (7), (8) nastáva perfektná negatívna korelácia, pri splnení (9), (10) perfektná pozitívna.

ELIMINÁCIA RIZIKA A ARBITRÁŽNY VÝNOS

- Nech x p.j. je investícia do akcie E a y je investícia do akcie F. Uvažujeme, že x, y sú ľubovoľné reálne čísla spĺňajúce $x + y = m$, kde m je výška investorovho počiatočného imania (pre tento moment predpokladajme, že $m \neq 0$).
- Aby investor eliminoval riziko, musí platiť:

$$(u - 1)x + (g - 1)y = (d - 1)x + (h - 1)y$$

- Z toho dostaneme: $y = \left(\frac{u-d}{h-g}\right) x$.
- Teda $x = \left(\frac{h-g}{u-d+h-g}\right) m$, $y = \left(\frac{u-d}{u-d+h-g}\right) m$.
- Výnos pri vzniku ktorejkoľvek z udalostí potom bude:

$$\frac{(u-1)(h-g)}{u-d+h-g} + \frac{(g-1)(u-d)}{u-d+h-g} = \frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u-d+h-g}$$

NEEXISTENCIA ARBITRÁŽE

- Označme

$$J = \frac{uh - dg - (u - d) - (h - g)}{u - d + h - g},$$

  potom arbitrážny zisk investora bude rovný Jm.
- Arbitrážna príležitosť zrejme nenastane v tom prípade, keď $J = 0$, t.j. keď platí:

$$uh - dg = u - d + h - g, \tag{11}$$

- Poznámka: Nulový bezrizikový zisk môže samozrejme investor dosiahnuť aj voľbou $x = 0 = y$. Hoci pri tejto možnosti je skutočne dosiahnutý zisk bez rizika (investor nič neinvestuje, nič nezíska, ani nič nestratí), očividne na takúto investíciu nemá vplyv to, či arbitráž existuje alebo nie.

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Technika eliminácie rizika a maximalizácie arbitrážneho zisku je popísaná vyššie, preto sa venujme tejto situácii iba nasledujúcim príkladom:
- Nech spolu s akciou A existuje na trhu iná bezdividendová akcia α s týmito vlastnosťami:

$$
\begin{array}{llll}
\text{H:} & & 58 & \text{s pp. } p \\
& & \nearrow & \\
& 50 & & \\
& & \searrow & \\
\text{D:} & & 45 & \text{s pp. } 1-p
\end{array}
$$

- Máme: $u = 1,2$, $d = 0,8$, $g = 1,16$ a $h = 0,9$.
- Ďalej platí:

$$y = \left(\frac{u-d}{h-g}\right)x = -\left(\frac{20}{13}\right)x$$

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Keďže $J = \frac{3}{35}$, tak na využitie núkajúcej sa arbitrážnej príležitosti je potrebné voliť $m > 0$, t.j. vlastniť v čase 0 nejaké akcie tak, aby $x + y > 0$. Ich predajom získané peňažné prostriedky sa potom spolu s počiatočným imaním použijú na nákup druhej z akcií.
- Pretože $m > 0$ a $x = -\left(\frac{13}{7}\right) m$, $y = \left(\frac{20}{7}\right) m$, tak je potrebné vlastniť akcie A, ktorých predajom v čase 0 nadobudne investor peňažné prostriedky na kúpu akcií α.
- Aby investor dosiahol na kladný arbitrážny zisk, kúpu a predaj uskutoční v zodpovedajúcom riziko eliminačnom pomere.
- Nech investor v čase 0 vlastní 65 kusov akcie A (tzn. $m = 700$ p.j.). Ich predajom nadobudne 1300 p.j., ktoré spolu s počiatočným imaním 700 p.j. použije na kúpu 40 kusov akcie α.

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Ak nastane udalosť *H*, investor predá akcie α za

$$40(58 \text{ p.j.}) = 2320 \text{ p.j.}$$

- a súčasne musí dokúpiť 65 kusov akcie *A* späť celkovo za

$$65(24 \text{ p.j.}) = 1560 \text{ p.j.}$$

- Pretože na začiatku bol držiteľom peňažných prostriedkov vo výške $m = 700$ p.j., tak jeho arbitrážny zisk činí $2320 - 2260 = 60$ p.j.
- Ak nastane udalosť *D*, investor predá akcie α za

$$40(45 \text{ p.j.}) = 1800 \text{ p.j.}$$

- a súčasne musí dokúpiť 65 kusov akcie *A* späť celkovo za

$$65(16 \text{ p.j.}) = 1040 \text{ p.j.}$$

- Aj v tomto prípade jeho zisk bude $1800 - 1740 = 60$ p.j.

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Vidíme, že investor dosiahol bez rizika kladný zisk a súčasne má akciu A v rovnakom počte kusov ako na začiatku späť.
- Nastala arbitráž a investor ju využil.
- Poznámka: V špeciálnom prípade, v ktorom $\frac{u-d}{h-g} = -1$, investor na využitie arbitráže (ak existuje) nepotrebuje žiadne dodatočné prostriedky, t.j. $m = 0$, keďže nákup jednej z akcií je plne hradený predajom druhej akcie. V tomto prípade arbitráž existuje, ak $u - g \neq 0$.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Predpokladajme, že spolu s akciami E, F existuje na trhu aj diskontný dlhopis úročený na príslušné obdobie držania akcií bezrizikovou úrokovou sadzbou $r_f > 0$.
- Ďalej predpokladajme, že nárast v cene ktorejkoľvek akcie je väčší než $(1 + r_f)$ a rovnako tak, že pokles v cene akcie je menší než 1.
- Keďže investor má možnosť zahrnúť do svojho portfólia aj dlhopis, ktorý sa na jeho skladbe bude podielať podielom vo výške z p.j., tak platí: $x + y + z = m > 0$.
- Investor môže dlhopisy aj emitovať (predávať) v ľubovoľnom množstve, teda predpokladáme, že z môže byť aj ľubovoľné záporné číslo.
- Pretože na trhu teraz vystupuje aj diskontný dlhopis s dobou splatnosti rovnou práve 1 č.j. a diskrétnou bezrizikovou úrokovou sadzbou r_f určenou práve na toto obdobie (t.j. 1 p.j. vzrastie na $(1 + r_f)$ p.j. za toto obdobie), tak hodnota peňažných jednotiek sa s časom mení.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Výnos z dlhopisu je istý, preto naň nemá vplyv, aká udalosť nastane. Investor má teda možnosť za 1 č.j. zarobiť na každej peňažnej jednotke r_f p.j. a preto je nevýhodné držať peniaze neinvestované.
- Výhodnejšie než len do dlhopisov, môže byť súbežné investovanie do akcií, špeciálne v tom prípade, ak existuje arbitrážna príležitosť.
- Eliminujme riziko vplyvu náhodných udalostí:

$$(u-1)x + (g-1)y + r_f z = (d-1)x + (h-1)y + r_f z$$

- Odtiaľ získame $y = \left(\frac{u-d}{h-g}\right) x$.
- Keďže $x + y + z = m$, tak

$$x = \left(\frac{h-g}{u-d+h-g}\right)(m-z),\; y = \left(\frac{u-d}{u-d+h-g}\right)(m-z).$$

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Investor maximalizuje arbitrážny zisk voľbou z:

$$\max_{z} \ (u-1)x+(g-1)y+r_f z = J(m-z)+r_f z = Jm+z(r_f-J)$$

- Voľba z závisí od toho, či $r_f > J$, $r_f < J$ alebo $r_f = J$.
- Ak $r_f > J$, tak existuje arbitráž a investor dokáže navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \to \infty$. Na financovanie nákupu dlhopisov však potrebuje vlastniť v čase 0 nejaké akcie, ktorých predajom v riziko eliminujúcom pomere spolu s počiatočným kapitálom m p.j. získa finančné prostriedky potrebné na investíciu do dlhopisov.
- Ak $r_f < J$, tak existuje arbitráž a investor dokáže navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \to -\infty$. Predajom dlhopisov získa peňažné prostriedky, ktoré spolu s počiatočným kapitálom m p.j. použije na nákup akcií v zodpovedajúcom riziko eliminujúcom pomere.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Ak $r_f = J$, tak je možné voliť z ľubovoľne, pretože pre akúkoľvek jeho hodnotu bude zisk investora Jm bez ohľadu na voľbu z. V tomto prípade neexistuje na trhu arbitrážna príležitosť a bezriziková úroková sadzba je správne (bezarbitrážne) navolená.
- Predchádzajúce odvodenia predpokladali, že $\frac{u-d}{h-g} \neq -1$.
- Ak $\frac{u-d}{h-g} = -1$, tak z eliminácie rizika dostaneme $y = -x$. Na maximalizáciu arbitrážneho zisku (ak arbitráž existuje) nemá v tomto prípade vplyv z, pretože z $x + y + z = m$ dostaneme $z = m$.
- Kladný arbitrážny zisk:

$$(u-1)x + (g-1)y + r_f z = ux + gy + r_f m = (u-g)x + r_f m.$$

bude možné dosiahnuť pre $u \neq g$.