

Riešenie úlohy spĺňa vzťah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = A$$

čo znamená, že množstvo populácie sa blíži s rastúcou časovou hodnotou k stabilnej hodnote A na rozdiel od predchádzajúcich príkladov, kde riešenia rovníc populačnej dynamiky mali nevlastnú limitu v nekonečnom, resp. konečnom čase. V prípade $0 < \xi < A$ je funkcia vyjadrujúca riešenie rastúca a v prípade $\xi > A$ klesajúca (obr.6).

Postup riešenia predchádzajúcich úloh môžeme použiť aj pri riešení všeobecnejšej začiatkovej úlohy pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu so separovanými premennými

$$x' = f(t)g(x) \quad (3.23)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (3.24)$$

Ak $g(\xi) = 0$, funkcia

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \xi$$

je stacionárne riešenie.

Nech $\xi \in (c,d)$, $g(x) \neq 0$ pre všetky $x \in (c,d)$ a funkcie $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g:(c,d) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité.

Rovnicu (3.23) zapíšeme v tvare

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

a formálne

$$\frac{1}{g(x)} dx = f(t) dt$$

Obojstranne ju integrujeme so zreteľom na začiatkové podmienky a dostaneme rovnosť

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy = \int_{\tau}^t f(s) ds$$

resp.

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy = G_0(x) = H(t) = \int_{\tau}^t f(s) ds$$

Riešenie začiatkovej úlohy (3.23), (3.24) má potom tvar

$$x(t) = G_0^{-1}[H(t)], t \in (\alpha, \beta) \quad (3.25)$$

Interval (α, β) obsahuje všetky body $t \in (a, b)$, pre ktoré platí $H(t) \in (\gamma, \delta)$, kde (γ, δ) je definičný obor inverznej funkcie G_0^{-1} .

Príklad 1.12.

Riešme začiatkovú úlohu

$$x' = -\frac{t}{x} \quad (3.26)$$

$$x(\tau) = \xi, \xi \neq 0 \quad (3.27)$$

Riešenie. Ak $\xi > 0$, tak v rovnici (3.26) predpokladáme $x > 0$ a vyjadríme ju v tvare

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

resp.

$$x dx = -t dt$$

Po integrovaní dostaneme vzťahy:

$$\int_{\xi}^x y dy = -\int_{\tau}^t s ds$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - \xi^2) = -\frac{1}{2}(t^2 - \tau^2)$$

$$x^2 = \xi^2 + \tau^2 - t^2$$

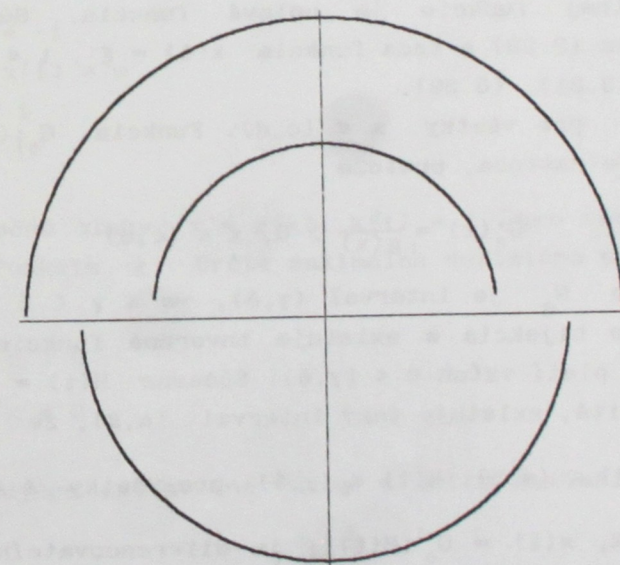
Použitím inverznej funkcie dostaneme s prihliadnutím na predpoklad $x > 0$ riešenie začiatkovej úlohy (3.26), (3.27) v tvare

$$x(t) = (\xi^2 + \tau^2 - t^2)^{1/2}, -(\xi^2 + \tau^2)^{1/2} < t < (\xi^2 + \tau^2)^{1/2} \quad (3.28)$$

Ak $\xi < 0$, riešenie úlohy (3.34), (3.35) má tvar

$$x(t) = -(\xi^2 + \tau^2 - t^2)^{1/2}, -(\xi^2 + \tau^2)^{1/2} < t < (\xi^2 + \tau^2)^{1/2} \quad (3.29)$$

Grafy riešení pre rôzne hodnoty (τ, ξ) sú polkružnice so stredom v bode $(0,0)$ a polomerom $(\xi^2 + \tau^2)^{1/2}$ ležiace v hornej, resp. v dolnej polrovine (obr.7).



Obr. 7

Grafy riešení začiatkových úloh (3.26), (3.27)

V nasledujúcej vete zdôvodníme postup riešení predchádzajúcich úloh.

Veta 1.2.

Nech $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g:(c,d) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie, $\tau \in (a,b)$, $\xi \in (c,d)$.

a) Ak $g(\xi) = 0$, funkcia

$$x:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \xi \quad (3.30)$$

je *stacionárne* riešenie začiatkovej úlohy

$$x' = f(t)g(x) \quad (3.31)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (3.32)$$

b) Ak $g(x) \neq 0$ pre všetky $x \in (c,d)$, existuje jediné riešenie začiatkovej úlohy (3.31), (3.32), ktoré má tvar

$$x(t) = G_0^{-1}[H(t)], t \in (\alpha, \beta) \quad (3.33)$$

kde

$$H(t) = \int_{\tau}^t f(s)ds, \tau \in (\alpha, \beta) \subseteq (a,b) \quad (3.34)$$

$$G_0(x) = \int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy, x \in (c,d) \quad (3.35)$$

D ō k a z. Ak $g(\xi) = 0$, tak dosadením do rovnice (3.32) vidíme, že konštantná funkcia definovaná vzťahom (3.31) spĺňa rovnicu (3.32), pretože derivácia konštantnej funkcie je nulová funkcia. Súčasne je splnená začiatková podmienka (3.33) a teda funkcia $x(t) = \xi$, $t \in (a,b)$ je riešením začiatkovej úlohy (3.31), (3.32).

Nech $g(x) > 0$ pre všetky $x \in (c,d)$. Funkcia $G_0:(c,d) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná integrálom (3.35) je rastúca, pretože

$$G_0'(x) = \frac{1}{g(x)} > 0, x \in (c,d)$$

Obor hodnôt funkcie G_0 je interval (γ, δ) , $-\infty \leq \gamma < \delta \leq \infty$. Teda funkcia $G_0:(c,d) \rightarrow (\gamma, \delta)$ je bijekcia a existuje inverzná funkcia $G_0^{-1}:(\gamma, \delta) \rightarrow (c,d)$. Pretože $G_0(\xi) = 0$, platí vzťah $0 \in (\gamma, \delta)$. Súčasne $H(\tau) = 0$. Pretože funkcia $H:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, existuje taký interval (α, β) , že

$$\tau \in (\alpha, \beta) \subseteq (a,b), H(t) \in (\gamma, \delta) \text{ pre všetky } t \in (\alpha, \beta)$$

Funkcia $x:(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = G_0^{-1}[H(t)]$; je diferencovateľná a podľa viet o derivácii inverznej a zloženej funkcie ([18]) platí:

$$x'(t) = g(x(t))f(t), t \in (\alpha, \beta)$$

Teda funkcia definovaná vzťahom (3.33) je riešením začiatkovej úlohy (3.31), (3.32).

Ešte treba dokázať, že uvedené riešenie je jediné.

Nech $y:(\alpha_0, \beta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ je riešením začiatkovej úlohy (3.31), (3.32). Teda

$$y'(t) = f(t)g(y(t))$$

a

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t), t \in (\alpha_0, \beta_0)$$

Po integrovaní poslednej rovnosti v hraniciach od τ do t dostaneme podľa vety o integrovaní substitúciou vzťahy

$$G_0[y(t)] - G_0[y(\tau)] = G_0[y(t)] - G_0(\xi) = G_0[y(t)] = H(t)$$

a teda

$$y(t) = G_0^{-1}[H(t)] = x(t), t \in (\alpha_0, \beta_0)$$

Pretože riešenie uvažujeme na maximálne možnom intervale, ktorým je podľa predchádzajúceho priebehu dôkazu interval (α, β) , je riešenie definované vzťahom (3.33) jediné.

Ak $g(\xi) < 0$, postupovali by sme v dôkaze rovnakým spôsobom. V tomto prípade je funkcia $G_0:(c,d) \rightarrow \mathbb{R}$ klesajúca.

CVIČENIA 1.3

Riešte nasledujúce začiatkové úlohy. Určte maximálne definičné obory riešení:

1. $x' = -x$, $x(0) = -1$
2. $x' = x(x+1)$, $x(1) = e$
3. $x' = x^3$, $x(0) = 1$
4. $x' = e^{-x}$, $x(e) = 1$

Riešte začiatkové úlohy $x' = g(x)$, $x(\tau) = \xi$ pre všetky hodnoty ξ z definičného oboru funkcie g . Určte maximálne definičné obory riešení, ak

5. $g(x) = x^2$,
6. $g(x) = x \ln x$, $x > 0$
7. $g(x) = \frac{1+x^2}{x}$, $x \neq 0$

Riešte nasledujúce začiatkové úlohy a určte maximálne definičné obory riešení:

8. $x' = \frac{e^t}{\sin x}$, $x(0) = \frac{\pi}{2}$
9. $x' = \frac{t}{\sin x}$, $x(1) = \frac{\pi}{3}$

10. $x' = \frac{e^t}{x}$, $x(\ln 2) = 2$
11. $x' = (x - 2) \cotg t$, $x(\frac{\pi}{2}) = 3$
12. $x' = -x \tg t$, $x(0) = -2$
13. $x' = \frac{x^2 - x}{t}$, $x(1) = \frac{1}{2}$
14. $x' = \frac{\sin x}{t}$, $x(1) = \frac{\pi}{2}$
15. $x' = \frac{x(\ln x - 1)}{t - 1}$, $x(2) = \sqrt{e}$
16. $x' = -\frac{tx}{t+1}$, $x(0) = -1$
17. $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$, $x(0) = 1$

Riešte začiatkové úlohy $x' = f(t)g(x)$, $x(\tau) = \xi$ pre všetky prípustné hodnoty τ , ξ a určte maximálne definičné obory riešení, ak

18. $f(t)g(x) = t e^{-x}$
19. $f(t)g(x) = \frac{e^x}{t}$, $t \neq 0$
20. $f(t)g(x) = 2xt^{-3}$, $t \neq 0$
21. $f(t)g(x) = e^{t+x}$
22. $f(t)g(x) = \frac{1}{tx}$, $t \neq 0$, $x \neq 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 1.3

1. $x(t) = -e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$
2. $x(t) = \frac{e^t}{e + 1 - e^t}$, $t < \ln(e + 1)$
3. $x(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$, $t < \frac{1}{2}$
4. $x(t) = \ln t$, $t \in \mathbb{R}$
5. $x(t) = \frac{\xi}{1 - \xi(t - \tau)}$, $t \in (\frac{1}{\xi}, \infty)$, ak $\xi < 0$; $t \in \mathbb{R}$, ak $\xi = 0$,
 $t \in (-\infty, \frac{1}{\xi})$, ak $\xi > 0$
6. $x(t) = \xi e^{t-\tau}$, $t \in \mathbb{R}$
7. $x(t) = [(1 + \xi^2)e^{2(t-\tau)} - 1]^{1/2}$, $t > -\frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2)$, ak $\xi > 0$;
 $x(t) = -[(1 + \xi^2)e^{2(t-\tau)} - 1]^{1/2}$, $t > -\frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2)$, ak $\xi < 0$
8. $x(t) = \arccos(1 - e^t)$, $t < \ln 2$
9. $x(t) = \arccos(1 - \frac{t^2}{2})$, $0 < t < 2$

10. $x(t) = (2e^t)^{1/2}$, $t \in \mathbb{R}$
11. $x(t) = 2 + \sin t$, $0 < t < \pi$
12. $x(t) = -2 \cos t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
13. $x(t) = \frac{1}{t+1}$, $t > 0$
14. $x(t) = \arccos \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $t > 0$
15. $x(t) = e^{(3-t)/2}$, $t > 1$
16. $x(t) = -(t+1)e^{-t}$, $t > -1$
17. $x(t) = \frac{1+t}{1-t}$, $t < 1$
18. $x(t) = \ln(\frac{t^2}{2} - \frac{\tau^2}{2} + e^\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, ak $2e^\xi - \tau^2 > 0$; $t > 0$, ak
 $2e^\xi - \tau^2 = 0$ a $\tau > 0$; $t < 0$, ak $2e^\xi - \tau^2 = 0$ a $\tau < 0$;
 $t > (\tau^2 - 2e^\xi)^{1/2}$, ak $2e^\xi - \tau^2 < 0$ a $\tau > 0$;
 $t < -(\tau^2 - 2e^\xi)^{1/2}$, ak $2e^\xi - \tau^2 < 0$ a $\tau < 0$
19. $x(t) = -\ln[e^{-\xi} + \ln \tau - \ln t]$, $0 < t < \tau \exp[\exp(-\xi)]$
20. $x(t) = \xi \exp(\tau^{-2} - t^{-2})$, $t > 0$, ak $\tau > 0$; $t < 0$, ak $\tau < 0$
21. $x(t) = -\ln(e^{-\xi} + e^\tau - e^t)$, $t < \ln(e^{-\xi} + e^\tau)$
22. $x(t) = (\text{sign } \xi)(2 \ln \frac{t}{\tau} + \xi^2)^{1/2}$, $t > \tau \exp(-\frac{\xi^2}{2})$, ak $\tau > 0$
 $t < \tau \exp(-\frac{\xi^2}{2})$, ak $\tau < 0$

1.4 LINEÁRNE HOMOGENÉNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE 1. RÁDU

Nájsť riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

je vo všeobecnosti možné len numerickými metódami. Napriek veľkému rozšíreniu účinných numerických algoritmov, je pre získanie informácií o kvalitatívnom správaní systému opísaného pomocou diferenciálnej rovnice výhodnejšie poznať jej riešenie vyjadrené pomocou elementárnych funkcií. Medzi také rovnice, pre ktoré je to možné patria lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu tvaru

$$x' = p(t)x + q(t)$$

Tieto rovnice najčastejšie vznikajú aproximáciou funkcie $x \rightarrow f(t, x)$ lineárnou funkciou použitím Taylorovho polynómu 1. stupňa.

Prvým krokom k riešeniu začiatočnej úlohy pre uvedenú lineárnu diferenciálnu rovnicu je riešenie začiatočnej úlohy pre lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$x' = p(t)x \quad (4.1)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (4.2)$$

Rovnica (4.1) je rovnica so separovanými premennými, a teda začiatočnú úlohu (4.1), (4.2) riešime metódou opísanou v predchádzajúcej časti. Riešenie môžeme vyjadriť explicitne na základe nasledujúcej vety.

Veta 1.3

Nech $p: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, $\tau \in (a, b)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Potom existuje práve jedno riešenie začiatočnej úlohy (4.1), (4.2), ktoré má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (4.3)$$

Dôkaz. Rovnica (4.1) je špeciálnym prípadom rovnice

$$x' = f(t)g(x)$$

kde

$$f(t) = p(t), \quad g(x) = x$$

$$G_0(x) = \int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy = \int_{\xi}^x \frac{1}{y} dy = \ln \frac{x}{\xi}, \quad x \neq 0, \quad \xi \neq 0$$

$$G_0^{-1}(y) = \xi e^y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Na základe vety 1.2. dostaneme v prípade $\xi \neq 0$ jediné riešenie začiatočnej úlohy (4.1), (4.2), ktoré má tvar (4.3).

Vzťah (4.3) platí aj pre začiatočnú hodnotu $\xi = 0$, pretože v tom prípade je nulová funkcia stacionárnym riešením. Toto riešenie je jediné. V

opačnom prípade by nenulové riešenie prechádzajúce bodom $(\tau, 0)$ splňovalo v niektorom bode začiatočnú podmienku $x(\tau_0) = \xi \neq 0$. Toto riešenie má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_{\tau_0}^t p(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

a je nenulové pre všetky $t \in \mathbb{R}$, čo je spor s podmienkou $x(\tau) = 0$.

Príklad 1.13

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = |t|x, \quad x(0) = \xi \quad (4.4)$$

Riešenie. Podľa vety 4.1 má riešenie tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_0^t |s| ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

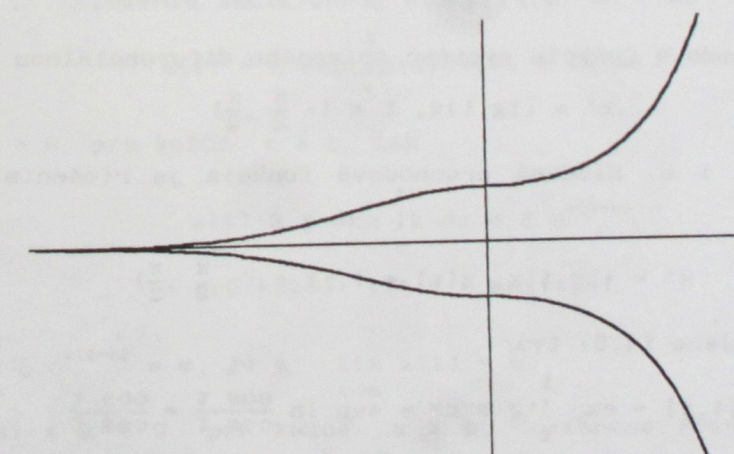
Platí vzťah

$$\int_0^t |s| ds = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{ak } t \geq 0; \\ -\frac{t^2}{2}, & \text{ak } t < 0; \end{cases} = \frac{1}{2} t|t|$$

Riešením úlohy (4.4) je potom funkcia

$$x(t) = \xi \exp \frac{t|t|}{2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Z formuly (4.3) vidieť, že os $x = 0$, ktorá je súčasne grafom stacionárneho riešenia rovnice (4.1), oddeľuje od seba dve sústavy grafov riešení začiatočnej úlohy (4.2), (4.3). V hornej polrovine sa nachádzajú grafy riešení v prípade $\xi > 0$, v dolnej polrovine v prípade $\xi < 0$ (obr. 8).



Obr. 8

Grafy riešení začiatočných úloh (4.4)

Množina všetkých riešení rovnice (4.1) tvorí jednorozmerný lineárny priestor. Každé riešenie rovnice

$$x' = p(t)x, \quad t \in (a, b)$$

možno vyjadriť v tvare

$$x(t) = \xi u(t, \tau), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \tau \in (a, b)$$

Funkcia $t \rightarrow u(t, \tau)$ definovaná predpisom

$$u(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t p(s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (4.5)$$

sa nazýva *prechodová funkcia začiatočnej úlohy* (4.1), (4.2).

Rovnica $x' = p(t)x$ opisuje chovanie niektorého systému v závislosti od času. Stavy tohto systému sú jednoznačne určené hodnotami riešenia uvedenej začiatočnej úlohy a prechodová funkcia u opisuje prechod systému od začiatočného stavu $x(\tau) = \xi$ do stavu, v ktorom sa systém nachádza v čase t .

Priamo z formuly (4.5) vyplývajú nasledujúce vlastnosti prechodovej funkcie :

- i) $u(t, \tau) > 0$
- ii) $u(\tau, \tau) = 1$
- iii) $u(t, \tau)u(\tau, \sigma) = u(t, \sigma)$
- iv) $[u(t, \tau)]^{-1} = u(\tau, t)$
- v) $\frac{d}{dt} u(t, \tau) = p(t)u(t, \tau)$
pre všetky $t, \tau, \sigma \in (a, b)$

Príklad 1.14

Nájdite prechodovú funkciu systému opísaného diferenciálnou rovnicou

$$x' = (tg t)x, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Riešenie. Hľadaná prechodová funkcia je riešením začiatočnej úlohy

$$x' = (tg t)x, \quad x(\tau) = 1, \quad \tau \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

a má podľa (4.3) alebo (4.5) tvar

$$u(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t tg s ds = \exp \ln \frac{\cos \tau}{\cos t} = \frac{\cos \tau}{\cos t}$$

$$t, \tau \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Vo väčšine aplikácií vystupujú lineárne diferenciálne rovnice definované na neohraničenom intervale. Často nie je treba poznať analytický tvar

riešenia rovnice, ale len niektoré jeho vlastnosti, ako napr. správanie sa riešenia pre nekonečne veľké hodnoty časovej premennej, alebo jeho periodickosť.

Vráťme sa k lineárnej úlohe populačnej dynamiky

$$x' = kx, \quad x(\tau) = \xi \quad (4.6)$$

Vieme, že začiatočná úloha (4.6) má riešenie

$$x(t) = \xi e^{k(t-\tau)}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Nech $\xi > 0$. Potom pre funkciu (4.8) platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } k > 0 \\ 0, & \text{ak } k < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Vlastnosť (4.8) možno zovšeobecniť aj pre lineárnu homogénnu rovnicu s premenným koeficientom. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 1.4

Nech $p: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, $\tau > a$, $\xi > 0$. Nech $x: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = p(t)x, \quad x(\tau) = \xi \quad (4.9)$$

a) Ak $p(t) \geq k > 0$ pre všetky $t \geq b > a$, tak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

b) Ak $p(t) \leq k < 0$ pre všetky $t \geq b > a$, tak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Dôkaz. Riešenie začiatočnej úlohy (4.9) má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) ds, \quad t \in (a, \infty).$$

Ak $p(s) \geq k > 0$ pre každé $s \geq b$, tak

$$x(t) \geq \xi \exp \int_c^t k ds = \xi e^{k(t-c)}$$

pre každé $t \geq c = \max\{\tau, b\}$.

Pretože $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi e^{k(t-c)} = \infty$, je aj $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.

Ak $p(s) \leq k < 0$ pre každé $s \geq b$, dostaneme rovnakým spôsobom ako v prvom prípade nerovnosť

$$0 \leq x(t) \leq \xi e^{k(t-c)} \quad \text{pre každé } t \geq c = \max\{\tau, b\}$$

Pretože v tomto prípade $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi e^{k(t-\alpha)} = 0$, je aj $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a dôkaz vety je skončený.

Ak pre riešenie úlohy (4.9) platí vzťah $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, nazývame ho *prechodným stavom*.

Príklad 1.15

Zistíme, či riešenie začiatkovej úlohy

$$x' = (t-t^2)x, \quad x(0) = \xi > 0$$

je prechodným stavom.

Riešenie. Koeficient diferenciálnej rovnice spĺňa vzťah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t-t^2) = -\infty$$

a teda existuje $b \in \mathbb{R}$ také, že $p(t) \leq -1$ pre všetky $t \geq b$. Potom podľa predchádzajúcej vety je $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a riešenie danej začiatkovej úlohy je prechodným stavom.

Uvažujme spojitú periodickú funkciu $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou $T > 0$, t.j. $p(t) = p(t+T)$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

Diferenciálne rovnice

$$x' = p(t)x, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

s periodickou funkciou p sa vyskytujú v mnohých aplikáciach. Typickým príkladom je RC-obvod s periodicky sa meniacimi odporom $R(t)$ a kapacitou $C(t)$. Ak položíme $p(t) = -\frac{1}{R(t)C(t)}$, tak riešenie rovnice (4.10) vyjadruje elektrický náboj ako funkciu závislú od času t . Prirodzenou je otázka periodickosti riešenia za predpokladu periodickosti funkcie $p(t)$.

Uvedieme najprv dva príklady.

Príklad 1.16

Nájdime riešenie začiatkovej úlohy

$$x' = (\cos t)x, \quad x(0) = \xi \quad (4.11)$$

a zistíme, či je periodické.

Riešenie. Riešenie úlohy (4.11) má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_0^t \cos s \, ds = \xi \exp \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Platia vzťahy

$$x(t+2\pi) = \xi \exp \sin(t+2\pi) = \xi \exp \sin t = x(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

a teda riešenie začiatkovej úlohy (4.11) je periodické s periódou $T = 2\pi$, ktorá je totožná s periódou funkcie $p(t) = \cos t$.

Príklad 1.17

Nájdime riešenie začiatkovej úlohy

$$x' = (\cos^2 t)x, \quad x(0) = \xi \quad (4.12)$$

a zistíme, či je periodické.

Riešenie. Riešenie úlohy (4.12) má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_0^t \cos^2 s \, ds = \xi \exp \int_0^t (1 + \cos 2s)/2 \, ds = \xi \exp\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Vidíme, že v tomto prípade riešenie úlohy (4.12) nie je periodické i napriek tomu, že funkcia $p(t) = \cos^2 t$, $t \in \mathbb{R}$ má periódu $T = 2\pi$.

Nasledujúca veta vysvetľuje podstatu rozdielu medzi poslednými dvoma príkladmi.

Veta 1.5

Nech $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá periodická funkcia s periódou $T > 0$, pričom

$$\int_t^{t+T} p(s) \, ds = 0 \quad (4.13)$$

pre každé $t \in \mathbb{R}$.

Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (4.10) je periodické s periódou T .

Dôkaz. Každé riešenie rovnice (4.10) má tvar

$$x(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

kde (τ, ξ) je ľubovoľná dvojica čísel spĺňajúca podmienku $x(\tau) = \xi$. Ďalej platia vzťahy

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \xi \exp \int_{\tau}^{t+T} p(s) \, ds = \xi \exp \left[\int_{\tau}^t p(s) \, ds + \int_t^{t+T} p(s) \, ds \right] = \\ &= \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) \, ds = x(t) \quad \text{pre všetky } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a teda riešenie rovnice (4.10) má periódu T , čím je dôkaz vety skončený.

Poznámka 1.2

Z periodickosti funkcie p vyplýva, že podmienka (4.13) je splnená, ak platí vzťah

$$\int_{\tau}^{\tau+T} p(s) \, ds = 0$$

pre niektoré číslo $\tau \in \mathbb{R}$.

CVIČENIA 1.4

Riešte nasledujúce začiatkové úlohy:

1. $x' = t x \sin t$, $x(\pi) = 1$
2. $x' = \frac{x}{t^2 + 2t + 2}$, $x(0) = 3$
3. $x' = \frac{x}{(t+1)(2t-3)}$, $x(1) = 2$
4. $x' = \frac{x}{\cos t}$, $x(0) = -1$
6. $x' = \frac{x}{\sin t}$, $x(\frac{\pi}{2}) = \xi$

Určte prechodovú funkciu začiatkovej úlohy

$$x' = p(t)x, \quad x(\tau) = \xi, \quad \text{ak}$$

6. $p(t) = t\sqrt{1-t^2}$, $|t| \leq 1$
7. $p(t) = \frac{1}{t}(\ln t)^{1/2}$, $t \geq 1$
8. $p(t) = \frac{1}{2t-1}$, $t \neq \frac{1}{2}$
9. $p(t) = (\cotg 3t)$, $0 < t < \frac{\pi}{3}$
10. $p(t) = \frac{1}{t \ln t}$, $t > 0$, $t \neq 1$

Nájdite $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ (ak existuje) riešenia $x: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nasledujúcich začiatkových úloh.

11. $x' = tx$, $x(0) = 1$
12. $x' = (2 + \sin t)x$, $x(\tau) = \xi$, $\xi > 0$
13. $x' = (\sin t)x$, $x(\tau) = \xi$
14. $x' = (1 - t^2)x$, $x(1) = 4$
15. $x' = (t + t^3)x$, $x(0) = -2$

Zistite, či sú riešenia nasledujúcich rovníc periodické a určte ich periódy T .

16. $x' = (\sin 2t)x$
17. $x' = (t \sin t)x$
18. $x' = (\sin^3 t)x$
19. $x' = [\arcsin(\sin t)]x$
20. $x' = [\arccos(\cos t)]x$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 1.4

1. $x(t) = \exp(\sin t - t \cos t - \pi)$, $t \in \mathbb{R}$
2. $x(t) = 3 \exp[\arctg(t+1) - \frac{\pi}{4}]$, $t \in \mathbb{R}$

3. $x(t) = 2 \left(\frac{6-4t}{1+t} \right)^{1/5}$, $-1 < t < \frac{3}{2}$
4. $x(t) = - \left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right)^{1/2}$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
5. $x(t) = \xi \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $0 < t < \pi$
6. $u(t, \tau) = \exp[(1-\tau^2)^{3/2}/3 - (1-t^2)^{3/2}/3]$, $-1 < t, \tau < 1$
7. $u(t, \tau) = \exp[\frac{2}{3}(\ln t)^{3/2} - \frac{2}{3}(\ln \tau)^{3/2}]$; $t, \tau \geq 1$
8. $u(t, \tau) = \left(\frac{2t-1}{2\tau-1} \right)^{1/2}$; $t, \tau < \frac{1}{2}$; $t, \tau > \frac{1}{2}$
9. $u(t, \tau) = \left(\frac{\sin 3t}{\sin 3\tau} \right)^{1/3}$; $0 < t, \tau < \frac{\pi}{3}$
10. $u(t, \tau) = \frac{\ln t}{\ln \tau}$; $0 < t, \tau < 1$; $t, \tau > 1$
11. ∞
12. ∞
13. Limita neexistuje
14. 0
15. $-\infty$
16. $T = \pi$
17. Nie je periodická
18. $T = 2\pi$
19. $T = 2\pi$
20. Nie je periodická.

1.5. LINEÁRNE NEHOMOGÉNNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE 1. RÁDU

Ako už bolo spomenuté v úvode predchádzajúcej časti, veľký význam z hľadiska teórie aj aplikácií má začiatočná úloha pre lineárnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu (1. rádu)

$$x' = p(t)x + f(t), \quad t \in (a, b) \quad (5.1)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (5.2)$$

Úloha (5.1), (5.2) je charakterizovaná pri pevnej funkcii p a začiatočnej časovej hodnote τ dvoma vstupnými údajmi :

1. začiatočný vstup $\xi \in \mathbb{R}$,

2. silový vstup $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Začiatočnému vstupu zodpovedá *začiatočná odozva* - funkcia $x_h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením začiatočnej úlohy pre homogénnu rovnicu

$$x' = p(t)x, \quad t \in (a, b) \quad (5.3)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (5.4)$$

Z predchádzajúcej časti vieme, že funkcia x_h je jednoznačne určená a má tvar

$$x_h(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) ds \quad (5.5)$$

Silovému vstupu zodpovedá *vynútená odozva* - funkcia $x_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením začiatočnej úlohy

$$x' = p(t)x + f(t), \quad t \in (a, b) \quad (5.6)$$

$$x(\tau) = 0 \quad (5.7)$$

Dosadením do rovnice (5.7) sa ľahko presvedčíme, že súčet začiatočnej a silovej odozvy - funkcia $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$x(t) = x_h(t) + x_f(t), \quad t \in (a, b) \quad (5.8)$$

je riešením pôvodnej začiatočnej úlohy (5.1), (5.2).

Príklad 1.18

Zistíme časový priebeh chladnutia telesa začiatočnej teploty ξ , ktoré je obklopené prostredím teploty $T < \xi$.

Riešenie. Relatívny pokles teploty telesa je priamo úmerný rozdielu teploty T vonkajšieho prostredia a neznámej teploty $x(t)$ daného telesa, pričom konštanta úmernosti závisí od hmotnosti telesa a od

špecifického tepla látky. Dostaneme tak rovnicu

$$x' = k(T - x)$$

alebo

$$x' = -kx + kT, \quad k > 0 \quad (5.9)$$

so začiatočnou podmienkou

$$x(0) = \xi \quad (5.10)$$

Začiatočná odozva x_h je riešením začiatočnej úlohy

$$x' = -kx, \quad x(0) = \xi$$

a má tvar

$$x_h(t) = \xi e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Vynútená odozva x_f je riešením začiatočnej úlohy

$$x' = -kx + kT \quad (5.11)$$

$$x(0) = 0 \quad (5.12)$$

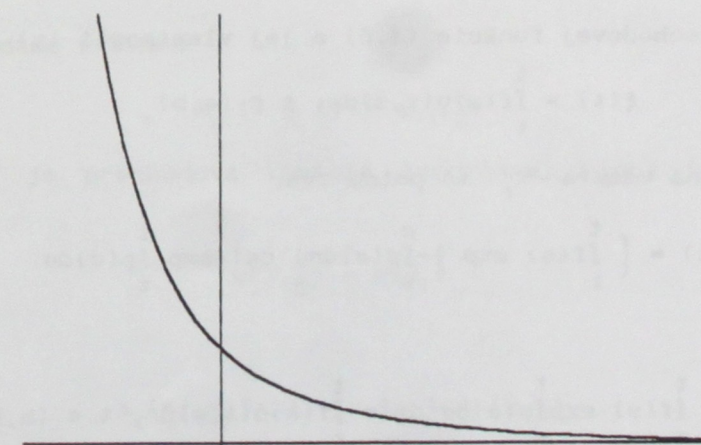
Pretože teplota T vonkajšieho prostredia je konštantná, je riešením rovnice (5.11) napr. funkcia $x_T(t) = T$. Aby bola splnená začiatočná podmienka (5.12), vyjadríme riešenie x_f úlohy (5.11), (5.12) v tvare

$$x_f(t) = T - T e^{-kt} = T(1 - e^{-kt})$$

Riešením začiatočnej úlohy (5.9), (5.10) je potom funkcia

$$x(t) = x_h(t) + x_f(t) = T + (\xi - T)e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Vidíme, že v procese ochladzovania klesá teplota telesa exponenciálne od začiatočnej teploty ξ k teplote vonkajšieho prostredia T (obr. 9).



Obr. 9

Priebeh teploty z príkladu 1.18 so vstupnými hodnotami $\xi = 3$, $T = 2$, $k = 3$

V predchádzajúcom príklade sme našli vynútenú odozvu x_f pre konštantné funkcie p, f . Vo všeobecnosti získame riešenie x_f začiatočnej úlohy (5.6), (5.7) vychádzajúc z riešenia x_h úlohy (5.3), (5.4). Použijeme metódu *variácie konštanty*. Metóda tkvie v nahradení konštanty ξ vo funkcii

$$x_h(t) = \xi \exp \int_{\tau}^t p(s) ds$$

funkciou $t \rightarrow \xi(t)$. Teda riešenie x_f hľadáme v tvare

$$x_f(t) = \xi(t) \exp \int_{\tau}^t p(s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (5.13)$$

kde $\xi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je (zatiaľ) neznáma diferencovateľná funkcia. Dosadením hľadanej funkcie x_f do nehomogénnej rovnice (5.6) dostaneme použitím vety o derivácii súčinu a zloženej funkcie vzťah

$$\begin{aligned} \xi'(t) \exp \int_{\tau}^t p(s) ds + \xi(t) p(t) \exp \int_{\tau}^t p(s) ds &= \\ &= p(t) \xi(t) \exp \int_{\tau}^t p(s) ds + f(t) \end{aligned}$$

a po úprave

$$\xi'(t) = f(t) \exp \left[-\int_{\tau}^t p(s) ds \right], \quad t \in (a, b) \quad (5.14)$$

Aby bola splnená nulová začiatočná podmienka (5.7), musí funkcia ξ spĺňať podmienku

$$\xi(\tau) = 0 \quad (5.15)$$

Riešením začiatočnej úlohy (5.14), (5.15) je funkcia

$$\xi(t) = \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[-\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \quad (5.16)$$

alebo pomocou prechodovej funkcie (4.5) a jej vlastností iv)

$$\xi(t) = \int_{\tau}^t f(s) u(\tau, s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (5.17)$$

Funkcia - vynútená odozva x_f má potom tvar

$$x_f(t) = \left(\int_{\tau}^t f(s) \exp \left[-\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right) \exp \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma \quad (5.18)$$

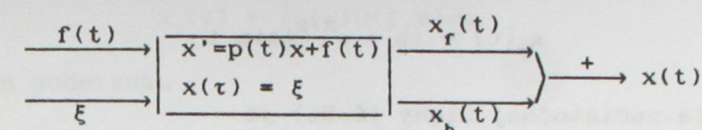
alebo

$$x_f(t) = \int_{\tau}^t f(s) \exp \int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma ds = \int_{\tau}^t f(s) u(t, s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (5.19)$$

Riešenie pôvodnej začiatočnej úlohy (5.1), (5.2) pre nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu má nakoniec tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_f(t) = \\ &= \left(\xi + \int_{\tau}^t f(s) \exp \left[-\int_{\tau}^s p(\sigma) d\sigma \right] ds \right) \exp \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma = \\ &= \xi u(t, \tau) + \int_{\tau}^t f(s) u(t, s) ds, \quad t \in (a, b) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Postup riešenia začiatočnej úlohy (5.1), (5.2) možno vyjadriť nasledujúcou schémou:



Príklad 1.19

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = (\cotg t)x + e^t \sin t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad (5.21)$$

Riešenie. I. Najprv riešime začiatočnú úlohu pre homogénnu rovnicu

$$x' = (\cotg t)x, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad (5.22)$$

Riešením začiatočnej úlohy (5.22) je funkcia - začiatočná odozva

$$\begin{aligned} x_h(t) &= 2 \exp \int_{\pi/2}^t \cotg s ds = 2 \exp \int_{\pi/2}^t \frac{\cos s}{\sin s} ds = \\ &= 2 \exp \ln(\sin t) = 2 \sin t, \quad t \in (0, \pi) \end{aligned}$$

II. Pokračujeme riešením nehomogénnej úlohy

$$x' = (\cotg t)x + e^t \sin t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (5.23)$$

Riešenie x_f hľadáme v tvare

$$x_f(t) = \xi(t) u(t, \frac{\pi}{2})$$

kde $t \rightarrow u(t, \frac{\pi}{2})$ je prechodová funkcia homogénnej úlohy (5.22). V našom prípade

$$u(t, \frac{\pi}{2}) = \sin t$$

a teda

$$x_f(t) = \xi(t) \sin t, \quad t \in (0, \pi)$$

Funkciu $\xi(t)$ nájdeme dosadením funkcie $x = x_f$ do nehomogénnej úlohy (5.23). Dostaneme rovnosť

$$\xi'(t) \sin t + \xi(t) \cos t = \cotg t \xi(t) \sin t + e^t \sin t$$