

a po úprave pravej strany

$$\xi'(t) = e^t$$

Aby bola splnená začiatočná podmienka  $\xi(\frac{\pi}{2}) = 0$ , položíme

$$\xi(t) = \int_{\pi/2}^t e^s ds = e^t - e^{\pi/2}$$

Vynútená odozva má potom tvar

$$x_f(t) = (e^t - e^{\pi/2}) \sin t$$

a výsledné riešenie začiatočnej úlohy (5.21) je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_f(t) = 2 \sin t + (e^t - e^{\pi/2}) \sin t = \\ &= (2 + e^t - e^{\pi/2}) \sin t, \quad t \in (0, \pi) \end{aligned} \quad (5.24)$$

### Poznámka 1.3.

Riešenie  $x$  začiatočnej úlohy z predchádzajúceho príkladu môže byť spojitým predĺžením na celú reálnu os  $\mathbb{R}$ , pričom zostáva zachované vyjadrenie (5.24). Samotná funkcia

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) = (2 + e^t - e^{\pi/2}) \sin t \quad (5.25)$$

je riešením začiatočnej úlohy (5.21) len na intervale  $(0, \pi)$ , ktorý je maximálnym intervalom obsahujúcim bod  $\tau = \frac{\pi}{2}$  a patriacim do definičného oboru funkcií  $p(t)$ ,  $f(t)$ . Funkcia definovaná vzťahom (5.25) je riešením začiatočnej úlohy s rovnicou v implicitnom tvare

$$(\sin t)x' - (\cos t)x - e^t \sin^2 t = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 2$$

Postup riešenia začiatočnej úlohy pre lineárnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu zhrnieme v nasledujúcej vete.

### Veta 1.6

Nech  $p: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sú spojité funkcie,  $\tau \in (a, b)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  a

$$u(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t p(s) ds \quad (5.27)$$

je prechodová funkcia homogénnej začiatočnej úlohy

$$x' = p(t)x, \quad x(\tau) = \xi \quad (5.28)$$

Existuje jediné riešenie  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  začiatočnej úlohy

$$x' = p(t)x + f(t) \quad (5.29)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (5.30)$$

pričom platí vzťah

$$x(t) = \xi u(t, \tau) + \int_{\tau}^t f(s) u(t, s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (5.31)$$

Dôkaz. Funkcia  $x_h$  definovaná vzťahom

$$x_h(t) = \xi u(t, \tau), \quad t \in (a, b) \quad (5.32)$$

je riešením začiatočnej úlohy (5.28) pre homogénnu rovnicu.

Funkcia  $x_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná integrálom

$$x_f(t) = \int_{\tau}^t f(s) u(t, s) ds \quad (5.33)$$

spĺňa začiatočnú podmienku

$$x_f(\tau) = 0 \quad (5.34)$$

Ďalej ukážeme, že funkcia  $x_f$  je riešením nehomogénnej rovnice (5.29).

Funkcia  $x_f$  má tvar

$$x_f(t) = \left( \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[ -\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right) \exp \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma$$

Po derivovaní dostaneme vzťahy

$$\begin{aligned} x_f'(t) &= \left( \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[ -\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right) p(t) \exp \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma + \\ &+ f(t) \exp \left[ -\int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma \right] \exp \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma = p(t)x_f(t) + f(t), \quad t \in (a, b) \end{aligned}$$

Teda funkcia  $x_f$  je riešením začiatočnej úlohy (5.34), (5.29) a funkcia  $x = x_h + x_f$  definovaná vzťahom (5.31) je riešením začiatočnej úlohy (5.29), (5.30).

Ukážeme ešte, že toto riešenie je jediné. Nech funkcia  $y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  je ďalšie riešenie úlohy (5.29), (5.30). Potom funkcia  $z = x - y$  je riešením začiatočnej úlohy pre homogénnu rovnicu

$$z' = p(t)z, \quad z(\tau) = 0 \quad (5.35)$$

Úloha (5.35) má podľa vety 1.3. práve jedno riešenie a tým je funkcia  $z(t) = 0$ ,  $t \in (a, b)$ . Teda  $x(t) - y(t) = 0$  a  $x(t) = y(t)$  pre všetky  $t \in (a, b)$ , čím je dôkaz vety skončený.

Podobne ako v prípade homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc, je aj v nehomogénnom prípade dôležitá otázka kvalitatívneho správania sa riešenia v závislosti od vlastností funkcií  $p$ ,  $f$  vystupujúcich v rovnici. Veta 1.4 opisuje asymptotiku začiatočnej odozvy v okolí bodu  $\infty$ . Nasledujúca veta sa zaoberá asymptotikou vynútenej odozvy a riešenia nehomogénnej začiatočnej úlohy.



### Veta 1.7

Nech  $p:(a,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ ,  $f:(a,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  sú spojité funkcie a existujú

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{f(t)}{-p(t)} \text{ a } \lim_{t\rightarrow\infty} p(t) < 0$$

Nech  $x:(a,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  je riešenie začiatočnej úlohy (5.29), (5.30). Potom

$$\lim_{t\rightarrow\infty} x(t) = \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{f(t)}{-p(t)} \quad (5.36)$$

Dôkaz. Riešenie  $x$  vyjadríme v tvare  $x = x_h + x_f$ , kde

$$x_h(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) ds$$

je začiatočná odozva a

$$x_f(t) = \left( \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[ -\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right) \exp \int_{\tau}^t p(s) ds, \quad t \in (a,\infty)$$

je vynútená odozva.

Funkcia  $p$  spĺňa na základe predpokladu  $\lim_{t\rightarrow\infty} p(t) < 0$  podmienku  $p(t) \leq k < 0$  pre všetky  $t \geq b \geq a$ . Potom podľa vety 1.4 je

$$\lim_{t\rightarrow\infty} x_h(t) = 0 \quad (5.37)$$

Funkciu  $x_f$  vyjadríme v tvare zlomku

$$x_f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$$

kde

$$g(t) = \left( \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[ -\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right)$$

$$h(t) = \exp \left[ -\int_{\tau}^t p(s) ds \right].$$

Funkcia  $h$  spĺňa vzťah  $\lim_{t\rightarrow\infty} h(t) = \infty$ . Použitím L'Hôpitalovho pravidla dostaneme:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} x_f(t) = \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{g'(t)}{h'(t)} =$$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{f(t) \exp \left[ -\int_{\tau}^t p(s) ds \right]}{-p(t) \exp \left[ -\int_{\tau}^t p(s) ds \right]} = \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{f(t)}{-p(t)}$$

Na základe vzťahu (5.37) je

$$\lim_{t\rightarrow\infty} x(t) = \lim_{t\rightarrow\infty} x_f(t) = \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{f(t)}{-p(t)}$$

a dôkaz vety je skončený.

### Poznámka 1.4

Ak sú splnené predpoklady predchádzajúcej vety, zo vzťahu (5.36) vyplýva, že riešenie nehomogénnej rovnice

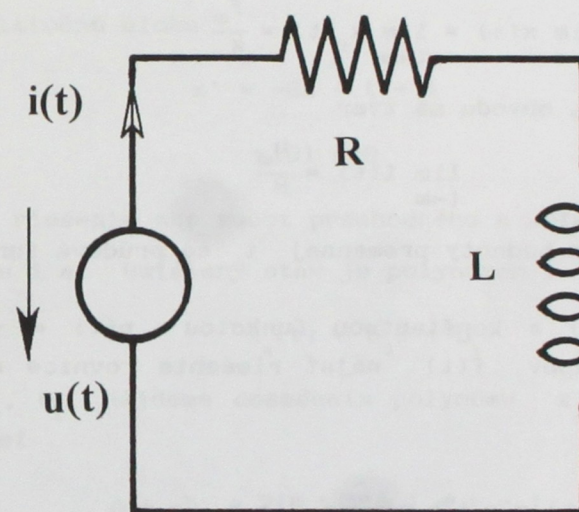
$$x' = p(t)x + f(t), \quad t \in (a,\infty)$$

sa pre "dostatočne veľké" hodnoty premennej  $t$  správa ako riešenie stacionárnej úlohy

$$-p(t)x = f(t)$$

Uvažujme RL obvod so vstupným napätím  $u(t)$  a známym prúdom  $i_{\tau}$  v časovom okamihu  $\tau$  (obr.10). Na základe Kirchhoffových a Ohmových zákonov dostaneme pre napätie v obvode vzťah

$$u_R(t) + u_L(t) = Ri(t) + Li'(t) = u(t),$$



Obr. 10.

RL-obvod so vstupným napätím  $u(t)$

ktorý je spolu so začiatočnou podmienkou

$$i(\tau) = i_{\tau}$$

začiatočnou úlohou pre výpočet priebehu prúdovej funkcie  $i(t)$ . Uvedenú úlohu prepíšeme v tvare

$$x' = -kx + f(t) \quad (5.39)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (5.40)$$

pričom sme položili



$$k = \frac{R}{L}, \quad f(t) = \frac{u(t)}{L}, \quad x(t) = i(t), \quad \xi = 1_\tau$$

Budeme skúmať vlastnosti riešenia úlohy (5.39), (5.40) v závislosti od vstupu  $f(t)$ . Využívame pritom predpoklad

$$k > 0 \quad (5.41)$$

Ďalej predpokladáme, že funkcia  $f$  je definovaná a spojitá na celej reálnej osi  $\mathbb{R}$ . Riešenie úlohy (5.39), (5.40) má tvar

$$x(t) = \xi e^{-k(t-\tau)} + \int_{\tau}^t f(s) e^{-k(t-s)} ds, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.42)$$

Na základe predpokladu (5.41) začiatočná odozva  $x_h(t)$  exponenciálne klesá k nule, t.j.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi e^{-k(t-\tau)} = 0$$

Ak  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$ , tak podľa vety 1.7. platí vzťah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_r(t) = \frac{f_\infty}{k} \quad (5.43)$$

Vzťah (5.43) v prípade RL obvodu má tvar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{u_\infty}{R}$$

čo znamená, že pre väčšie hodnoty premennej  $t$  sa prúdová funkcia správa ako v stacionárnom R-obvode.

Tvar rovnice (5.39) s konštantnou funkciou  $p(t) = -k$  umožňuje v prípade špeciálnych vstupov  $f(t)$  nájsť riešenie rovnice aj bez použitia integrovania.

a) Nech

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

Špeciálne tzv. *partikulárne* riešenie hľadáme opäť v tvare polynómu stupňa  $n$

$$x_s(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_n \quad (5.44)$$

Neznáme koeficienty nájdeme dosadením do diferenciálnej rovnice (5.39) prepísanej do tvaru

$$x' + kx = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

Výsledné riešenie začiatočnej úlohy (5.39), (5.40) vyjadríme v tvare

$$x(t) = c e^{-kt} + b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_n \quad (5.45)$$

pričom konštantu  $c$  určíme zo začiatočnej podmienky (5.40). Každá funkcia v tvare (5.45) je riešením rovnice (5.39), pretože funkcia

$$x_0(t) = c e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.46)$$

je riešením homogénnej rovnice

$$x' = -kx$$

a funkciu - polynóm  $x_s(t)$  sme našli ako riešenie nehomogénnej rovnice

$$x' = -kx + f(t)$$

Funkcia  $x_0$  je *prechodným stavom*, pretože

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$$

Funkcia

$$x_s(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_n$$

zachováva charakter funkcie  $f(t)$  a nazývame ju *ustáleným stavom*.

#### Príklad 1.20

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = -2x + t - 1 \quad (5.47)$$

$$x(0) = 0 \quad (5.48)$$

a vyjadríme jej riešenie ako súčet prechodného a ustáleného stavu.

**Riešenie.** Ustálený stav je polynómom 1. stupňa

$$x_s(t) = b_0 t + b_1$$

Koeficienty  $b_0, b_1$  nájdeme dosadením polynómu  $x_s(t)$  do rovnice (5.47). Dostaneme rovnosť

$$b_0 + 2(b_0 t + b_1) = t - 1$$

a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej  $t$  máme systém lineárnych algebrických rovníc

$$2b_0 = 1$$

$$b_0 + 2b_1 = -1$$

Riešením tohto systému je dvojica

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = -\frac{3}{4}$$

Ustálený stav  $x_s(t)$  má potom tvar

$$x_s(t) = \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Riešenie začiatočnej úlohy (5.47), (5.48) vyjadríme v tvare



$$x(t) = c e^{-2t} + \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}$$

Konštantu  $c$  určíme zo začiatočnej podmienky

$$x(0) = c - \frac{3}{4} = 0$$

odkiaľ máme  $c = \frac{3}{4}$ , a teda

$$x(t) = \frac{3}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}, t \in \mathbb{R}$$

Funkcia  $x_0(t) = \frac{3}{4} e^{-2t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  je prechodný stav.

b) Predpokladajme, že funkcia  $f$  má tvar

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, t \in \mathbb{R}$$

V tomto prípade hľadáme ustálený stav v tvare

$$x_s(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

Neznáme koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$  opäť nájdeme dosadením do diferenciálnej rovnice (5.39). Dostaneme rovnosť

$$(k\alpha + \omega\beta) \cos \omega t + (-\omega\alpha + k\beta) \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

Porovnaním koeficientov pri funkciách  $\cos \omega t$  a  $\sin \omega t$  dostaneme systém algebrických rovníc pre výpočet neznámych  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$k\alpha + \omega\beta = a$$

$$-\omega\alpha + k\beta = b$$

Riešením systému je práve jedna dvojica  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{ka - \omega b}{k^2 + \omega^2}, \beta = \frac{kb + \omega a}{k^2 + \omega^2}$$

Riešenie začiatočnej úlohy (5.39), (5.40) vyjadrené ako súčet prechodného a ustáleného stavu má potom tvar

$$x(t) = c e^{-kt} + \frac{1}{k^2 + \omega^2} [(ka - \omega b) \cos \omega t + (kb + \omega a) \sin \omega t]$$

pričom konštantu  $c$  určíme na základe začiatočnej podmienky (5.40).

Periodický vstup

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

môžeme vyjadriť aj v amplitúdovom tvare

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

kde

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

je amplitúda a číslo  $\varphi$  spĺňajúce vzťahy

$$\frac{a}{A} = \sin \varphi, \frac{b}{A} = \cos \varphi$$

je fázový posun. Ustálený stav

$$x_s(t) = \frac{1}{k^2 + \omega^2} [(ka - \omega b) \cos \omega t + (kb + \omega a) \sin \omega t]$$

má amplitúdový tvar

$$x_s(t) = B \sin(\omega t + \psi)$$

kde

$$B = \left( \frac{a^2 + b^2}{k^2 + \omega^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{ka - \omega b}{(a^2 + b^2)^{1/2} (k^2 + \omega^2)^{1/2}} = \sin \psi$$

$$\frac{kb + \omega a}{(a^2 + b^2)^{1/2} (k^2 + \omega^2)^{1/2}} = \cos \psi$$

#### Príklad 1.21

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = -x + \sin 2t \quad (5.49)$$

$$x(0) = 1 \quad (5.50)$$

a vyjadríme riešenie ako súčet prechodného a ustáleného stavu.

Riešenie. Ustálený stav má tvar

$$x_s(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$$

Jeho dosadením do rovnice (5.49) dostaneme rovnosť

$$(\alpha + 2\beta) \cos 2t + (-2\alpha + \beta) \sin 2t = \sin 2t$$

Porovnaním ľavej a pravej strany v poslednej rovnosti prejdeme na systém lineárnych algebrických rovníc

$$\alpha + 2\beta = 0$$

$$-2\alpha + \beta = 1$$

ktorého riešením je dvojica  $\alpha = -\frac{2}{5}$ ,  $\beta = \frac{1}{5}$ . Ustáleným stavom je potom funkcia

$$x_s(t) = -\frac{2}{5} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t, t \in \mathbb{R}$$

Riešenie začiatočnej úlohy (5.49), (5.50) hľadáme v tvare

$$x(t) = c e^{-t} - \frac{2}{5} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t, t \in \mathbb{R}$$



Zo začiatočnej podmienky (5.50) vyplýva

$$x(0) = c - \frac{2}{5} = 1$$

a teda  $c = \frac{7}{5}$ , funkcia

$$x_0(t) = \frac{7}{5} e^{-t}$$

je prechodný stav a riešenie začiatočnej úlohy má tvar

$$x(t) = \frac{7}{5} e^{-t} - \frac{2}{5} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t, t \in \mathbb{R}$$

#### Poznámka 1.5

Metóda, ktorú sme použili na vyjadrenie riešenia v tvare súčtu prechodného a ustáleného stavu, sa nazýva *metóda neurčitých koeficientov*. Podrobnejšie sa ňou budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc  $n$ -tého rádu s konštantnými koeficientmi.

Niektoré nelineárne diferenciálne rovnice riešime vhodnou transformáciou, ktorá ich pretransformuje na lineárne diferenciálne rovnice. Medzi ne patrí napr. *Bernoulliho rovnica*, ktorá má tvar

$$x' = p(t)x + f(t)x^n, t \in (a,b); n \in \mathbb{R}, n \neq 0, n \neq 1 \quad (5.51)$$

so začiatočnou podmienkou

$$x(\tau) = \xi, \tau \in (a,b), \xi > 0 \quad (5.52)$$

V prípadoch  $n = 0, n = 1$  je rovnica (5.51) lineárna.

Rovnicu (5.51) prepíšeme najprv do tvaru

$$x^{-n}x' = p(t)x^{1-n} + f(t) \quad (5.53)$$

Uvažujeme novú neznámu funkciu

$$y = x^{1-n}$$

Ak  $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovateľná funkcia, tak podľa vety o derivácii zloženej funkcie je aj funkcia  $y: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovateľná a jej derivácia má tvar

$$y' = (1-n)x^{-n}x'$$

Rovnica (5.53) sa potom dosadením funkcií  $y$  a  $y'$  transformuje na lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$y' = \frac{1}{1-n} p(t)y + \frac{f(t)}{1-n} \quad (5.54)$$

so začiatočnou podmienkou

$$y(\tau) = \xi^{1-n} \quad (5.55)$$

Ak funkcia  $y$  je riešením začiatočnej úlohy (5.54), (5.55) tak funkcia

$$x = y^{\frac{1}{1-n}}$$

je riešením začiatočnej úlohy (5.50), (5.51).

#### Príklad 1.22

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \quad (5.56)$$

$$x(1) = 2 \quad (5.57)$$

Riešenie. Rovnicu (5.56) vyjadríme v tvare

$$x x' = \frac{1}{t} x^2 + t, t > 0 \quad (5.58)$$

Položíme:

$$y = x^2, y' = 2x x' \quad (5.59)$$

Dosadením do rovnice (5.57) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$y' = \frac{2}{t} y + 2t, t > 0 \quad (5.60)$$

s podmienkou

$$y(1) = 4 \quad (5.61)$$

Riešením začiatočnej úlohy (5.60), (5.61) je funkcia

$$y(t) = t^2(2 \ln t + 4)$$

Po spätnej transformácii

$$x = y^{1/2}$$

dostaneme riešenie začiatočnej úlohy (5.56), (5.57) v tvare

$$x(t) = t(2 \ln t + 4)^{1/2}, t > e^{-2}$$

#### CVIČENIA 1.5

Riešte začiatočné úlohy :

$$1. x' = \frac{x}{t} - 1, x(1) = \frac{1}{2}$$

$$2. x' = (\cotg t)x + \sin t, x(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$3. x' = \frac{2}{t}x + 1 + \frac{1}{t}, x(-2) = \frac{3}{2}$$

$$4. x' = (\sin t)x + \sin t \cos t, x(-\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$5. x' = \frac{2t}{t^2 + 1}x + 1 + t^2, x(-1) = 1$$

$$6. x' = -t^2x + t^2, x(2) = 1$$



7.  $x' = -x + \cos t$ ,  $x(0) = 1$
8.  $x' = -\frac{2x}{t} + \frac{\sin t}{t}$ ,  $x(\pi) = 0$
9.  $x' = -\frac{1}{t}x + e^t$ ,  $x(1) = 2$
10.  $x' = \frac{x}{t(t+1)} + 1$ ,  $x(1) = 0$
11.  $x' = -x + (1 + e^{2t})^{-1}$ ,  $x(0) = e$
12.  $x' = -t^2x + 6t^2$ ,  $x(1) = -1$
13.  $x' = -\frac{2t}{t^2+1}x + \frac{2t^2}{t^2+1}$ ,  $x(0) = 2$
14.  $x' = \frac{2t-1}{t^2}x + 1$ ,  $x(-1) = 4$
15.  $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{e^t}{t}$ ,  $x(2) = 2$
16.  $x' = \frac{1}{t(t+1)}x + t$ ,  $x(1) = 0$

Nájdite riešenia nasledujúcich diferenciálnych rovníc spĺňajúce začiatočnú podmienku  $x(\tau) = \xi$  a vyjadrite riešenie ako súčet začiatočnej a vynútenej odozvy:

17.  $x' = \frac{2}{t}x + 2t^3$ ,  $t > 0$
18.  $x' = \frac{2}{2t+1}x + \frac{4t}{2t+1}$ ,  $t > -\frac{1}{2}$
19.  $x' = -(\operatorname{tg} t)x + \frac{1}{\cos t}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
20.  $x' = \frac{2}{t}x + \frac{\ln t}{t}$ ,  $t > 0$
21.  $x' = \frac{x}{t} + t^2 \cos t$ ,  $t > 0$
22.  $x' = -\frac{t+1}{t}x + 3te^{-t}$ ,  $t > 0$
23.  $x' = \frac{2t}{t^2+1}x + 1 + t^2$
24.  $x' = \frac{x}{t} - \frac{1}{t^2}$ ,  $t > 0$

Vyjadrite riešenia nasledujúcich začiatočných úloh ako súčet prechodného a ustáleného stavu.

25.  $x' = -x + e^{-t}$ ,  $x(1) = 2$
26.  $x' = -3x + 3t$ ,  $x(0) = 1$
27.  $x' = -x + t^2$ ,  $x(-1) = 0$
28.  $x' = -2x + \cos 3t$ ,  $x(0) = -1$
29.  $x' = -x + \sin \omega t$ ,  $x(0) = 0$

Riešte začiatočné úlohy pre Bernoulliho rovnice:

30.  $x' = \frac{x}{t} + t^2 \frac{1}{x}$ ,  $x(2) = 4$
31.  $x' = \frac{t}{2(t^2-1)}x + \frac{t}{2x}$ ,  $x(0) = 1$

32.  $x' = \frac{3}{t}x - t^3x^2$ ,  $x(1) = 7$
33.  $x' = \frac{x}{t+1} - x^2$ ,  $x(2) = 1$
34.  $x' = -tx + tx^3$ ,  $x(0) = -1$
35.  $x' = \frac{4}{3}x + \frac{t+1}{3x^2}$ ,  $x(0) = \frac{11}{16}$
36.  $x' = \frac{tx}{t^2+1} + t\sqrt{x}$ ,  $x(0) = 1$
37.  $x' = -4tx + 2t\exp(-t^2)\sqrt{x}$ ,  $x(1) = 1$
38.  $x' = \frac{4}{t}x + t\sqrt{x}$ ,  $x(-1) = 2$

#### VÝSLEDKY CVIČENÍ 1.5

1.  $x(t) = t(\frac{1}{2} - \ln t)$ ,  $t > 0$
2.  $x(t) = (t - \frac{\pi}{2}) \sin t$ ,  $t \in (0, \pi)$
3.  $x(t) = \frac{3}{8}t^2 - t - \frac{1}{2}$ ,  $t < 0$
4.  $x(t) = 1 - \cos t$ ,  $t \in \mathbb{R}$
5.  $x(t) = (1 + t^2)(t + \frac{3}{2})$ ,  $t \in \mathbb{R}$
6.  $x(t) = 1$
7.  $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$
8.  $x(t) = \frac{\sin t - \pi}{t^2} - \frac{\cos t}{t}$ ,  $t > 0$
9.  $x(t) = \frac{te^t - e + 2}{t}$ ,  $t > 0$
10.  $x(t) = \frac{t}{t+1}(t - 1 + \ln t)$ ,  $t > 0$
11.  $x(t) = (e - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} e^t)e^{-t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$
12.  $x(t) = 6 - 7 \exp \frac{1-t^3}{3}$ ,  $t \in \mathbb{R}$
13.  $x(t) = (2 + \frac{2}{3}t^3)(t^2 + 1)^{-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}$
14.  $x(t) = t^2(3e^{1+1/t} + 1)$ ,  $t < 0$
15.  $x(t) = (4 - e^2 + e^t)\frac{1}{t}$ ,  $t > 0$
16.  $x(t) = (-\frac{3}{2} + t + \frac{t^2}{2})\frac{t}{t+1}$ ,  $t > 0$
17.  $x(t) = \xi \frac{t^2}{\tau^2} + (t^2 - \tau^2)t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$
18.  $x(t) = \xi \frac{2t+1}{2\tau+1} + (2t+1)\ln(2t+1) + 1 - \frac{2t+1}{2\tau+1}$ ,  $t > -\frac{1}{2}$
19.  $x(t) = \xi \frac{\cos t}{\cos \tau} - \operatorname{tg} \tau \cos t + \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
20.  $x(t) = \xi \frac{t^2}{\tau^2} + \frac{t^2}{2\tau^2}(1 + \ln \tau) - \frac{1}{2}(1 + \ln t)$ ,  $t > 0$
21.  $x(t) = \xi \frac{t}{\tau} + (\cos t + t \sin t - \cos \tau - \tau \sin \tau)t$ ,  $t > 0$



22.  $x(t) = \xi \frac{\tau}{t} e^{\tau-t} + (t^2 - \frac{\tau^3}{t}) e^{-t}, t > 0$
23.  $x(t) = \xi \frac{1+t^2}{1+\tau^2} + (t-\tau)(1+t^2), t \in \mathbb{R}$
24.  $x(t) = \xi \frac{t}{\tau} + \frac{t}{2} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\tau^2}), t > 0$
25.  $x(t) = (t + 2e - 1)e^{-t} + 0$
26.  $x(t) = \frac{4}{3} e^{-3t} + t - \frac{1}{3}$
27.  $x(t) = -5 e^{-t-1} + t^2 - 2t + 2$
28.  $x(t) = -\frac{15}{13} e^{-2t} + \frac{2}{13} \cos 3t + \frac{3}{13} \sin 3t$
29.  $x(t) = \frac{\omega^2}{\omega^2+1} e^{-t} - \frac{\omega^2}{\omega^2+1} \cos \omega t + \frac{\omega}{\omega^2+1} \sin \omega t$
30.  $x(t) = t\sqrt{2t}, t > 0$
31.  $x(t) = (t^2 - 1 + 2\sqrt{1-t^2})^{1/2}, t \in (-1, 1)$
32.  $x(t) = 7t^{-4}, t > 0$
33.  $x(t) = \frac{2t+2}{t^2+2t-2}, t \in (-1+\sqrt{3}, \infty)$
34.  $x(t) = -t^{-2}(2e^t - 2e + 1)^{-1/2}, t > 0$
35.  $x(t) = (e^{4t} - \frac{4t+5}{16})^{1/3}, t \in \mathbb{R}$
36.  $x(t) = \frac{1}{9} [4(1-t^2)^{1/4} + t^2 - 1]^{1/3}, t \in (-1, 1)$
37.  $x(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 1 + 2e)^2 \exp(-2t^2), t \in \mathbb{R}$
38.  $x(t) = t^4(\sqrt{2} + \log \sqrt{-t})^2, t < 0$

## 2. DIFERENCIÁLNE ROVNICE n-TÉHO RÁDU

Doteraz sme sa zaoberali diferenciálnymi rovnicami, v ktorých vystupovala neznáma funkcia spolu s jej prvou deriváciou. Mnohé systémy sú vyjadrené rovnicami, v ktorých vystupujú aj vyššie derivácie neznámej (stavovej) funkcie. Napr. pohyb hmotného bodu podľa Newtonovho pohybového zákona je vyjadrený rovnicou

$$m x'' = F(t, x, x')$$

kde  $x''$  je funkcia zrýchlenia pohybu a funkcia  $F$  je sila závislá od časovej premennej  $t$ , od samotnej polohy  $x(t)$  ako aj od rýchlosti pohybu hmotného bodu. Uvedená rovnica je druhého rádu. Rovnice tohto typu opisujú aj RCL-obvody s neznámou funkciou náboja. S rovnicami štvrtého rádu sa možno stretnúť v stavebnej mechanike pri výpočtoch mostových konštrukcií.

### 2.1 ZAČIATOČNÁ ÚLOHA, VŠEOBECNÉ RIEŠENIE

Obyčajnú diferenciálnu rovnicu n-tého rádu možno vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

kde  $F$  je reálna funkcia  $n+2$  premenných,  $t$  je časová premenná,  $x$  je neznáma funkcia premennej  $t$  a  $x', \dots, x^{(n)}$  sú jej derivácie.

My sa budeme zaoberať len rovnicami s explicitne vyjadrenou n-tou deriváciou

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Rovnice druhého rádu tohto typu sa veľmi často vyskytujú v mechanických a elektrotechnických aplikáciách. Ak neznáma funkcia  $x$  časovej premennej  $t$  vyjadruje pohyb telesa, alebo častice hmotnosti  $m$ , potom je rovnica pohybu určená Newtonovým pohybovým zákonom:

$$m x'' = F(t, x, x').$$

Funkcia  $F$  vyjadruje silu spôsobujúcu pohyb, ktorá môže závisieť aj od polohy a rýchlosti telesa, alebo častice. Typickým príkladom je rovnica pohybu telesa zaveseného na pružine. Ak ho vychýlime z rovnovážnej polohy do polohy  $\xi$ , teleso sa rozkmitá pod vplyvom sily, ktorá je v každom časovom okamihu priamo úmerná opačnej výchylke

$$F(t) = -k x(t), k > 0$$

V prípade, že berieme do úvahy aj odpor prostredia, ktorý je priamo úmerný



opačnej rýchlosti, silová funkcia vyjadrená vzťahom

$$F(t) = -k x(t) - d x'(t), \quad d > 0$$

Diferenciálna rovnica druhého rádu pre určenie funkcie pohybu má potom tvar

$$x'' = -\frac{k}{m} x - \frac{d}{m} x', \quad k > 0, \quad d \geq 0, \quad m > 0$$

Ak na teleso v začiatočnom čase nepôsobí žiadny impulz, dostávame *začiatočné podmienky*

$$x(0) = \xi, \quad x'(0) = 0$$

Vráťme sa k rovnici

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.1)$$

### Definícia 2.1 Riešenie rovnice n-tého rádu

Riešením diferenciálnej rovnice (1.1) je každá n-krát diferencovateľná funkcia  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ), pre ktorú

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

pre všetky  $t \in (a, b)$ .

Množina všetkých riešení rovnice (1.1) sa nazýva *všeobecné riešenie*.

Začneme s riešením diferenciálnej rovnice druhého rádu, ktorú možno pretransformovať na rovnicu prvého rádu.

### Príklad 2.1

Riešme diferenciálnu rovnicu

$$x'' = x'^2 + 1 \quad (1.2)$$

Riešenie. Pri riešení využijeme fakt, že v rovnici sa nevyskytuje neznáma funkcia, ale len jej derivácie.

Položme  $x' = y$ . Potom  $x'' = y'$  a rovnicu (1.2) transformujeme na obyčajnú diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$y' = y^2 + 1 \quad (1.3)$$

Rovnica (1.3) je so separovanými premennými. Jej riešenie spĺňajúce začiatočnú podmienku  $y(\tau) = \xi$  dostaneme z identity

$$\int_{\xi}^y \frac{1}{z^2 + 1} dz = \arctg y - \arctg \xi = t - \tau$$

alebo

$$\arctg y = t + C_1 \quad (1.4)$$

Z rovnice (1.4) dostaneme všeobecné riešenie rovnice (1.3) v tvare

$$y(t) = \operatorname{tg}(t + C_1), \quad -\frac{\pi}{2} - C_1 < t < \frac{\pi}{2} - C_1 \quad (1.5)$$

Zo vzťahu  $x' = y$  dostaneme rovnicu

$$x' = \operatorname{tg}(t + C_1)$$

ktorej všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = \int \operatorname{tg}(t + C_1) dt = -\ln \cos(t + C_1) + C_2$$

Súčasne sme dostali aj všeobecné riešenie rovnice (1.3):

$$x(t) = C_2 - \ln \cos(t + C_1) \quad (1.6)$$

$$-\frac{\pi}{2} - C_1 < t < \frac{\pi}{2} - C_1; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

### Poznámka 2.1.

Predchádzajúci príklad sme riešili metódou zníženia rádu rovnice. Uvedenou metódou môžeme riešiť aj rovnice tvaru

$$x^{(n)} = f(t, x^{(k)}, \dots, x^{(n-1)}), \quad k \geq 1. \quad (1.7)$$

Substitúciou  $y = x^{(k)}$  transformujeme rovnicu (1.7) na rovnicu rádu  $n-k$ :

$$y^{(n-k)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-k+1)}).$$

Všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu môže byť často vyjadrené v tvare

$$x(t) = \varphi(t, c_1, \dots, c_n), \quad a(c_1, \dots, c_n) < t < b(c_1, \dots, c_n),$$

kde  $\varphi$  je funkcia  $n+1$  premenných,  $a, b$  sú funkcie  $n$  premenných a  $c_1, \dots, c_n$  sú ľubovoľné konštanty.

Ďalej zavedieme pojem začiatočnej úlohy podobne ako u rovnice 1. rádu. Vzhľadom k tomu, že všeobecné riešenie obsahuje  $n$  konštánt, treba na jednoznačné určenie riešenia  $n$  začiatočných podmienok. V prípade rovnice 2. rádu vyjadrujúcej pohyb hmotného bodu vyjadrujú začiatočné podmienky jeho začiatočnú polohu a začiatočnú rýchlosť.

### Definícia 2.2. Začiatočná úloha.

Nech  $f: (a, b) \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkcia,  $\tau \in (a, b)$ ,  $\xi_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . *Začiatočná úloha* pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu n-tého rádu je úloha nájsť riešenie  $x$  rovnice

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.8)$$

spĺňajúce *začiatočné podmienky*

$$x(\tau) = \xi_0, \quad x'(\tau) = \xi_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}. \quad (1.9)$$

### Príklad 2.2.

Riešte začiatočnú úlohu

$$x'' = (\cotg t)x' + \sin t, \quad 0 < t < \pi, \quad (1.10)$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1.11)$$

Riešenie. Substitúciou  $x' = y$  dostaneme začiatočnú úlohu pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$y' = (\cotg t)y + \sin t, \quad 0 < t < \pi, \quad (1.12)$$



$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1.13)$$

Riešenie úlohy (1.12), (1.13) hľadáme v tvare

$$y(t) = \xi(t)u\left(t, \frac{\pi}{2}\right),$$

kde

$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = \exp \int_{\pi/2}^t \cotg s \, ds = \sin t$$

Je prechodová funkcia homogénnej rovnice

$$y' = (\cotg t)y, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Dosadením funkcie  $y$  do úlohy (1.12), (1.13) dostaneme pre funkciu  $\xi$  vzťah

$$\xi(t) = \int_{\pi/2}^t \frac{1}{\sin s} \sin s \, ds = t - \frac{\pi}{2}$$

a teda

$$y(t) = (t - \frac{\pi}{2}) \sin t.$$

Riešenie pôvodnej začiatkovej úlohy (1.10), (1.11) má potom tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \int_{\pi/2}^t y(s) \, ds = 1 + \int_{\pi/2}^t (s - \frac{\pi}{2}) \sin s \, ds = \\ &= (\frac{\pi}{2} - t) \cos t + \sin t, \quad t \in (0, \pi). \end{aligned} \quad (1.14)$$

#### Poznámka 2.2.

Funkcia definovaná vzťahom (1.14) môže byť spojitě rozšírená na celú reálnu os  $\mathbb{R}$ . Samotné riešenie začiatkovej úlohy (1.10), (1.11) je definované len na intervale  $(0, \pi)$ , ktorý je maximálnym intervalom definičného oboru funkcie  $\cotg$  obsahujúcim bod  $\tau = \frac{\pi}{2}$ .

Rovnako ako v prípade rovnice 1. rádu každé riešenie začiatkovej úlohy (1.8), (1.9) uvažujeme definované na maximálne veľkom intervale obsahujúcom bod  $\tau$ . Platí nasledujúca veta o existencii a jednoznačnosti riešenia uvedenej úlohy. Dôkaz vety presahuje rámec textu a čitateľ ho môže nájsť za všeobecnejších predpokladov v literatúre ([6], [14]).

#### Veta 1.1.

Nech  $\tau \in (a, b)$ ,  $\xi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Ak funkcia  $f := f(t, y_1, \dots, y_n)$  je spojitá na množine  $(a, b) \times \mathbb{R}^n$  a má ohraňované parciálne derivácie podľa premenných  $y_1, \dots, y_n$  na každej množine  $\langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$ , tak existuje práve jedno riešenie začiatkovej úlohy (1.8), (1.9).

#### CVIČENIA 2.1

Nájdite všeobecné riešenie nasledujúcich diferenciálnych rovníc :

$$1. \quad x'' = 6t - t^{-2}$$

$$2. \quad x'' = \frac{1}{2x}, \quad x' > 0$$

$$3. \quad x''' = \frac{2}{t}$$

$$4. \quad x'' = \frac{x'}{t} + t^2$$

$$5. \quad x'' = \frac{x'^2 + 1}{t^2 + 1}$$

Riešte začiatkové úlohy :

$$6. \quad x'' = 3t^2, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1$$

$$7. \quad x''' = t^{-2}, \quad x(1) = 0, \quad x'(1) = 1, \quad x''(1) = 1$$

$$8. \quad x'' = \frac{x'}{t} + te^t, \quad x(-1) = 1, \quad x'(-1) = 0$$

$$9. \quad x'' = \frac{1}{2x}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2$$

$$10. \quad x'' = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad a > 0.$$

#### VÝSLEDKY CVIČENÍ 2.1

$$1. \quad x(t) = t^2 + \ln|t| + C_1 t + C_2, \quad t \neq 0$$

$$2. \quad x(t) = \frac{2}{3}(t+C_1)^{3/2} + C_2, \quad t > -C_1$$

$$3. \quad x(t) = t^2 \ln|t| + C_1 t^2 + C_2 t + C_3, \quad t \neq 0$$

$$4. \quad x(t) = \frac{1}{8}t^4 + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad x(t) = -C_1 t - (1+C_1^2) \ln|t-C_1| + C_2, \quad t \neq C_1$$

$$6. \quad x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t + 2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad x(t) = -t \ln t + t^2 - 1, \quad t > 0$$

$$8. \quad x(t) = e^t(t-1) + \frac{1}{2e}(5-t^2) + 1, \quad t < 0$$

$$9. \quad x(t) = \frac{2}{3}(t+4)^{3/2} - \frac{16}{3}, \quad t > -4$$

$$10. \quad x(t) = a \cos t - a - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$