

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \quad (2.26)$$

Nech  $\mathbf{V}(t)$  je matica typu  $m \times n$ , ktorej stĺpce sú bázoové funkcie  $n$  - lineárne nezávislých riešení  $\mathbf{x}_i(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; LHSDR (2.25). Matica  $\mathbf{V}(t)$  je regulárna pre každé  $t \in \mathbb{R}$ , je tvorená lineárne nezávislými stĺpcovými vektormi. Nazývame ju *fundamentálnou maticou* systému  $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ .

Všeobecné riešenie homogénneho systému  $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$  má tvar

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{V}(t) \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

kde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  je ľubovoľný stĺpcový vektor. Podľa vety 3.1 o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatkovej úlohy pre systém diferenciálnych rovníc existuje práve jedno riešenie  $\mathbf{x}_0$  začiatkovej úlohy (2.25), (2.26). Funkcia  $\mathbf{x}_0$  môže byť vyjadrená v tvare

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{V}(t) \mathbf{c}_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

pričom vektor  $\mathbf{c}_0$  určíme na základe začiatkovej podmienky (2.26). Dostaneme vzťahy

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{V}(0)^{-1} \mathbf{b}$$

a

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{V}(t) \mathbf{V}(0)^{-1} \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

Nevýhodou použitia posledného vzťahu je hľadanie inverznej matice  $\mathbf{V}(0)^{-1}$ . Vzťah sa zjednoduší v prípade fundamentálnej matice spĺňajúcej podmienku  $\mathbf{V}(0) = \mathbf{I}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matica typu  $n \times n$ .

### Definícia 3.3.

Fundamentálna matica  $\mathbf{U}(t)$ , ktorá spĺňa podmienku

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{I} \quad (2.29)$$

sa nazýva *standardná fundamentálna matica* a označuje

$$\mathbf{U}(t) = \exp \mathbf{A} t = e^{\mathbf{A} t} \quad (2.30)$$

Standardnú fundamentálnu maticu nazývame aj *exponenciálnou maticou* napriek tomu, že jej prvky nemusia byť exponenciálne funkcie. Názov aj označenie súvisí s vlastnosťami, ktoré sú analogické ako pri reálnej exponenciálnej funkcii:

$$i) (\exp \mathbf{A} t)' = \mathbf{A} \exp \mathbf{A} t$$

$$ii) \exp \mathbf{A} 0 = \mathbf{I}$$

$$iii) \exp \mathbf{A}(t+s) = \exp \mathbf{A} t \exp \mathbf{A} s$$

$$iv) \text{ existuje } (\exp \mathbf{A} t)^{-1} = \exp (-\mathbf{A} t)$$

Vlastnosti i), ii) vyplývajú priamo z definície standardnej fundamentálnej matice. Deriváciou maticovej funkcie  $\mathbf{U}(t)$  rozumieme maticovú funkciu  $\mathbf{U}'(t)$ , ktorej prvky sú derivácie príslušných prvkov maticovej funkcie  $\mathbf{U}(t)$ . Z definície matice  $\exp \mathbf{A} t$  vyplýva, že riešenie  $\mathbf{x}_0$  začiatkovej úlohy (2.25), (2.26) má tvar

$$\mathbf{x}_0(t) = e^{\mathbf{A} t} \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

súčasne platí

$$\mathbf{x}_0(t+s) = e^{\mathbf{A}(t+s)} \mathbf{b} = e^{\mathbf{A} t} e^{\mathbf{A} s} \mathbf{b}, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (2.32)$$

pretože funkcia  $t \rightarrow \mathbf{x}_0(t+s)$  je riešením začiatkovej úlohy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(s) = e^{\mathbf{A} s} \mathbf{b}$$

pretože vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  je ľubovoľný, zo vzťahu (2.32) vyplýva vlastnosť iii). Vlastnosť iv) potom vyplýva z vlastností ii), iii).

Vzťah (2.31) možno zovšeobecniť pomocou substitúcie  $s + \tau = t$  aj na riešenie začiatkovej úlohy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{b} \quad (2.34)$$

ktoré má tvar

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Vzťah (2.35) je zovšeobením tvaru riešenia začiatkovej úlohy pre lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{b}; \quad \mathbf{a}, \tau, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$$

ktoré má tvar

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{a}(t-\tau)} \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}$$

### Príklad 3.8

Pomocou štandardnej fundamentálnej matice riešte začiatkovú úlohu

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1(0) = -1 \quad (2.36)$$

$$\mathbf{x}'_2 = -5\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_2(0) = 2$$

Riešenie. Matica systému je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Stĺpce matice  $e^{\mathbf{A} t}$  sú riešenia homogénneho systému

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \quad (2.37)$$

$$\mathbf{x}'_2 = -5\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

spĺňajúce začiatkové podmienky

$$\mathbf{x}_1(0) = 1, \quad \mathbf{x}_2(0) = 0 \quad (2.38)$$

resp.

$$\mathbf{x}_1(0) = 0, \quad \mathbf{x}_2(0) = 1 \quad (2.39)$$

Charakteristická rovnica

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$



má komplexne združené korene - vlastné hodnoty matice  $A$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Vlastnej hodnote  $\lambda_1 = 2i$  matice  $A$  zodpovedá vlastný vektor  $b = (1, -1+2i)^T$ . Komplexným riešením systému (2.37) je potom funkcia

$$y(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\cos 2t - 2i \sin 2t + i(2\cos 2t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

Reálne lineárne nezávislé riešenia majú potom tvar

$$x_1(t) = \operatorname{Re} y(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$x_2(t) = \operatorname{Im} y(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie LHSR (2.37) má tvar

$$x_1(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$x_2(t) = c_1(-\cos 2t - 2\sin 2t) + c_2(2\cos 2t - \sin 2t)$$

Začiatočné podmienky (2.38), resp. (2.39) spĺňajú funkcie

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ -\frac{5}{2} \sin 2t \end{pmatrix}, u_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2t \\ \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix},$$

ktoré sú súčasne riešeniami systému (2.37). Štandardná fundamentálna matica má potom tvar

$$U(t) = e^{At} = (u(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t & \frac{1}{2} \sin 2t \\ -\frac{5}{2} \sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix}$$

Riešenie začiatočnej úlohy (2.36) potom je

$$x_0(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - 3\sin 2t \end{pmatrix}$$

Metóda hľadania maticovej funkcie  $e^{At}$  použitá v predchádzajúcom príklade je dosť práca a z hľadiska výpočtovej zložitosti je ekvivalentná s výpočtom inverznej matice  $V(0)^{-1}$ , ktorá vystupuje vo vzorci (2.28). Nasledujúca metóda výpočtu štandardnej fundamentálnej matice je účinnejšia, pretože používa len vlastné hodnoty matice  $A$ , ale nie vlastné vektory. Navyše namiesto riešení lineárnych algebrických rovníc sa rieši  $n$  jednoduchých začiatočných úloh pre lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu 1. rádu. Metódu navrhol Putzer v práci [18] a je podrobnejšie odvodená v knihe [17].

### Veta 3.6. Putzerova metóda

Nech  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú všetky vlastné hodnoty matice  $A$ , pričom každá vlastná hodnota je zapísaná toľkokrát koľko je jej násobnosť. Nech matice  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  a funkcie  $q_1, \dots, q_n$  spĺňajú vzťahy:  $P_0 = I$

$$P_1 = (A - \lambda_1 I)P_0 = A - \lambda_1 I$$

$$P_j = (A - \lambda_j I)P_{j-1}$$

$$P_{n-1} = (A - \lambda_{n-1} I)P_{n-2}$$

$$q'_1 = \lambda_1 q_1, q_1(0) = 1,$$

$$q'_2 = \lambda_2 q_2 + q_1(t), q_2(0) = 0$$

$$q'_j = \lambda_j q_j + q_{j-1}(t), q_j(0) = 0$$

$$q'_n = \lambda_n q_n + q_{n-1}(t), q_n(0) = 0; t \in \mathbb{R}$$

Potom matica

$$U(t) = q_1(t)P_0 + q_2(t)P_1 + \dots + q_n(t)P_{n-1}, t \in \mathbb{R}$$

je štandardná fundamentálna matica  $e^{At}$ .

### Príklad 3.9

Nájdime maticovú funkciu  $e^{At}$ , ak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenie. Matica  $A$  je matica LHSR  $x' = Ax$  z príkladu 3.6. Má trojnásobnú vlastnú hodnotu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Vytvoríme matice  $P_0, P_1, P_2$  a funkcie  $q_1, q_2, q_3$  podľa predchádzajúcej vety

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1 = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (A - I)P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q'_1 = q_1, q_1(0) = 1 \Rightarrow q_1(t) = e^t$$

$$q'_2 = q_2 + e^t, q_2(0) = 0 \Rightarrow q_2(t) = te^t$$

$$q'_3 = q_3 + te^t, q_3(0) = 0 \Rightarrow q_3(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t$$

Hľadaná štandardná fundamentálna matica je maticová funkcia

$$e^{At} = q_1(t)P_0 + q_2(t)P_1 + q_3(t)P_2 =$$

$$e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}$$

Pričom  $t \in \mathbb{R}$ .



# CVIČENIA 3.2

V úlohách 1 - 20 riešte homogénne systémy lineárnych diferenciálnych rovníc:

1.  $x_1' = 4x_1 - 3x_2$   
 $x_2' = 5x_1 - 4x_2$
2.  $x_1' = 7x_1 + 6x_2$   
 $x_2' = 2x_1 + 6x_2$
3.  $x_1' = x_1 + x_2$   
 $x_2' = 8x_1 - x_2$
4.  $x_1' = x_1 + x_2$   
 $x_2' = -5x_1 - x_2$
5.  $x_1' = x_1 + 3x_2$   
 $x_2' = -3x_1 + x_2$
6.  $x_1' = 2x_1 + x_2$   
 $x_2' = 3x_1 + 4x_2$
7.  $x_1' = x_1 - x_2$   
 $x_2' = -4x_1 + x_2$
8.  $x_1' = x_1 + x_2$   
 $x_2' = -2x_1 + 3x_2$
9.  $x_1' = -7x_1 + x_2$   
 $x_2' = -2x_1 - 5x_2$
10.  $x_1' = x_1 - 3x_2$   
 $x_2' = 3x_1 + x_2$
11.  $x_1' = x_1 - x_2 + x_3$   
 $x_2' = x_1 + x_2 - x_3$   
 $x_3' = 2x_1 - x_2$
12.  $x_1' = x_1 - 2x_2 - x_3$   
 $x_2' = -x_1 + x_2 + x_3$   
 $x_3' = x_1 - x_3$
13.  $x_1' = x_1 - x_2 - x_3$   
 $x_2' = x_1 + x_2 + x_3$   
 $x_3' = 3x_1 + x_3$
14.  $x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3$   
 $x_2' = x_1 + 2x_3$   
 $x_3' = -2x_1 + x_2 - x_3$
15.  $x_1' = 2x_1 + x_2$   
 $x_2' = -x_1 + 4x_2$
16.  $x_1' = 3x_1 - x_2$   
 $x_2' = 4x_1 - x_2$
17.  $x_1' = 4x_1 - x_2 - x_3$   
 $x_2' = x_1 + 2x_2 - x_3$   
 $x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3$
18.  $x_1' = x_1 - x_2 + x_3$   
 $x_2' = x_1 + x_2 - x_3$   
 $x_3' = -x_2 + 2x_3$
19.  $x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3$   
 $x_2' = x_1 + x_2 + x_3$   
 $x_3' = 4x_1 - x_2 + 4x_3$
20.  $x_1' = 2x_1 + x_2$   
 $x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3$   
 $x_3' = -x_1 + 2x_2 + 3x_3$

V cvičeniach 21 - 32 nájdite riešenia začiatočných úloh.

21.  $x_1' = -5x_1 + 2x_2$   
 $x_2' = -x_1 - 7x_2$   
 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$
22.  $x_1' = x_1 - 3x_2$   
 $x_2' = 4x_1 - 6x_2$   
 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

23.  $x_1' = x_1 + 2x_2$   
 $x_2' = 4x_1 + 3x_2$   
 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$
24.  $x_1' = x_2$   
 $x_2' = -2x_1 + 2x_2$   
 $x_1(0) = 3, x_2(0) = 1$
25.  $x_1' = x_2$   
 $x_2' = 12x_1 - x_2$   
 $x_1(0) = 2, x_2(0) = -1$
26.  $x_1' = x_2, x_1(0) = 3$   
 $x_2' = x_3, x_2(0) = -1$   
 $x_3' = x_2, x_3(0) = 3$
27.  $x_1' = x_2, x_1(0) = 0$   
 $x_2' = x_3, x_2(0) = -1$   
 $x_3' = -x_2, x_3(0) = 1$
28.  $x_1' = x_3, x_1(0) = -1$   
 $x_2' = -x_1 + x_3, x_2(0) = 2$   
 $x_3' = -x_2 + x_3, x_3(0) = 1$
29.  $x_1' = -3x_1 - x_2, x_1(0) = 1$   
 $x_2' = x_1 - x_2, x_2(0) = 1$
30.  $x_1' = 5x_1 + 3x_2$   
 $x_2' = -3x_1 - x_2$   
 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 2$
31.  $x_1' = -x_1 + x_2 + x_3$   
 $x_2' = x_1 - x_2 + x_3$   
 $x_3' = x_1 + x_2 + x_3$   
 $x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = 0$
32.  $x_1' = x_2 + x_3, x_1(0) = -1$   
 $x_2' = x_1 + x_3, x_2(0) = 1$   
 $x_3' = x_1 + x_2, x_3(0) = 0$

V cvičeniach 33 - 38 nájdite štandardnú fundamentálnu maticu  $e^{At}$  a použite ju na riešenie začiatočných úloh  $x' = Ax, x(0) = b$ , ak

33.  $A = \begin{pmatrix} 7 & -18 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
34.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
35.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
36.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
36.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
38.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

## VÝSLEDKY CVIČENÍ 3.2

1.  $c_1 e^t + 3c_2 e^{-t}, c_1 e^t + 5c_2 e^{-t}$
2.  $2c_1 e^{10t} + 3c_2 e^{3t}, c_1 e^{10t} - 2c_2 e^{3t}$
3.  $c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}, 2c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-3t}$
4.  $c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, -c_1 (\cos 2t + 2 \sin 2t) + c_2 (2 \cos 2t + \sin 2t)$
5.  $e^t (c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t), e^t (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$
6.  $c_1 e^t + c_2 e^{5t}, -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$
7.  $c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t}$
8.  $e^{2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t), e^{2t} [c_1 (\cos t - \sin t) + c_2 (\cos t + \sin t)]$



9.  $e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ ,  $e^{-6t}[(c_1 + c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t]$
10.  $e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$ ,  $e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)$
11.  $c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$ ,  $c_1 e^t - 3c_3 e^{-t}$ ,  $c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t}$
12.  $c_1 + 3c_2 e^{2t}$ ,  $-2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$ ,  $c_1 + c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t}$
13.  $2e^t(c_2 \sin 2t + c_3 \cos 2t)$ ,  $e^t(c_1 - c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)$ ,  
 $e^t(-c_1 - 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t)$
14.  $c_2(\cos t + \sin t) + 2c_3 \sin t$ ,  $2c_1 e^t + c_2(\cos t + \sin t) + 2c_3 \sin t$ ,  
 $c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3(\cos t - \sin t)$
15.  $(c_1 + c_2 t)e^{3t}$ ,  $(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{3t}$
16.  $(c_1 + c_2 t)e^t$ ,  $(2c_1 - c_2 + 2c_2 t)e^t$
17.  $c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3)e^{3t}$ ,  $c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ ,  $c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}$
18.  $(c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}$ ,  $(c_1 - 2c_2 + c_2 t)e^t$ ,  $(c_1 - c_2 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}$
19.  $c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$ ,  $c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$ ,  $-c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}$
20.  $c_1 e^{2t} + e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$ ,  $e^{3t}[(c_2 + c_3) \cos t + (c_3 - c_2) \sin t]$ ,  
 $c_1 e^{2t} + e^{3t}[(2c_2 - c_3) \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t]$
21.  $e^{-6t}(\cos t - \sin t)$ ,  $e^{-6t} \cos t$
22.  $-3e^{-3t} + 4e^{-2t}$ ,  $3e^{-3t} - 3e^{-2t}$
23.  $e^{5t} + e^{-t}$ ,  $2e^{5t} - e^{-t}$
24.  $e^t(3 \cos t - 2 \sin t)$ ,  $e^t(\cos t - 5 \sin t)$
25.  $e^{3t} + e^{-4t}$ ,  $-4e^{-3t} + 4e^{-2t}$
26.  $e^t + 2e^{-t}$ ,  $e^t - 2e^{-t}$ ,  $e^t + 2e^{-t}$
27.  $1 - \cos t - \sin t$ ,  $\sin t - \cos t$ ,  $\sin t + \cos t$
28.  $-e^t + 2 \sin t$ ,  $2 \cos t + 2 \sin t$ ,  $-e^t + 2 \cos t$
29.  $(1 - 2t)e^{-2t}$ ,  $(1 + 2t)e^{-2t}$
30.  $6te^{2t}$ ,  $(2 - 6t)e^{2t}$
31.  $\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$ ,  $\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$ ,  $-\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$
32.  $-e^{-t}$ ,  $e^{-t}$ ,  $0$
33.  $\begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 6e^{-2t} - 6e^t \\ 3e^{-2t} - 2e^t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 9e^t - 8e^{-2t} \\ 3e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}$
34.  $e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 4t \end{pmatrix}$ ,  $e^t \begin{pmatrix} -t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$ ,  $e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 2 - 4t \end{pmatrix}$
35.  $\begin{pmatrix} \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t & \frac{5}{2} - \sin 2t \\ -\frac{1}{2} \sin 2t & \frac{1}{2} \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \cos 2t - 3 \sin 2t \\ -\frac{3}{2} \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$

36.  $e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ ,  $e^t \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \end{pmatrix}$
37.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} \\ 2e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$
38.  $\begin{pmatrix} \sin t + e^t & \sin t & \cos t - \sin t - e^t \\ \cos t - e^t & \cos t & -\cos t - \sin t + e^t \\ \sin t & \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \cos t - 2e^t \\ -3 \sin t + 2e^t \\ 3 \cos t \end{pmatrix}$



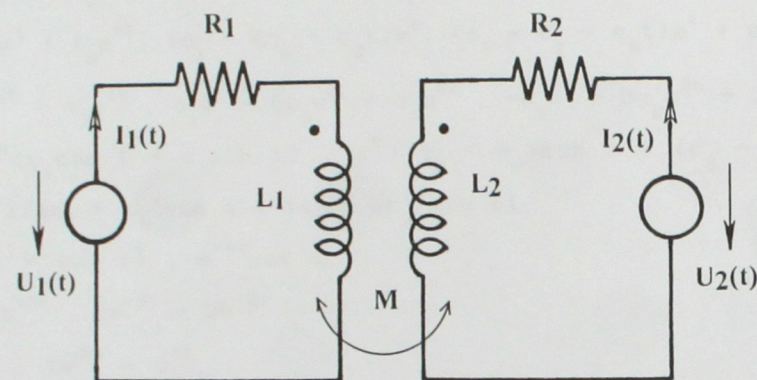
### 3.3. LINEÁRNE NEHOMOGENÉ SYSTÉMY DIFERENCIÁLNÝCH ROVNÍČ

Budeme sa zaoberať systémami diferenciálnych rovníc tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $a_{ij}:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  sú spojité funkcie. Systém (3.1) sa nazýva *lineárny nehomogénny systém diferenciálnych rovníc - LNSDR*.

Typickou aplikáciou lineárnych nehomogénnych systémov v elektrotechnike je výpočet priebehov prúdov v induktívne viazaných obvodoch (obr.20).



Obr. 20

Induktívne viazané obvody

Ak  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  sú vstupné napätia v obvodoch,  $L_1$ ,  $L_2$  koeficienty samoindukcie,  $M$  koeficient vzájomnej indukcie,  $R_1$ ,  $R_2$  odpory, tak podľa 2. Kirchhoffovho zákona spĺňajú prúdové funkcie  $I_1$ ,  $I_2$  systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} L_1 I_1' + M I_2' + R_1 I_1 &= U_1(t) \\ M I_1' + L_2 I_2' + R_2 I_2 &= U_2(t) \end{aligned}$$

Podobne ako v homogénom prípade môžeme systém (3.1) zapísať vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (3.2)$$

kde  $A(t)$  je matica koeficientov a  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ . Pravá strana systému (3.1) spĺňa predpoklady vety 3.1 o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatkovej úlohy pre systém diferenciálnych rovníc. Teda existuje

práve jedno riešenie  $x \in [C^1(a,b)]^n$  systému (3.2) spĺňajúce začiatkové podmienky

$$x_i(\tau) = \xi_i \quad (3.3)$$

$$\tau \in (a, b), \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

Podobne ako v prípade lineárnej nehomogénnej rovnice  $n$ -tého rádu je možné vyjadriť všeobecné riešenie LNSDR (3.2) ako súčet všeobecného riešenia príslušného homogénneho systému a ľubovoľného (partikulárneho) riešenia systému (3.2). Hovorí o tom nasledujúca veta, ktorú možno dokázať rovnakým spôsobom ako vetu 2.5 z časti 2.3.

**Veta 3.6.**

Nech  $x_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  je ľubovoľné riešenie LNSDR (3.2). Potom všeobecné riešenie systému (3.2) má tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + x_f(t), \quad t \in (a, b) \quad (3.4)$$

kde  $c_1, \dots, c_n$  sú ľubovoľné reálne čísla a

$$\mathfrak{B} = \{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$$

je báza priestoru  $X_0$  všetkých riešení LHSDR

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (3.5)$$

Teda každé riešenie LNSDR (3.2) má tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_f(t), \quad t \in (a, b)$$

kde

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

je všeobecné riešenie LHSDR (3.5).

Ďalej použijeme metódu *variácie konštánt* na získanie riešenia  $\mathbf{x}_f$  LNSDR (3.2). Funkciu  $\mathbf{x}_f$  hľadáme v tvare

$$\mathbf{x}_f(t) = C_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dots + C_n(t)\mathbf{x}_n(t) \quad (3.6)$$

kde  $C_1(t), \dots, C_n(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ; sú (neznáme) diferencovateľné funkcie. Dosadením funkcie  $x_r$  do systému (3.2) dostaneme rovnosť

$$\sum_{i=1}^n C_1'(t) x_1(t) = \sum_{i=1}^n C_1(t) [A(t) x_1(t) - x_1'(t)] + f(t), \quad t \in (a, b)$$

Funkcie  $x_i$  sú riešeniami lineárneho homogénneho systému (3.5), a teda

$$A(t)x_1(t) - x_1'(t) = 0, \quad t \in (a, b)$$

Potom dostaneme systém

$$C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = f(t) \quad (3.7)$$

na určenie neznámych funkcií  $C_1(t), \dots, C_n(t)$ .

Ak vyjadríme bázoové funkcie ako stĺpcové vektory



$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

dostaneme systém lineárnych algebrických rovníc vzhľadom na neznáme derivácie  $C'_1(t), \dots, C'_n(t)$ :

$$\begin{aligned} x_{11}(t)C'_1(t) + \dots + x_{1n}(t)C'_n(t) &= f_1(t) \\ \dots & \\ x_{n1}(t)C'_1(t) + \dots + x_{nn}(t)C'_n(t) &= f_n(t), \quad t \in (a, b) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Systém (3.9) možno riešiť Cramerovým pravidlom. Označme

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

determinant matice systému (3.9). Pretože stĺpce tejto matice sú lineárne nezávislé báзовé funkcie  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ , je

$$W(t) \neq 0 \quad \text{pre všetky } t \in (a, b)$$

V opačnom prípade by existoval bod  $\tau \in (a, b)$  a čísla  $c_1, \dots, c_n$ , pre ktoré

$$c_1 \mathbf{x}_1(\tau) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(\tau) = 0$$

Funkcia  $\mathbf{y}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t)$  je potom riešením začiatkovej úlohy

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\tau) = 0 \quad (3.11)$$

Na základe vety 3.1. o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatkovej úlohy (3.11) dostávame  $\mathbf{y} = 0$ , čo je v spore s lineárnou nezávislosťou funkcií  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .

Determinant  $W(t)$  nazývame *Wronského determinantom*, skrátene *Wronskian*. Použitím Cramerovho pravidla dostaneme vzťahy

$$C'_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad t \in (a, b) \quad (3.12)$$

kde

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & f_1(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & f_n(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Zo vzťahov (3.12) potom dostaneme funkcie  $C_i$  v tvare integrálov

$$C_i(t) = \int_{\tau}^t \frac{W_i(s)}{W(s)} ds, \quad i = 1, \dots, n; \quad \tau, t \in (a, b) \quad (3.13)$$

Všeobecné riešenie LNSDR (3.2) má potom tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_f(t) = [c_1 + C_1(t)]\mathbf{x}_1(t) + \dots + [c_n + C_n(t)]\mathbf{x}_n(t) \quad (3.14)$$

kde  $c_1, \dots, c_n$  sú ľubovoľné reálne čísla a  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  sú reálne funkcie definované v (3.13).

### Príklad 3.8

Riešme systém obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 \\ x'_2 &= -x_1 + t \\ x'_3 &= x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Riešenie. a) V príklade 3.7 sme riešili príslušný homogénny systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x'_2 &= -x_1 \\ x'_3 &= x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Všeobecné riešenie tohto systému je

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t),$$

kde

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Nájdeme jedno riešenie nehomogénneho systému (3.15). Riešenie  $\mathbf{x}_f$  má tvar

$$\mathbf{x}_f(t) = C_1(t)\mathbf{x}_1(t) + C_2(t)\mathbf{x}_2(t) + C_3(t)\mathbf{x}_3(t)$$

kde

$$C_i(t) = \int_0^t \frac{W_i(s)}{W(s)} ds, \quad i = 1, 2, 3$$

Dalej vypočítame jednotlivé determinanty. Wronského determinant je determinant matice so stĺpcovými vektormi  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t)$ :

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & e^t \\ -\sin t & \cos t & -e^t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = -e^t$$

Determinanty  $W_i(t)$  dostaneme po nahradení  $i$ -teho stĺpca vektorovou funkciou

$$f(t) = \begin{vmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dostávame

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} -1 & \sin t & e^t \\ t & \cos t & -e^t \\ 0 & \sin t & 0 \end{vmatrix} = (t-1)e^t \sin t$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t & -1 & e^t \\ -\sin t & t & -e^t \\ \cos t & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-t)e^t \cos t$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & -1 \\ -\sin t & \cos t & t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = 1$$



Funkcie  $C_i(t)$  majú potom tvar

$$C_1(t) = \int_0^t \frac{W_1(s)}{W(s)} ds = \int_0^t (1-s) \sin s ds = 1 - \sin t + (t-1) \cos t$$

$$C_2(t) = \int_0^t \frac{W_2(s)}{W(s)} ds = \int_0^t (s-1) \cos s ds = -1 + \cos t + (t-1) \sin t$$

$$C_3(t) = \int_0^t \frac{W_3(s)}{W(s)} ds = -\int_0^t e^s ds = 1 - e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Partikulárne riešenie LNSDR (3.15) je

$$x_f = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + C_3(t)x_3(t)$$

a všeobecné riešenie daného systému má tvar

$$x(t) = [c_1 + C_1(t)]x_1(t) + [c_2 + C_2(t)]x_2(t) + [c_3 + C_3(t)]x_3(t)$$

$$c_1, c_2, c_3, t \in \mathbb{R}$$

### Poznámka 3.5

Metóda variácie konštánt sa môže použiť aj pri riešení lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovníc  $n$ -tého rádu. Rovnica

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (3.17)$$

sa dá prepísať na lineárny nehomogénny systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\dots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_{n-1} + f(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde  $x = x_1$ .

Ak funkcie

$$x_1(t), \dots, x_n(t), \quad t \in (a, b)$$

tvoria bázu priestoru všetkých riešení lineárnej homogénnej rovnice

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (3.19)$$

tak vektorové funkcie

$$x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \dots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

tvoria bázu priestoru všetkých riešení homogénneho systému rovníc príslušného k nehomogénnemu systému (3.18). Wronského determinant utvorený z tejto bázy

má potom tvar

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t), \dots, x_1(t), \dots, x_n(t) \\ x_1'(t), \dots, x_1'(t), \dots, x_n'(t) \\ \dots \\ x_1^{(n-1)}(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t), \dots, x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (a, b)$$

Ostatné determinanty používané pri metóde variácie konštánt sú:

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_1(t), \dots, 0, \dots, x_n(t) \\ x_1'(t), \dots, 0, \dots, x_n'(t) \\ \dots \\ x_1^{(n-1)}(t), \dots, f(t), \dots, x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (a, b)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Všeobecné riešenie rovnice (3.17) dostaneme ako súčet všeobecného riešenia homogénnej rovnice (3.18) a partikulárneho riešenia rovnice (3.17) získaného metódou variácie konštánt :

$$x(t) = x_h(t) + x_f(t) = \sum_{i=1}^n [c_i + C_i(t)]x_i(t)$$

kde

$$C_i(t) = \int_{\tau}^t \frac{W_i(s)}{W(s)} ds, \quad i = 1, \dots, n; \quad \tau, t \in (a, b)$$

### Príklad 3.9

Riešme začiatočnú úlohu

$$x'' + x = \operatorname{tg} t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \quad (3.20)$$

Riešenie. a) Všeobecné riešenie homogénnej rovnice

$$x'' + x = 0$$

je

$$x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

b) Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice

$$x'' + x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.21)$$

má tvar

$$x_f(t) = \left(\int_0^t \frac{W_1(s)}{W(s)} ds\right) \cos t + \left(\int_0^t \frac{W_2(s)}{W(s)} ds\right) \sin t$$

kde

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0, & \sin t \\ \operatorname{tg} t, & \cos t \end{vmatrix} = -\sin t \operatorname{tg} t$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t, & 0 \\ -\sin t, & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



a teda

$$x_f(t) = -\left(\int_0^t \sin s \operatorname{tg} s \, ds\right) \cos t + \left(\int_0^t \sin s \, ds\right) \sin t = \\ = \ln \left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^{1/2} \cos t + (1 - \cos t) \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Všeobecné riešenie rovnice (3.21) má potom tvar

$$x(t) = x_h(t) + x_f(t) = c_1 + \ln \left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^{1/2} \cos t + (c_2 - \cos t) \sin t$$

c) Konštanty  $c_1, c_2$  určíme tak, aby boli splnené začiatočné podmienky

$$x(0) = c_1 = 1, \quad x'(0) = c_1 - 1 + c_2 - 1 = 0.$$

Teda  $c_1 = c_2 = 1$  a riešením začiatočnej úlohy (3.20) je funkcia

$$x(t) = \sin t + [1 - \sin t + \ln \left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^{1/2}] \cos t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia  $x_f$  - riešenie LNSDR (3.15) získané metódou variácie konštánt spĺňa začiatočnú podmienku  $x_f(\tau) = 0$ . Potom riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = A(t)x + f(t), \quad t \in (a, b) \quad (3.22)$$

$$x(\tau) = d \quad (3.23)$$

vyjadríme v tvare

$$x = x_0 + x_f \quad (3.24)$$

kde  $x_0$  je riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = A(t)x, \quad x(\tau) = d.$$

V prípade konštantnej matice koeficientov  $A(t) = A$  môžeme riešenie úlohy (3.22), (3.23) vyjadriť aj pomocou štandardnej fundamentálnej matice  $e^{At}$  v tvare, ktorý je zovšeobecnením tvaru (5.42) riešenia začiatočnej úlohy pre lineárnu nehomogénnu rovnicu 1. rádu  $x' = -kx + f(t)$  v časti 1.5 :

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} d + \int_{\tau}^t f(s) e^{A(t-s)} ds, \quad t \in (a, b) \quad (3.25)$$

Výpočty integrálov vo vzorci (3.25) sú dosť práce. V prípade pravej strany  $f$  v špeciálnom tvare je výhodnejšie použiť na výpočet partikulárneho riešenia  $x_f$  metódu neurčitých koeficientov podobne ako pri lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovniciach  $n$ -tého rádu. Uvažujme funkciu

$$f(t) = e^{\alpha t} p_m(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

kde

$$p_m(t) = t^m a_0 + t^{m-1} a_1 + \dots + a_m$$

je vektorový polynóm  $m$ -tého stupňa, ktorého koeficienty sú  $n$ -rozmerné stĺpcové vektory a  $\beta$  je komplexné číslo. Partikulárne riešenie  $x_f$  hľadáme v tvare

$$x_f(t) = e^{\beta t} q_{m+k}(t) \quad (3.27)$$

kde  $k = 0$ , ak  $\beta$  nie je vlastnou hodnotou matice  $A$ . V opačnom prípade  $k$  je násobnosť čísla  $\beta$  ako koreňa charakteristickej rovnice  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Vektorová funkcia  $q_m(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  je vektorový polynóm  $m$ -tého stupňa s neznámymi koeficientmi  $n$ -rozmernými stĺpcovými vektormi, ktoré vypočítame po dosadení funkcie (3.27) do LNSDR

$$x' = Ax + f(t) \quad (3.28)$$

a porovnaní ľavej a pravej strany systému.

Ak má pravá strana tvar

$$f = \sum_{i=1}^k f_i$$

kde  $f_i$  sú funkcie typu (3.26), je partikulárne riešenie  $x_f$  súčtom

$$x_f = \sum_{i=1}^k x_{f_i}$$

partikulárnych riešení získaných metódou neurčitých koeficientov.

Uvedenú metódu môžeme použiť aj pri riešení systémov

$$x' = Ax + e^{\alpha t} \cos \omega t p_m(t) \quad (3.29)$$

resp.

$$x' = Ax + e^{\alpha t} \sin \omega t p_m(t) \quad (3.30)$$

Nájdeme partikulárne  $x_f$  riešenie systému

$$x' = Ax + e^{(\alpha+i\omega)t} p_m(t) \quad (3.31)$$

a partikulárne riešenie systému (3.29) resp. (3.30) je potom reálnou, resp. imaginárnou časťou komplexného partikulárneho riešenia  $x_f^*$ .

### Príklad 3.10

Nájdime niektoré partikulárne riešenie LNSDR

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 4x_2 + \cos t \\ x_2' &= -x_1 - 2x_2 + \sin t \end{aligned} \quad (3.32)$$

Riešenie. Matica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

systému (3.32) má jednu dvojnásobnú vlastnú hodnotu  $\lambda_1 = 0$ . Pravú stranu systému môžeme vyjadriť v tvare

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} e^{it} \\ -ie^{it} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Namiesto systému (3.32) budeme riešiť systém

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 4x_2 + e^{it} \\ x_2' &= -x_1 - 2x_2 - ie^{it} \end{aligned} \quad (3.34)$$



Exponent 1 nie je vlastnou hodnotou matice  $A$  a teda partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$\mathbf{x}_r^*(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{it}$$

Dosadením do systému (3.32) dostaneme systém lineárnych algebrických rovníc

$$(1-2)b_1 - 4b_2 = 1$$

$$b_1 + (1+2)b_2 = -1$$

ktorého riešením je vektor  $\mathbf{b} = (-2+3i, -2i)^T$ . Teda komplexné partikulárne riešenie má tvar

$$\mathbf{x}_r^*(t) = \begin{pmatrix} -2+3i \\ -2i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} -2+3i \\ -2i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

Hľadané partikulárne riešenie pôvodného systému (3.32) potom je

$$\mathbf{x}_r(t) = \operatorname{Re} \mathbf{x}_r^*(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos t - 3 \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

### CVIČENIA 3.3

V cvičeniach 1 - 14 nájdite všeobecné riešenia daných systémov lineárnych diferenciálnych rovníc:

$$1. \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1' = -x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + 8t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1' = x_2 + t^2 \\ x_2' = x_1 + 2e^t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 8e^t \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 + 5t \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1' = -5x_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = x_1 - x_2 + e^{2t} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 2 \sin t \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 2e^t \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 + \cos t \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 + \sin t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1' = -5x_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = x_1 - 6x_2 + e^{-2t} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 3x_3 + 8e^{-t} \\ x_2' = -x_1 + x_2 \\ x_3' = -x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = -x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} + t$$

V príkladoch 15 - 17 riešte začiatkové úlohy:

$$15. \begin{cases} x_1' = x_2 - 5 \cos t, & x_1(0) = 0 \\ x_2' = 2x_1 + x_2, & x_2(0) = 6 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 4e^t, & x_1(0) = 1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2, & x_2(0) = -1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + \frac{1}{\cos t}, & x_1(0) = 2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2, & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

### VÝSLEDKY CVIČENÍ 3.3

- $(c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^t - 2, (c_1 + 2c_2 t)e^t - 3$
- $(c_1 + 2c_2)\cos 2t + (2c_1 - c_2)\sin 2t + 10t, c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t + 2t + 2$
- $c_1 e^t - c_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t, c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2$
- $-c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} + e^t - 3t + \frac{12}{5}, c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} - 3e^t + 2t - \frac{13}{5}$
- $2c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{27}e^{2t}, c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t}$
- $c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t - t \cos t, c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\sin t - \cos t) - 2t \cos t + \cos t + \sin t$
- $(c_1 + c_2 t - t^2)e^t, (c_1 - c_2 + c_2 t + 2t - t^2)e^t$
- $c_1(1 + 2t) - 2c_2 - 2 \cos t - 3 \sin t, c_1 t + c_2 + 2 \sin t$
- $(c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t + 2 \cos t \ln |\cos t| + 2t \sin t, c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln |\cos t|$
- $(c_1 - c_2 + 2c_2 t - 8t^{5/2} + 10t^{3/2})e^t, (c_1 + c_2 t - 8t^{5/2})e^t$
- $c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t \sinh t, c_1 e^t - c_2 e^{-t} + \sinh t + t \cosh t$
- $c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t}, \frac{1}{2}c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{3}{10}e^{-2t}$
- $2(c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t)e^t - 2e^{-t}, (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 3c_3)e^t - e^{-t}, (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - c_3)e^t - e^{-t}$
- $c_1 e^t + c_2 \sin t - c_3 \cos t + t, -c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + 1, c_2 \sin t - c_3 \cos t + t$
- $\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - 2 \sin t - \cos t, \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \sin t + 3 \cos t$
- $\frac{2}{3}e^t - \frac{8}{3}e^{-4t} + 3e^{5t}, -\frac{2}{3}e^t - \frac{4}{3}e^{4t} + e^{5t}$
- $(2+t)(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln |\cos t|, (4+2t) \sin t + 2 \cos t \ln |\cos t|$