

$$x_f(t) = bt e^{(1+i)t}$$

$$x_f'(t) = b[(1+i)t+1]e^{(1+i)t}$$

$$x_f''(t) = b[(1+i)^2 t + 2+2i]e^{(1+i)t} = b(2it + 2+2i)e^{(1+i)t}$$

Dosadením do rovnice (3.10) dostaneme rovnosť

$$b[2it+2+2i-2(1+i)t-2+2t]e^{(1+i)t} = 4e^{(1+i)t}$$

Porovnaním ľavej a pravej strany získame rovnosť

$$b 2i = 4$$

a teda

$$b = -2i$$

Hľadané partikulárne riešenie má potom tvar

$$x_f(t) = -2it e^{(1+i)t}, t \in \mathbb{R}$$

Pomocou LNDR s exponenciálnymi pravými stranami s komplexným exponentom riešime lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi a pravými stranami tvaru

$$f_c(t) = q_m(t)e^{\alpha t} \cos \omega t$$

a

$$f_s(t) = q_m(t)e^{\alpha t} \sin \omega t,$$

kde $q_m(t)$ je reálny polynóm stupňa m a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Funkcie $f_c(t)$, $f_s(t)$, $t \in \mathbb{R}$ môžeme vyjadriť v tvare

$$f_c(t) = \operatorname{Re} f(t), f_s(t) = \operatorname{Im} f(t)$$

kde

$$f(t) = q_m(t)e^{(\alpha+i\omega)t} = q_m(t)e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (3.11)$$

Vyššie opísaným spôsobom nájdeme (komplexné) partikulárne riešenie x_f^* diferenciálnej rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = q_m(t)e^{(\alpha+i\omega)t} \quad (3.12)$$

Položme:

$$x_f^* = \operatorname{Re} x_f^* + i \operatorname{Im} x_f^*$$

Použitím lineárneho operátora L ľavej strany rovnice (3.4) dostaneme vzťahy

$$Lx_f^* = L(\operatorname{Re} x_f^* + i \operatorname{Im} x_f^*) = L(\operatorname{Re} x_f^*) + i L(\operatorname{Im} x_f^*) =$$

$$= f = f_c + i f_s$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí získame rovnice pre reálne funkcie

$$L(\operatorname{Re} x_f^*)(t) = f_c(t) = q_m(t)e^{\alpha t} \cos \omega t$$

$$L(\operatorname{Im} x_f^*)(t) = f_s(t) = q_m(t)e^{\alpha t} \sin \omega t$$

Teda partikulárne riešenia LNDR s konštantnými koeficientami a pravými stranami $q_m(t)e^{\alpha t} \cos \omega t$, resp. $q_m(t)e^{\alpha t} \sin \omega t$ sú reálne resp. imaginárne časti rovnice (3.12) s komplexnou pravou stranou.

Príklad 2.12

Nájdime všeobecné riešenie LNDR

$$x'' - 2x' + 2x = 4e^t \sin t \quad (3.13)$$

Riešenie. Začneme s riešením LHDR

$$x'' - 2x' + 2x = 0 \quad (3.14)$$

Charakteristická rovnica

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

má komplexne združené korene $r_{1,2} = 1 \pm i$. Všeobecné riešenie rovnice (3.14) má potom tvar

$$x_h(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$$

Pravá strana LNDR (3.13) splňa vzťah

$$4e^t \sin t = \operatorname{Im} 4e^{(1+i)t}$$

Partikulárne riešenie rovnice (3.13) získame ako imaginárnu časť riešenia x_f^* rovnice s komplexnou pravou stranou

$$x'' - 2x' + 2x = 4e^{(1+i)t} \quad (3.15)$$

V príklade 2.11. sme našli riešenie rovnice (3.15)

$$x_f^*(t) = -2it e^{(1+i)t}, t \in \mathbb{R}$$

Partikulárne riešenie LNDR (3.13) potom je

$$x_s(t) = \operatorname{Im} x_f^*(t) = -2t e^t \cos t, t \in \mathbb{R}$$

Hľadané všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) =$$

$$= e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t - 2t \cos t), t \in \mathbb{R}$$

Poznámka 2.3

V prípade lineárnej nehomogénnej diferenciálnej rovnice

$$Lx = f + g$$

môžeme vyjadriť jej partikulárne riešenie x_p v tvare

$$x_p = x_f + x_g$$

kde x_f , resp. x_g sú partikulárne riešenia rovníc $Lx = f$ resp. $Lx = g$. Vyplýva to zo vzťahov

$$L(x_f + x_g) = L(x_f) + L(x_g) = f + g$$

Príklad 2.13

Nájďme všeobecné riešenie LNDR

$$x^{(4)} - x = t^2 + 5 \cos t \quad (3.16)$$

Riešenie. Najprv nájdeme všeobecné riešenie LHDR

$$x^{(4)} - x = 0 \quad (3.17)$$

Charakteristická rovnica

$$r^4 - 1 = (r-1)(r+1)(r^2+1) = 0$$

má charakteristické korene

$$r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i, r_4 = -i$$

Všeobecné riešenie rovnice (3.17) má potom tvar

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

Pravá strana nehomogénnej rovnice (3.16) má tvar

$$f(t) + g(t)$$

kde

$$f(t) = t^2, g(t) = 5 \cos t$$

Pretože 0 nie je charakteristickým koreňom, hľadáme partikulárne riešenie rovnice

$$x^{(4)} - x = t^2 \quad (3.18)$$

v tvare

$$x_f(t) = b_0 t^2 + b_1 t + b_2$$

Derivovaním funkcie x_f a dosadením do rovnice (3.18) dostaneme rovnosť

$$-b_0 t^2 - b_1 t - b_2 = t^2, t \in \mathbb{R}$$

ktorá je splnená práve vtedy, keď

$$b_0 = -1, b_1 = b_2 = 0$$

Partikulárne riešenie rovnice (3.18) potom je

$$x_f(t) = -t^2$$

Pokračujeme rovnicou

$$x^{(4)} - x = 5 \cos t \quad (3.19)$$

Nahradíme ju rovnicou s komplexnou pravou stranou

$$x^{(4)} - x = 5e^{it} \quad (3.20)$$

Pretože i je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice, vyjadríme partikulárne riešenie rovnice (3.20) v tvare

$$x_g(t) = bte^{it}$$

Po derivovaní funkcie x_g a dosadení do (3.20) dostaneme identitu

$$b(t-4i) - bt = 5$$

$$\text{potom } b = \frac{5i}{4} \text{ a}$$

$$x_g(t) = \frac{5i}{4} t e^{it}$$

Partikulárne riešenie rovnice (3.19) je reálnou časťou funkcie x_g :

$$x_g(t) = \operatorname{Re} \frac{5i}{4} t e^{it} = \frac{5}{4} t \operatorname{Re} [i(\cos t + i \sin t)] = -\frac{5}{4} t \sin t$$

Všeobecné riešenie LNDR (3.16) má potom tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_f(t) + x_g(t) = \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t - t^2 - \frac{5}{4} t \sin t \end{aligned}$$

Poznámka 2.4

Ak koeficienty lineárnej diferenciálnej rovnice, ako aj jej pravá strana sú spojité funkcie na intervale (a, b) , existuje podľa vety 2.1. práve jedno riešenie začiatočnej úlohy

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (3.21)$$

$$x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \quad (3.22)$$

$$\tau \in (a, b), \xi_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, n-1$$

Riešenie úlohy (3.21), (3.22) získame vypočítaním konštánt c_1, \dots, c_n zo všeobecného riešenia (3.3), tak aby boli splnené začiatočné podmienky (3.22). Dostaneme systém n lineárnych algebrických rovníc, ktorý má práve jedno riešenie.

Príklad 2.14

Riešme začiatočnú úlohu

$$x'' + 4x = te^t \quad (3.23)$$

$$x(0) = 1, x'(0) = -1 \quad (3.24)$$

Riešenie. V príklade 2.10 sme našli všeobecné riešenie rovnice (3.23)

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{25}\right)e^t; c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$$

Na základe začiatočných podmienok (3.24) dostaneme systém rovníc na určenie konštánt c_1, c_2 .

$$x(0) = c_1 - \frac{2}{25} = 1$$

$$x'(0) = 2c_2 + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = -1$$

Riešením tohto systému sú konštanty

$$c_1 = \frac{27}{25}, c_2 = -\frac{14}{25}$$

Riešením začiatkovej úlohy (3.23), (3.24) je potom funkcia

$$x(t) = \frac{27}{25} \cos 2t - \frac{14}{25} \sin 2t + \left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{25}\right)e^t; t \in \mathbb{R}$$

Poznámka 2.5

V tejto časti sme sa zaoberali hľadaním partikulárnych riešení lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovníc n -tého rádu s konštantnými koeficientmi a špeciálnymi pravými stranami. V prípade ľubovoľných pravých strán sa partikulárne riešenia hľadajú metódou variácie konštánt, ktorá je zovšeobecnením metódy variácie konštánty použitej pri riešení lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu. Metódou variácie konštánt sa budeme zaoberať v 3. kapitole pri nehomogénnych systémoch lineárnych diferenciálnych rovníc. Obyčajné diferenciálne rovnice n -tého rádu môžu byť vyjadrené aj pomocou systému n diferenciálnych rovníc 1. rádu.

CVIČENIA 2.3

V úlohách 1 - 3 nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc:

1. $x'' - 7x' + 10x = f(t)$, ak

a) $f(t) = 40$

b) $f(t) = 20t^2 - 28t + 14$

c) $f(t) = -12e^{3t}$

d) $f(t) = 6e^{2t}$

e) $f(t) = -e^{2t}(6t + 7)$

f) $f(t) = 65 \sin 2t$

g) $f(t) = 8e^{2t} \sin t$

2. $x'' + 4x = f(t)$, ak

a) $f(t) = t^4 - 2t$

b) $f(t) = \cos 3t$

c) $f(t) = \cos 2t$

d) $f(t) = e^{-2t}$

e) $f(t) = 2t \sin 2t$

f) $f(t) = t e^{2t} \sin 2t$

3. $x'' - 4x' + 5x = f(t)$, ak

a) $f(t) = e^{2t}$

b) $f(t) = \sin t$

c) $f(t) = 2t^2$

d) $f(t) = e^{2t} \sin t$

e) $f(t) = e^{2t} \sin 2t$

f) $f(t) = t e^{2t} \cos t$

V cvičeniach 4 - 19 nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc:

4. $x'' + x' = t$

5. $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$

6. $x'' + x = 4te^t$

7. $x'' + x' - 2x = 3te^t$

8. $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^{2t}$

9. $x'' - 3x' + 2x = t \cos t$

10. $x'' - 2x' + x = 6te^t$

11. $x'' + 4x' + 4x = te^{2t}$

12. $x'' + 2x' - 3x = t^2 e^t$

13. $x'' + 3x' - 4x = e^{-4t} + te^{-t}$

14. $x'' - x = 2e^t - t^2$

15. $x'' - 2x' + 2x = t^2 + \sin 2t$

16. $x'' + x' - 6x = t + e^{2t}$

17. $x'' + 4x = 5 \sin 3t + \cos 3t + \sin 2t$

18. $x'' + 2x' + x = e^{-t} + e^t$

19. $2x'' + x' - x = 2e^t$

20. $x'' + 4x' - 5x = 1$

21. $x'' + 2x' + 5x = -\frac{17}{2} \cos 2t$

22. $x'' + a^2 x = e^t$

23. $x'''' + 3x''' + 3x'' + x = e^{-t} \sin t$

24. $x'''' + x'' = \sin t + t \cos t$

25. $x'''' - x = t^3 - 1$

26. $x'''' - 3x'' + 2x = e^{-t}(4t^2 + 4t - 10)$

Riešte nasledujúce začiatkové úlohy:

27. $x'' + x = \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

28. $x'' + x = 4e^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -3$

29. $x'' - 2x' = 2e^t$, $x(1) = -1$, $x'(1) = 0$

30. $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$

31. $4x'' + 16x' + 15x = 4e^{-3t/2}$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -\frac{11}{2}$

32. $x'' - x' = 2(1 - t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$

33. $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$

34. $x'''' - 3x'' - 2x = 9e^{2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -3$, $x''(0) = 3$

35. $x^{(4)} + x'' = 2 \cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$,
 $x'''(0) = 0$

36. $x'' - x = 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

37. $x'' + x = \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

38. $x'' - 5x' + 6x = t + e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

39. $x'''' - x' = 3(2 - t^2)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$

40. $x'''' + 2x'' + x' = -2e^{-2t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = x''(0) = 1$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 2.3

1. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + x_p(t)$
 - a) $x_p(t) = 4$
 - b) $x_p(t) = 2t^2 + 1$
 - c) $x_p(t) = 6e^{3t}$
 - d) $x_p(t) = -2te^{2t}$
 - e) $x_p(t) = (t^2 + 3t)e^{2t}$
 - f) $x_p(t) = 3 \sin 2t + 7 \cos 2t$
 - g) $x_p(t) = (3 \cos t - \sin t)e^{2t}$
2. $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + x_p(t)$
 - a) $x_p(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$
 - b) $x_p(t) = -\frac{1}{5} \cos 3t$
 - c) $x_p(t) = \frac{t}{4} \sin 2t$
 - d) $x_p(t) = \frac{1}{8} e^{-2t}$
 - e) $x_p(t) = (\frac{t}{32} - \frac{t^2}{4}) \cos 2t$
 - f) $x_p(t) = \frac{1}{100} e^{2t} [(5t - 1) \sin 2t + (7 - 10t) \cos 2t]$
3. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + x_p(t)$
 - a) $x_p(t) = e^{2t}$
 - b) $x_p(t) = \frac{1}{8}(\cos t + \sin t)$
 - c) $x_p(t) = \frac{2}{5}t^2 + \frac{16}{25}t + \frac{44}{125}$
 - d) $x_p(t) = -\frac{t}{2} e^{2t} \cos t$
 - e) $x_p(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} \sin 2t$
 - f) $x_p(t) = \frac{1}{4}(t^2 \sin t + t \cos t)e^{2t}$
4. $c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - t$
5. $c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{5} e^{4t}$
6. $c_1 \cos t + c_2 \sin t + (2t - 2)e^t$
7. $c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + (\frac{t^2}{2} - \frac{t}{3})e^t$
8. $c_1 e^t + c_2 e^{4t} - (2t^2 - 2t + 3)e^{2t}$
9. $c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{100} (10t - 12) \cos t - \frac{1}{100} (30t + 34) \sin t$
10. $(c_1 + c_2 t + t^3)e^t$
11. $(c_1 + c_2 t)e^{-2t} + (\frac{t}{16} - \frac{1}{32})e^{2t}$
12. $c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + (\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32})e^t$

13. $c_1 e^t + c_2 e^{-4t} - \frac{t}{5} e^{-4t} - (\frac{t}{6} + \frac{1}{36})e^{-t}$
14. $c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t + t^2 + 2$
15. $e^t(c_1 \sin t + c_2 \cos t) + \frac{1}{10}(2 \cos 2t - \sin 2t) + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$
16. $c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + \frac{t}{5} e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{1}{36}$
17. $c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \sin 3t - \frac{1}{5} \cos 3t - \frac{t}{4} \cos 2t$
18. $c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t} + \frac{1}{4} e^t$
19. $c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2} + e^t$
20. $c_1 e^t + c_2 te^{-5t} - \frac{2}{10}$
21. $e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) - \frac{1}{2} \cos 2t - 2 \sin 2t$
22. $(c_1 \cos at + c_2 \sin at) - \frac{e^t}{a^2 + 1}$
23. $e^{-t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cos t)$
24. $c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{4}t \sin t - \frac{t^2}{4} \cos t$
25. $c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - t^3 - 5$
26. $(c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{-2t} + (t^2 + t - 1)e^{-t}$
27. $\cos t + \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$
28. $2 \cos t - 5 \sin t + 2e^t$
29. $e^{2t-1} - 2e^t + e - 1$
30. $e^{-t}(t - \sin t)$
31. $(1 + t)e^{-3t/2} + 2e^{-5t/2}$
32. $e^t + t^2$
33. $e^t(e^t - t^2 - t + 1)$
34. $(t - 1)(e^{2t} - e^{-t})$
35. $t - t \sin t - 2 \cos t$
36. $2 \sinh t - 2t$
37. $(1 - \frac{1}{2}t) \cos t + \frac{1}{2} \sin t$
38. $\frac{18e^t - 81e^{2t} + 58e^{3t} + 6t + 5}{36}$
39. $e^t + t^3$
40. $4 - 3e^{-t} + e^{-2t}$

2.4 VLASTNOSTI RIEŠENÍ LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC DRUHÉHO RÁDU

Ako sme už videli v časti 2.1 pohybové rovnice odvodené z druhého Newtonovho zákona sú lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu s neznámou funkciou vyjadrujúcou pohyb hmotného bodu, alebo telesa. Tieto rovnice modelujú aj ďalšie javy, ako napr. elektrické obvody. Začneme s najjednoduchšou rovnicou vyjadrujúcou malé kmity kyvadla alebo telesa na pružine.

1. Netlmený harmonický pohyb

Uvažujme rovnicu

$$x'' + \omega^2 x = 0, \omega > 0 \quad (4.1)$$

Neznáma funkcia $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ vyjadruje pohyb kyvadla s malými kmitmi, ak $\omega = (\frac{g}{l})^{1/2}$, kde g je gravitačné zrýchlenie a l je dĺžka kyvadla.

Ak $\omega = (\frac{k}{m})^{1/2}$, kde $k > 0$ je materiálová konštanta pružiny a m je hmotnosť telesa zaveseného na pružine, potom funkcia $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ vyjadruje jeho kmity.

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (4.1) má dvojicu komplexne združených koreňov $r_{1,2} = \pm \omega i$, ktorým zodpovedá všeobecné riešenie

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Ak sú dané začiatočná výchylka a začiatočná rýchlosť

$$x(0) = \xi_0, x'(0) = \xi_1 \quad (4.3)$$

tak $c_1 = \xi_0$, $c_2 = \frac{\xi_1}{\omega}$ a pohyb je vyjadrený funkciou

$$x(t) = \xi_0 \cos \omega t + \frac{\xi_1}{\omega} \sin \omega t \quad (4.4)$$

K štúdiu kvalitatívnych vlastností nenulového riešenia je výhodné transformovať funkciu (4.2) na amplitúdový tvar

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.5)$$

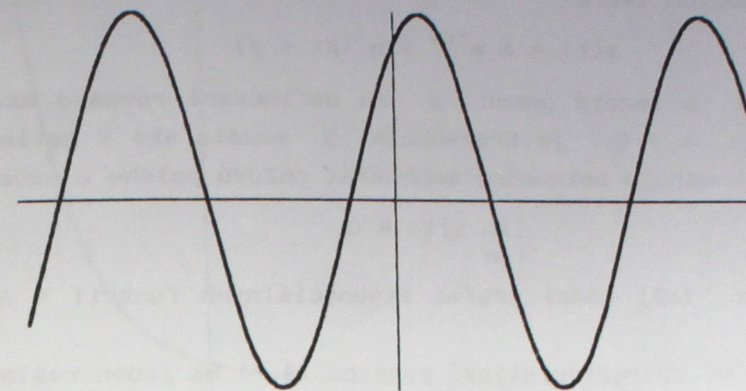
kde

$$A = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} > 0$$

je amplitúda a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je fázový posun, pričom platí:

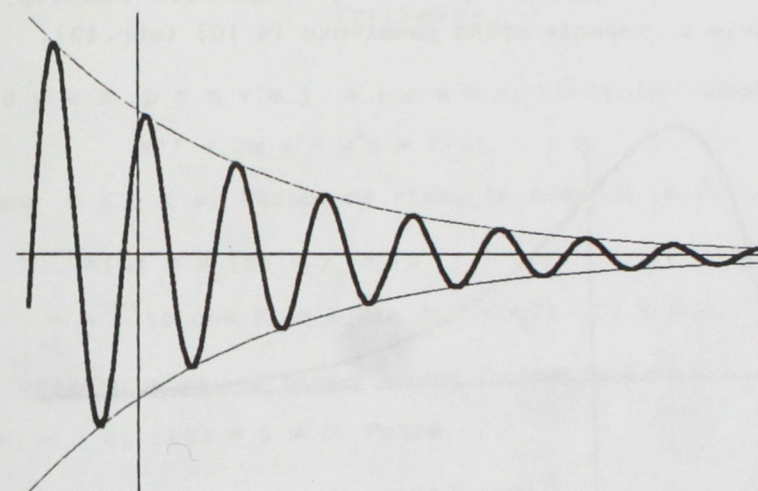
$$\sin \varphi = \frac{c_1}{A}, \cos \varphi = \frac{c_2}{A}$$

Pohyb definovaný rovnicou (4.5) nazývame *netlmený harmonický pohyb*. Hmotný bod osciluje periodicky okolo rovnovážnej nulovej polohy s periódou $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (obr. 11) a frekvenciou ω .



Obr. 11

Netlmený harmonický pohyb



Obr. 12

Tlmený harmonický pohyb

2. Tlmený pohyb. Ak pri pohybe kyvadla alebo kmitaní telesa na pružine berieme do úvahy odpor prostredia, má diferenciálna rovnica pohybu tvar

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0 \quad (4.6)$$

kde $\alpha > 0$ je koeficient odporu prostredia a $\omega > 0$ má ten istý význam ako pri netlmenom pohybe. Charakteristická rovnica

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \quad (4.7)$$

má reálne alebo komplexné korene, ktoré určujú charakter riešenia.

a) Ak $0 < \alpha < \omega$, rovnica (4.7) má komplexne združené korene

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \beta i, \beta = (\omega^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

Všeobecné riešenie rovnice (4.6) má potom tvar

$$x(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (4.8)$$

alebo v amplitúdovom tvare

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad (4.9)$$

kde amplitúda A a fázový posun φ sú definované rovnako ako v netlmenom prípade. Pretože $\alpha > 0$, je frekvencia β menšia ako v netlmenom prípade. Oscilujúci bod dosahuje nekonečne mnohokrát nulovú polohu a súčasne platí

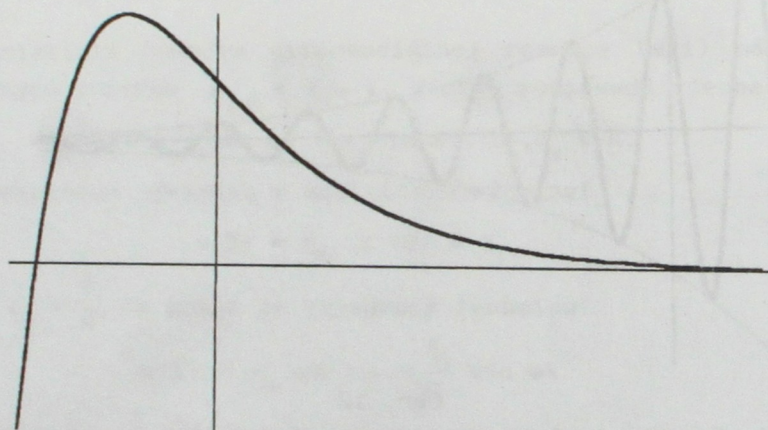
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.10)$$

Graf funkcie x leží medzi grafmi exponenciálnych funkcií $\pm A e^{-\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obr.12).

b) Ak $\alpha = \omega$, charakteristická rovnica (4.7) má jeden reálny dvojnásobný koreň $r_{1,2} = -\omega$. Všeobecné riešenie rovnice (4.6) je

$$x(t) = e^{-\omega t}(c_1 + c_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Nastáva *kritické tlmenie*. Hodnota $\alpha = \omega$ je najmenšia hodnota, pri ktorej nenastanú oscilácie a riešenie spĺňa podmienku (4.10) (obr.13).

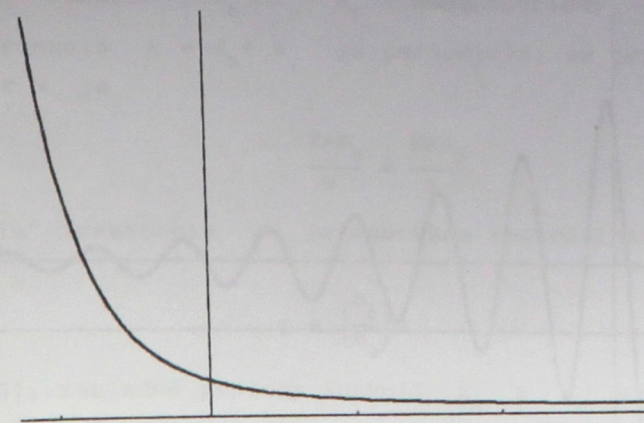


Obr. 13
Kritické tlmenie

c) Ak $\alpha > \omega$, charakteristická rovnica má dva reálne korene $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha-\beta)t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Nastáva prípad *pretlmenia*, pretože obidva charakteristické korene sú záporné. Každé riešenie exponenciálne konverguje k nule pre $t \rightarrow \infty$ (obr.14).



Obr. 14
Pretlmenie

3. O d o z v a p r a v e j s t r a n y. Uvažujme nehomogénnu rovnicu

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

za predpokladu $0 \leq \alpha < \omega$. Všeobecné riešenie rovnice (4.11) má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_f(t) = \\ &= e^{-\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + x_f(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Funkcia x_f vyjadruje *odozvu pravej strany (silovú odozvu)*.

a) Nech $\alpha > 0$, $f(t) = k \neq 0$. Potom

$$x(t) = x_h(t) + k\omega^{-2}$$

Funkcia x_h je *prechodný stav*, pretože

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$$

Konštantná funkcia $x_f(t) = k\omega^{-2}$ je *ustálený stav* a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k\omega^{-2}$$

Teda riešenie sa postupne ušľahuje na konštantnej hodnote (obr.15).

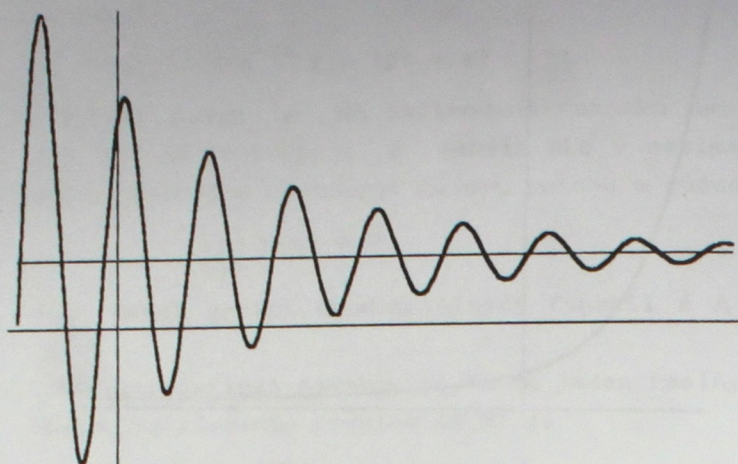
b) Nech $f(t) = kt$, $k > 0$. Potom

$$x(t) = k\omega^{-2}(t - 2\alpha\omega^{-2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

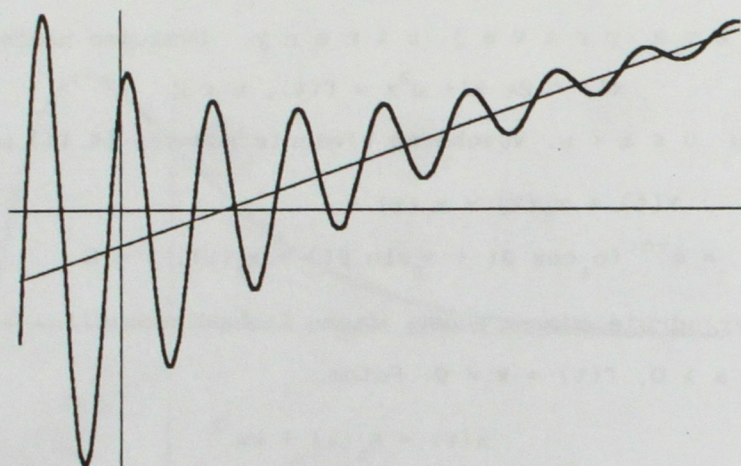
Teda odzva pravej strany je opäť lineárna funkcia. Pretože funkcia x_h je ohraničená, prevažuje pre veľké hodnoty t vplyv pravej strany a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = \infty$$

(obr. 16).



Obr. 15
Ustaľovanie pohybu



Obr. 16
Tvar riešenia pri vstupe $f(t) = kt, k > 0$

c) Nech $\alpha = 0, f(t) = B \sin(\gamma t + \varphi)$. Riešime rovnicu

$$x'' + \omega^2 x = f(t) = B \sin(\gamma t + \varphi) \quad (4.12)$$

Ak $\gamma \neq \omega$, tak $i\gamma$ nie je koreňom charakteristickej rovnice

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

a každé riešenie má potom tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_r(t) = \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$A \in \mathbb{R}, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Teda riešenie je súčtom dvoch periodických funkcií vyjadrujúcich jednoduché

harmonické kmity. V porovnaní s pravou stranou sa zmenila pri jej odozve x_r iba amplitúda. Funkcie x_h a x_r majú periódy $\frac{2\pi m}{\omega}$, $m \in \mathbb{N}$, resp. $\frac{2\pi n}{\gamma}$, $n \in \mathbb{N}$. Funkcia $x = x_h + x_r$ je periodická, ak pre niektoré prirodzené čísla $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{2\pi m_0}{\omega} = \frac{2\pi n_0}{\gamma}$$

t.j. "vonkajšia" frekvencia γ je násobkom racionálneho čísla a "pôvodnej" frekvencie ω :

$$\gamma = \left(\frac{n_0}{m_0}\right)\omega \quad (4.14)$$

Ak platí (4.14), základné periódy funkcií x_h a x_r sú $T_h = \frac{2\pi}{\omega}$, resp. $T_r = \frac{2\pi}{\gamma}$ a základná perióda funkcie x je

$$T = m_0 T_h = n_0 T_r$$

Ak frekvencie γ, ω nespĺňajú vzťah (4.14) pre žiadne racionálne číslo $\frac{n_0}{m_0}$, výsledné riešenie nie je periodickou funkciou. Nazývame ju *tahmer*, alebo *kvaziperiodickou* funkciou.

Príklad 2.15

Riešme začiatočnú úlohu

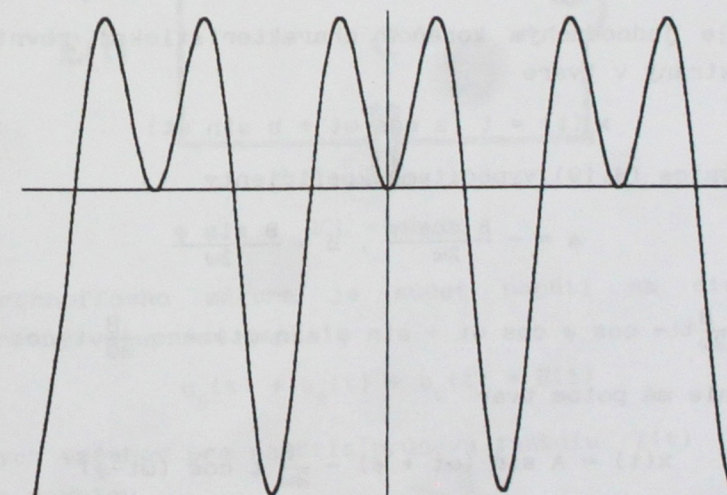
$$x'' + 4x = 12 \cos t \quad (4.15)$$

$$x(0) = x'(0) = 0 \quad (4.16)$$

a zistíme, či riešenie je periodickou funkciou.

Riešenie. Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, t \in \mathbb{R}$$



Obr. 17
Graf funkcií $f(t) = 12 \cos t$ a $x(t) = 4(\cos t - \cos 2t)$

Pretože vonkajšia frekvencia $\gamma = 1 = \frac{1}{2} \omega$, bude výsledné riešenie periodickou funkciou so základnou periodou $T = 2T_h = T_f = 2\pi$. Konkrétnu odozvu pravej strany hľadáme v tvare

$$x_f(t) = a \cos t + b \sin t$$

Dosadením do rovnice (4.15) dostaneme $a = 4$, $b = 0$, a teda všeobecné riešenie rovnice (4.15) je

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 4 \cos t$$

Dosadením začiatočných podmienok máme $c_1 = -4$, $c_2 = 0$ a riešenie začiatočnej úlohy (4.15), (4.16) má tvar

$$x(t) = 4(\cos t - \cos 2t), t \in \mathbb{R}$$

Poznámka 2.5

Metódou z predchádzajúceho príkladu môžeme riešiť aj nehomogénne lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu tvaru

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = e^{\alpha t} [p_m(t) \cos \beta t + q_m(t) \sin \beta t] \quad (4.17)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a p_m, q_m sú polynómy m-tého stupňa.

Odozvu pravej strany hľadáme v tvare

$$x_f(t) = e^{\alpha t} t^k [P_m(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t] \quad (4.18)$$

kde k je násobnosť komplexného čísla $\alpha + \beta i$ ako koreňa charakteristickej rovnice a $P_m(t), Q_m(t)$ sú neznáme polynómy m-tého stupňa, ktoré nájdeme dosadením funkcie (4.18) do rovnice (4.17) a porovnaním koeficientov.

d) Nech $\alpha = 0$, $f(t) = B \sin(\omega t + \psi)$. Riešime rovnicu

$$x'' + \omega^2 x = B \sin(\omega t + \psi) \quad (4.19)$$

Pravá strana má tvar

$$f(t) = B (\sin \psi \cos \omega t + \cos \psi \sin \omega t), t \in \mathbb{R}$$

Pretože $i\omega$ je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice, vyjadríme odozvu pravej strany v tvare

$$x_f(t) = t (a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

Dosadením do rovnice (4.19) vypočítame koeficienty

$$a = -\frac{B \cos \psi}{2\omega}, b = \frac{B \sin \psi}{2\omega}$$

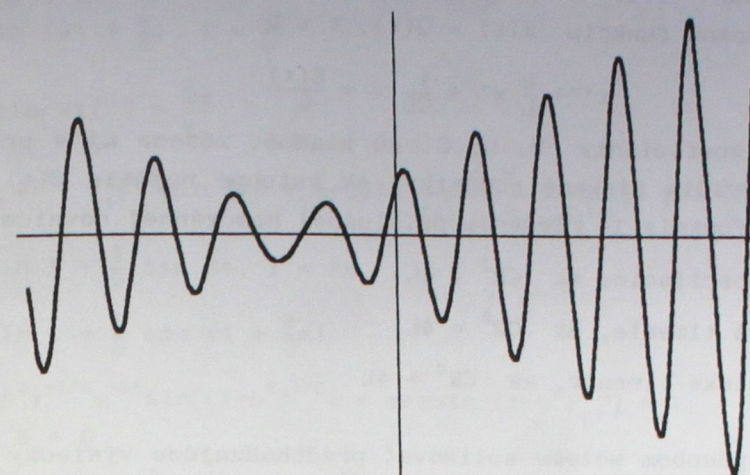
a

$$x_f(t) = \frac{B}{2\omega} t (-\cos \psi \cos \omega t + \sin \psi \sin \omega t) = -\frac{B}{2\omega} t \cos(\omega t - \psi)$$

Všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) - \frac{B}{2\omega} t \cos(\omega t - \psi)$$

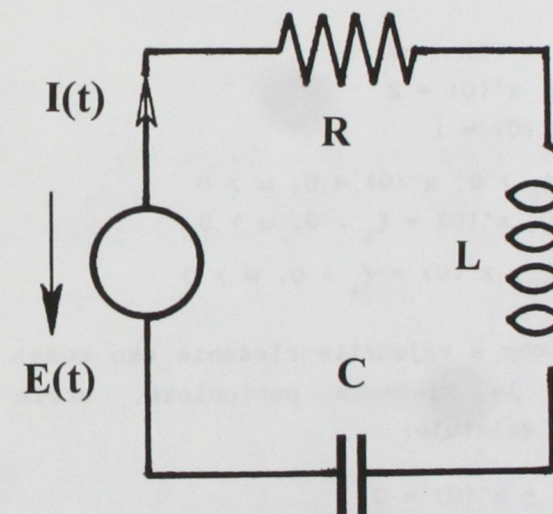
V tomto prípade nastáva jav rezonancie charakterizovaný neohraničenosťou riešenia $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (obr.18).



Obr. 18
Jav rezonancie

Ako sme spomenuli už v úvode tejto časti, lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu modeluje aj elektrický obvod.

Uvažujme RLC obvod s vonkajším napätím $E(t)$, ktorého schéma je na obr.19.



RCL - obvod

Podľa 2. Kirchhoffovho zákona je súčet napätí na cievke, odpore a kondenzátore rovný vstupnému napätiu :

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = E(t)$$

Použitím známych vzťahov pre napätia, prúdovú funkciu $I(t)$ a funkciu náboja $Q(t)$ dostaneme rovnicu

$$L I'(t) + R I(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

Dosadením vzťahu $I(t) = Q'(t)$ získame obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu pre neznámu funkciu $x(t) = Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$x'' + \frac{R}{L} x' + \frac{1}{CL} x = \frac{E(t)}{L} \quad (4.20)$$

Pretože všetky koeficienty R , L , C sú kladné, môžeme aj v prípade funkcie náboja použiť vyššie získané poznatky. Ak vstupné napätie $E(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, potom nábojová funkcia je riešením príslušnej homogénnej rovnice a má:

- a) tlmené oscilácie, ak $CR^2 < 4L$
- b) kritické tlmenie, ak $CR^2 = 4L$
- c) nadkritické tlmenie, ak $CR^2 > 4L$

Rovnakým spôsobom môžeme aplikovať predchádzajúce výsledky aj v prípade periodického, t.j. striedavého napätia

$$E(t) = E_0 \sin(\gamma t + \psi)$$

CVIČENIA 2.4

Riešte začiatkové úlohy a vyjadrite riešenie v amplitúdovom tvare. Určte jeho periódu:

1. $x'' + x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -2$
2. $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$
3. $x'' + 3x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$
4. $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = \xi_0 > 0$, $x'(0) = 0$, $\omega > 0$
5. $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \xi_1 > 0$, $\omega > 0$
6. $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = \xi_0$, $x'(0) = \xi_1 > 0$, $\omega > 0$

Riešte začiatkové úlohy a vyjadrite riešenie ako súčet dvoch funkcií v amplitúdovom tvare. Ak je riešenie periodické, určte jeho periódu. Vypočítajte $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, ak existuje:

7. $x'' + x = \sin 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$
8. $x'' + x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 2$
9. $x'' + 2bx' + x = k$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $0 \leq b < 1$, $k \in \mathbb{R}$
10. $x'' + 2x' + 2x = e^{-t} \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$
11. $x'' + 4x = \cos \sqrt{2}t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 2.4

1. $x(t) = 2\sqrt{2} \sin(t + \frac{3}{4}\pi)$, $T = 2\pi$
2. $x(t) = \sqrt{2} \sin(2t + \frac{1}{4}\pi)$, $T = \pi$

$$3. x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}), T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$4. x(t) = \xi_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$5. x(t) = \frac{\xi_1}{\omega} \sin \omega t, T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$6. x(t) = [(\xi_0 \omega)^2 + \xi_1^2]^{1/2} \sin(\omega t + \arcsin \frac{\xi_0 \omega}{[(\xi_0 \omega)^2 + \xi_1^2]^{1/2}}), T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$7. x(t) = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t, T = 2\pi$$

$$8. x(t) = \frac{5}{2} \sin t + \frac{t}{2} \sin(t + \frac{3}{2}\pi)$$

$$9. x(t) = (1-b^2)^{-1/2} e^{-bt} \sin((1-b^2)^{1/2} t + \arcsin(1-b^2)^{1/2}) + 1, T = 2\pi, \text{ ak } b = 0$$

$$10. x(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin t + \frac{t}{2} e^{-t} \sin(t + \frac{3}{2}\pi), \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$$11. x(t) = 2 \sin(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin(\sqrt{2}t + \frac{3}{2}\pi)$$