

O KRITICKEJ HODNOTE TLMENIA KONŠTANTNE BUDENÉHO OSCILÁTORA

Michal Dibala, doc. RNDr. Boris Rudolf, CSc.
FEI STU, Katedra matematiky
dibalam@zoznam.sk

Abstrakt

Cieľom tejto práce je nájsť hodnotu tlmenia rovnice tlmeného kyvadla s konštantným buđením. Táto rovnica modeluje jednosmerný elektromotor, kde predpokladáme konštantnú budiacu silu elektromagnetu v pracovnom rozsahu nezávislú od vzdialenosti od elektromagnetu.

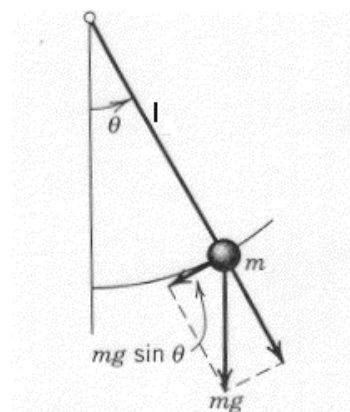
1. Úvod

Medzi klasické úlohy v úvodných kurzoch fyziky patrí aj opis dynamiky modelu kyvadla.

Ideálne kyvadlo pozostáva z nehmotného pevného závesu uchyteného v priestore na jednom konci a závažia, ktoré je upevnené na druhom konci závesu tak, že medzi prvým bodom uchytenia a ťažiskom závažia je vzdialenosť l . Ťažové zrýchlenie má konštantnú hodnotu g . Dynamiku opísaného systému možno zapísať diferenciálnou rovnicou v tvare:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} + \alpha \sin\varphi = 0$$



Obr. 1. Náčrt kyvadla, zdroj: <http://dmpeli.mcmaster.ca>

Pre malé uhly výchylky môžeme predpokladať, že:

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad (2)$$

čím dostaneme diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi, ktorú dokážeme jednoducho riešiť.

2. Netlmené a nebudené kyvadlo

Ak úlohu nezjednodušíme, bude potrebné pracovať s nelineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu. Na zistenie periódy kmitania a niektorých ďalších parametrov systému netreba danú rovnicu priamo riešiť. Daný dynamický systém má totiž využiteľnú vlastnosť a to, že je hamiltonovský, inými slovami, celková energia systému ostáva zachovaná. Prepíšeme diferenciálnu rovnicu kyvadla na systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_1$$

Nájďme prvý integrál systému (hamiltonián) H .

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-\alpha \sin x_1}{x_2} \quad (4)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\alpha \sin x_1}{x_2}$$

$$\int x_2 dx_2 = -\alpha \int \sin x_1 dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} = \alpha \cos x_1$$

Pretože celková energia systému je konštantná pozdĺž riešení, platí že:

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \alpha \cos x_1 = C, C \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Hamiltonián upravíme tak, aby jeho hodnota dávala pre nulové počiatočné podmienky nulovú hodnotu.

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \alpha(1 - \cos x_1) = K, K \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Nech sú počiatočné podmienky zadané vektorom $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Teraz možno vyjadriť x_2 ako funkciu x_1 . Nech je $x_1^0 = 0$. Potom platí:

$$x_2 = \sqrt{2K + 2\alpha(1 - \cos x_1)} \quad (7)$$

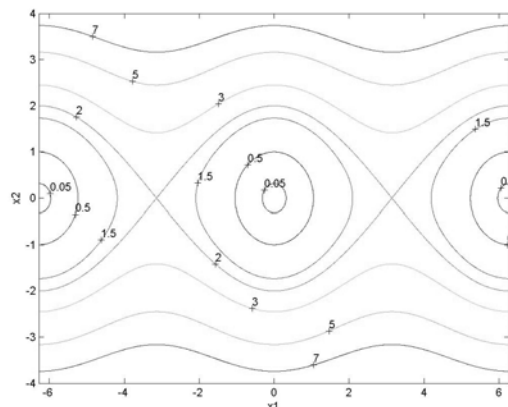
$$K = \frac{x_2^0{}^2}{2} + \alpha(1 - \cos x_1^0)$$

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 - 2a(1 - \cos x_1)}$$

Aby mala funkcia reálne riešenie, je potrebné, aby platilo:

$$x_1^2 \geq 2a(1 - \cos x_1) \quad (8)$$

Po hlbšej analýze funkcie a vykreslíme fázový portrét.



Obr. 2. Fázový portrét netlmeného a nebudeného kyvadla s parametrom $a=1$.

Systém je 2π periodický v premennej x_1 .

Pevné body systému sú $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$.

Pre $0 < (x_2^0)^2 \leq 4a$ dostaneme periodické riešenia systému. Situácia $(x_2^0)^2 = 4a$ zodpovedá heteroklinickej orbite (spojnici dvoch sediel). Limitná perióda $T = \infty$.

Ak $(x_2^0)^2 > 4a$, potom je energia systému tak veľká, že závažie začne rotovať okolo bodu uchytenia. Na fázovom portréte sú tieto stavy zachytené krivkami, ktoré sa nedotýkajú osi x_1 . Jedná sa o periodické riešenia druhého druhu. Periodické riešenia druhého druhu je riešenie systému, pre ktoré platí, že:

$$\begin{aligned} x_2(t+T) &= x_2(t) \\ x_1(t+T) &= x_1(t) + 2\pi \end{aligned} \quad (9)$$

Períodu kmitania periodických riešení možno získať aplikovaním vety o derivácii inverznej funkcie. Platí:

nech riešenie prechádza bodom $(A, 0)$, potom

$$T(A) = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{dy}{\sqrt{2a(\cos y - \cos A)}} \quad (10)$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} T(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \quad (11)$$

$$\lim_{A \rightarrow \pi} T(A) = +\infty \quad (12)$$

3. Konštantne budené netlmené kyvadlo

Pridaním konštanty budenia do systému dostaneme systém:

$$\ddot{y} + a \sin y = b \quad (13)$$

Podobne ako v prípade nebudeného a netlmeného kyvadla existuje hamiltonián systému:

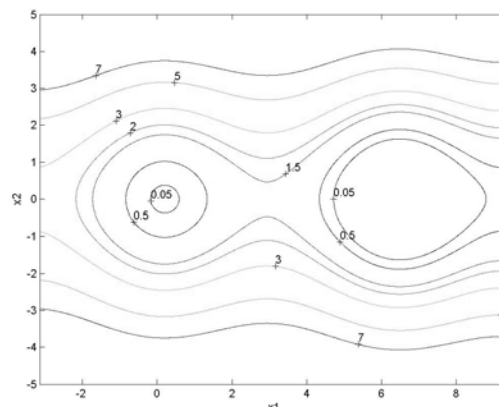
$$\frac{\dot{x}_2^2}{2} - a \cos x_1 - b x_1 = C \quad (14)$$

Analýzou hamiltoniánu dostaneme v závislosti na parametroch systému a, b nasledovné výsledky.

Ak $b > a$, potom systém nemá pevný bod a ani periodické riešenie.

Ak $b = a$, potom má systém jeden pevný bod $(\pi/2, 0)$ a podobne ako v predchádzajúcom prípade nemá periodické riešenie.

Pre prípad $b < a$ systém má periodické riešenia a dva pevné body, $(\arcsin(b/a), 0)$ a $(\pi - \arcsin(b/a), 0)$. Systém nemá periodické riešenie druhého druhu.



Obr. 3. Fázový portrét netlmeného konštantne budeného kyvadla s parametrami $a=1, b=0,2$.

4. Tlmené a konštantne budené kyvadlo

Zaujímavé správanie má predchádzajúci systém po pridaní tlmenia lineárne závislého od rýchlosti pohybu prostredím.

$$\ddot{y} + a \sin y + c\dot{y} = b \quad (15)$$

Ak $b < a$, tak systém má rovnako ako systém bez tlmenia dva pevné body $(\arcsin(b/a), 0)$ a $(\pi - \arcsin(b/a), 0)$, v prípade rovnosti parametrov sa tieto body stotožnia do bodu $(\pi/2, 0)$. Okrem toho existuje také $c_0 > 0$, že ak $c \leq c_0$, potom existuje periodické riešenie druhého druhu a systém má jednu heteroklinickú orbitu, ak $c > c_0$, neexistuje periodické riešenie a systém má dve heteroklinické orbity. Cieľom práce je aspoň približne určiť c_0 ako funkciu parametrov a, b . Na rozdiel od predchádzajúcich prípadov si už pri riešení nemôžeme pomôcť hamiltoniánom, z dôvodu jeho neexistencie.

5. Časová substitúcia a jej dôsledky

V rovnici (15) urobíme časovú substitúciu $t = k\tau$.

Následne vyjadříme dy/dt a d^2y/dt^2 .

$$\dot{y}(t) + a \sin y(t) + c\dot{y}(t) = b \quad (16)$$

$$t = k\tau$$

$$\dot{y}(k\tau) + a \sin y(k\tau) + c\dot{y}(k\tau) = b$$

$$y(k\tau) = z(\tau)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(k\tau)}{d(k\tau)} = k \frac{dz(\tau)}{d\tau}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = k^2 \frac{d^2z(\tau)}{d\tau^2}$$

$$\dot{y}(k\tau) + \frac{a}{k^2} \sin y(k\tau) + \frac{c}{k} \dot{y}(k\tau) = \frac{b}{k^2} \quad (17)$$

Predpokladajme prípad $a=b$. Potom $c_0 = f(a, b) = f(a, a)$.

Z rovnice (17) možno vidieť, že časovou substitúciou sme dostali opäť pôvodný tvar rovnice, len s rozdielnymi parametrami. Ak teda pre rovniciu (16)

platilo $c_0=f(a,a)$, potom z rovnice (17) platí $kc_0=f(k^2a,k^2a)$. To znamená, že v prípade $a=b$ musí mať funkcia $f(a,a)$ tvar:

$$f(a,a) = k_0 \sqrt{a} \quad (18)$$

Ak $b < a$ nech platí $b = a \sin(\varphi)$ pre φ z intervalu $[0, \pi/2]$.

6. Numerické hľadanie c_0 priamou metódou

V prípade $\varphi = \pi/2$ potrebujeme nájsť k_0 . Potrebujeme určiť c_0 pre rôzne hodnoty parametra a a z nich následne určiť približnú hodnotu k_0 , pretože predpokladáme, že k_0 bude vystupovať vo funkcii $f(a,b)$ aj pre $\varphi < \pi/2$.

Pri určovaní c_0 použijeme software MATLAB a balík SIMULINK od spoločnosti MATHWORKS.

Modelovať budeme numericky použitím metód Runge-Kutta. Získané výsledky porovnáme s výsledkami z numerického programu PHASER.

Tab. 1. Hodnoty c_0 získané priamym numerickým riešením rovnice (15) v MATLABe. Metóda Runge-Kutta, čas simulácie 500s, krok 0,1s

φ	A	A	a	a	a	a	a
$^\circ$	1	2	3	4	9	10	16
0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,069	0,097	0,119	0,138	0,206	0,217	0,274
10	0,138	0,194	0,238	0,275	0,412	0,434	0,548
15	0,206	0,291	0,356	0,411	0,617	0,650	0,822
20	0,274	0,388	0,474	0,548	0,822	0,865	1,095
25	0,342	0,484	0,592	0,684	1,026	1,081	1,368
30	0,410	0,580	0,710	0,820	1,230	1,296	1,639
35	0,478	0,676	0,827	0,955	1,432	1,510	1,909
40	0,545	0,771	0,944	1,090	1,635	1,723	2,179
45	0,621	0,865	1,060	1,224	1,836	1,935	2,447
50	0,679	0,960	1,175	1,357	2,035	2,146	2,714
55	0,745	1,053	1,290	1,490	2,234	2,355	2,979
60	0,811	1,146	1,406	1,621	2,431	2,563	3,242
65	0,876	1,239	1,517	1,752	2,627	2,769	3,503
70	0,941	1,220	1,629	1,881	2,822	2,974	3,761
75	1,005	1,420	1,740	2,009	3,014	3,177	4,019
80	1,069	1,511	1,850	2,137	3,205	3,378	4,273
85	1,131	1,600	1,959	2,262	3,397	3,577	4,524
90	1,206	1,686	2,065	2,386	3,578	3,775	4,771



Obr. 4. Výstup z programu PHASER pre systém s parametrami $a=1$, $b=1$, $c=1,170$, $x_0^2=2$.

Tab. 2. Hodnoty c_0 získané priamym numerickým riešením rovnice (15) v programe PHASER. Metóda Dormand-Prince, čas simulácie 500s, krok 0,01s.

φ	a	a	a	a	a	a
$^\circ$	1	2	3	4	9	16
0	0	0	0	0	0	0
5	0,069	0,097	0,118	0,138	0,206	0,275
10	0,138	0,194	0,239	0,275	0,412	0,549
15	0,206	0,291	0,355	0,411	0,617	0,822
20	0,274	0,388	0,475	0,548	0,822	1,095
25	0,342	0,484	0,592	0,684	1,026	1,368
30	0,410	0,580	0,710	0,820	1,230	1,639
35	0,478	0,676	0,827	0,955	1,432	1,910
40	0,545	0,770	0,944	1,090	1,634	2,179
45	0,612	0,865	1,060	1,224	1,835	2,447
50	0,679	0,960	1,175	1,357	2,035	2,714
55	0,745	1,053	1,290	1,489	2,234	2,978
60	0,811	1,146	1,404	1,621	2,431	3,242
65	0,876	1,239	1,517	1,752	2,627	3,503
70	0,941	1,330	1,632	1,881	2,821	3,762
75	1,001	1,421	1,740	2,009	3,014	4,018
80	1,069	1,511	1,855	2,137	3,204	4,273
85	1,131	1,600	1,959	2,262	3,393	4,524
90	1,189	1,682	2,062	2,385	3,575	4,769

Tab. 3. Tabuľka hodnôt k_0 v závislosti od φ .

5°	10°	15°	20°	25°	30°
0,01374	0,01373	0,01371	0,01369	0,01368	0,01366
35°	40°	45°	50°	55°	60°
0,01364	0,01362	0,01359	0,01357	0,01354	0,01351
65°	70°	75°	80°	85°	90°
0,01347	0,01344	0,013339	0,01335	0,01330	0,01327

7. Analýza nameraných údajov

Údaje získané obidvoma postupmi sú približne rovnaké. S rastúcou hodnotou φ boli riešenia čoraz menej numericky stabilné. Veľkou mierou sa na neurčitosti výsledkov pre vyššie hodnoty φ podpísali aj rastúce hodnoty x_2^0 potrebné pre testovanie, či je systém už utlmený alebo nie. Prihliadajúc k týmto skutočnostiam možno analýzou tabuliek výsledných hodnôt dospieť k hypotéze, že výsledná funkcia parametrov a , b je lineárna v premennej φ za predpokladu $b = a \sin(\varphi)$.

8. Riešenie pozdĺž hamiltoniánu

Ďalšia možnosť získania približnej hodnoty c_0 je vyjadriť riešenie tlmeného a buďeného kyvadla ako funkciu pozdĺž hamiltoniánov systému bez tlmenia a buďenia a systému bez tlmenia s konštantným buďením.

Nech H_0 je hamiltonián systému bez buďenia a bez tlmenia a H_b je hamiltonián systému s konštantným buďením bez tlmenia. Potom pre tlmený a buďený systém platí:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b - a \sin x_1 - c x_2}{x_2}$$

$$\frac{x_2^2}{2} = b x_1 + a \cos x_1 - c \int x_2(x_1) dx_1$$

Nech $g(x_1) = H_0(x_1, x_2(x_1))$.

Potom:

$$\frac{dH_0}{dx_1} = b - cx_2 = b - c\sqrt{2H_0(x_1, x_2(x_1)) + 2a \cos x_1}$$

$$g(x_1) = b - c\sqrt{2H_0(x_1, x_2(x_1)) + 2a \cos x_1}$$

Keďže nás zaujímajú periodické riešenia druhého druhu, potom pre $x_1^0 = \pi - \arcsin(b/a)$ a

$$x_1^0 = 3\pi - \arcsin(b/a) \text{ platí :}$$

$$g(x_1^0) = g(x_1^0 + 2\pi) = \sqrt{a^2 - b^2}$$

V prípade vyjadrenia H_p pozdĺž riešenia buďeného kyvadla nech platí $g_1(x_1) = H_p(x_1, x_2(x_1))$, potom

$$g_1(x_1) = -c\sqrt{2H_0(x_1, x_2(x_1)) + bx_1 + 2a \cos x_1}$$

$$g_1(x_1^0) = -b\pi + b \sin^{-1} \frac{b}{a} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

pre $x_1^0 = \pi - \arcsin(b/a)$ a

$$g_1(x_1^0) = -3b\pi + b \sin^{-1} \frac{b}{a} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

Pre $x_1^0 = 3\pi - \arcsin(b/a)$.

Problém sa transformoval z nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu na nelineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu.

Pretože hľadáme periodické riešenie druhého druhu, v prípade systému bez tlmenia a bez buďdenia musia byť

hodnoty hamiltoniánu v bodoch (A, B) a $(A+2\pi, B)$ rovnaké. Pre systém s konštantným buďdením budú hodnoty hamiltoniánu v bodoch (A, B) a $(A+2\pi, B)$ posunuté o $-2\pi b$.

9. Záver

Analytické riešenie problému je neznáme.

V prípade $a=b$ je kritický parameter $c_0 = k_0 \sqrt{a}$, pričom hodnotu k_0 sme stanovili numericky na $k_0 = 0,01355$.

V prípade $b < a$ je kritický parameter $c_0 = k_0(\varphi) \sqrt{a}$.

Funkcia $k_0(\varphi)$ vychádza z numerických experimentov v programoch MATLAB a PHASER lineárna v premennej φ , a teda $c_0 = 0,01355 \cdot \varphi \cdot \sqrt{a}$.

10. Odkazy na literatúru

- [1] Mawhin, J., Handbook of Differential Equations, Chapter 6, Elsevier, 2004, pp. 533-585
- [2] Hale, J., Kocak, H., Dynamics and Bifurcations, Springer, 1991
- [3] Tricomi, F., Sur une equation differentielle de l' electrotechnique, C. R. Acad. Sci. Paris, 1931, pp. 635-636