Okrajové úlohy pre eliptické rovnice:

(1) Riešte okrajové úlohy

$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,$

a) $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b},\ u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$

Návod: Dosaďte do rovnice funkciu $u(x, y) = X(x) \sin \frac{\pi y}{b}$ ktorá spĺňa okrajové podmienky pre $y = 0,\ y = b$ a riešte vhodnú okrajovú úlohu pre obyčajnú dif. rovnicu 2. rádu s neznámou funkciou $X(x)$. Použite hyperbolické funkcie.

b) $u(0, y) = u(a, y) = 0,\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a},\ u(x, b) = 0$

c) $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b},\ u(a, y) = 0,\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a},\ u(x, b) = 0$

Návod:Sčítajte riešenia a), b).

(2) Fourierovou metódou riešte okrajové úlohy

$\triangle u = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$

a) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \ u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = x$

b) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \ u(x, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = x$

c) $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = u(1, y) = 0,\ u(0, y) = y^2$

d) $u(x, 0) = u(x, 1) = 0,\ u(0, y) = \sin \pi y,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 1.$

(3) Fourierovou metódou riešte okrajové úlohy

$\triangle u = 0,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < \pi,$

a) $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = \ u(0, y) = 0,\ u(2, y) = y$

b) $\frac{\partial u}{\partial y} u(x, 0) = u(x, \pi) = \ u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(2, y) = y$

c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, y) = u(x, \pi) = 0,\ u(x, 0) = \sin x$

Návod: Pri integrovaní použite vzorec $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin \frac{\alpha-\beta}{2})$.

d) $u(0, y) = u(2, y) = 0,\ u(x, 0) = u(x, \pi) = x^2 - 2x.$

(4) Riešte okrajové úlohy pomocou polárnych súradníc

$\triangle u = 0,\ r^2 = x^2 + y^2 < 4.$

a) $u(2, \phi) = 1$

Návod: Riešte okrajovú úlohu $(ru'(r))' = 0,\ 0 < r < 2,$ $|u(r)| < \infty,\ u(2) = 1.$

b)$u(2, \phi) = \phi^2 - 2\pi\phi$

Návod: Použite Fourierovu metódu a integráciu per partes.

c)$u(2, \phi) = |\sin \phi|$

(5) Riešte okrajové úlohy

$\triangle u = 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0.$

a) $u(x, 0) = 0,\ u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1 - x^2$

b) $u(x, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1,$

kde $\vec{n} = \vec{r}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály.

(6) Riešte okrajové úlohy

$\triangle u = 0,\ x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0.$

a) $u(x, 0) = u(0, y) = 0,\ u(x, \sqrt{4 - x^2}) = x (= 2\cos\phi)$

b) $u(x, 0) = \ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0,\ u(x, \sqrt{4 - x^2}) = 1$

(7) Riešte okrajové úlohy

$\triangle u = 0,\ 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y > 0.$

a) $u(x, 0) = 0,\ u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1,\ u(x, \sqrt{4 - x^2}) = 2$

b) $u(x, 0) = 0,\ \ u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, \sqrt{4 - x^2}) = 1$

(8) Riešte Dirichletove okrajové úlohy

$$\triangle u = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0$$

pre priehyb kruhovej membrány Ω s polomerom $a > 0$, ak

a) $f(x, y) = A(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = Axy$.

Návod: Vyjadrite rovnicu v polárnych súradniciach.

Hľadajte radiálne symetrické riešenie (nezávislé na uhlovej premennej) v Príklade a).

Nájdite riešenie $w = br^2 \sin 2\phi$ danej rovnice v Príklade b) a vyjadrite hľadané riešenie v tvare $u = v + w$, kde v je riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy $\ \triangle v = 0,\ v|_{\partial\Omega} = -w|_{\partial\Omega}$.

(9) Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$\triangle u(x, y) + \lambda u(x, y) = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2,$$

s okrajovými podmienkami

a) $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, 2) = 0,$

b) $u(0, y) = u(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 2) = 0,$

c) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = u(x, 2) = 0,$

(10) Riešte okrajové úlohy

$$-\triangle u = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega$$

pre priehyb štvorcovej membrány $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, ak

a) $f(x, y) = 1,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$

b) $f(x, y) = 1,\ u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0,$

c) $f(x, y) = xy,\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0.$

Návod: Vyjadrite riešenie v tvare dvojného Fourierovho radu podľa úplneho ortogonálneho systému vlastných funkcií úlohy $\triangle u + \lambda u = 0$ s príslušnými homogénnymi okrajovými podmienkami.

(11) Riešte okrajové úlohy $\quad -\triangle u = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega$

pre priehyb obdĺžnikovej membrány $\Omega = (0, \pi) \times (0, 1)$, ak

a) $f(x, y) = x,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$

b) $f(x, y) = y,\ u(0, y) = u(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0,$

c) $f(x, y) = y \sin x,\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0.$