

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Prof. RNDr. Igor Bock, CSc. – RNDr. Ľubomír Marko, CSc.

DIFERENCIÁLNE ROVNICE

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Prof. RNDr. Igor Bock, CSc. – RNDr. Ľubomír Marko, CSc.

DIFERENCIÁLNE ROVNICE

© Prof. RNDr. Igor Bock, CSc., RNDr. Ľubomír Marko, CSc.

Lektori: Doc. RNDr. Rudolf Kodnár, DrSc.
RNDr. Milan Medved', CSc.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava,
Vazovova 5.

Schválilo vedenie Fakulty elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave - Rozhodnutie
č. 23.8/91 zo dňa 17.9.1991.

ISBN 80-227-1504-2

ÚVOD

Druhá polovica 17. storočia so vznikom newtonovskej mechaniky, diferenciálneho a integrálneho počtu podnietila aj rozvoj diferenciálnych rovníc ako dôležitého nástroja na modelovanie prírodných javov. Hlavnými zdrojmi inšpirácii pre tento rozvoj boli mechanika, fyzika, astronómia. Na skúmanie javov v mechanike a astronómii sa v tom čase vystačilo s obyčajnými diferenciálnymi rovnicami a ich systémami, v ktorých ako neznáme vystupujú reálne funkcie jednej reálnej premennej, zväčša časovej. Čoskoro sa ukázalo, že pre rozvoj ďalších fyzikálnych a technických disciplín treba skúmať javy odohrávajúce sa v čase aj v priestore, čo podnietilo vývoj parciálnych diferenciálnych rovníc s neznámymi funkciami viac premenných. V súčasnosti sa diferenciálne rovnice bohato využívajú nielen v technických disciplínach, ale aj v ekonomických, biologických a sociálnych vedách.

V elektrotechnike sa zvládnutie aparátu diferenciálnych rovníc ukázalo ako nevyhnutné o.i. v teórii elektromagnetického poľa a elektrických obvodov. Podstatný je prínos diferenciálnych rovníc a ich systémov v teórii riadenia, spracovania signálov, v lekárskej elektronike.

Predložený text je rozdelený do štyroch väčších celkov. V 1.kap.sa zaoberáme obyčajnými diferenciálnymi rovnicami 1. rádu. 2.kap. obsahuje obyčajné diferenciálne rovnice vyšších rádov a 3.kap. systémy obyčajných diferenciálnych rovníc. V 4. kap. sa čitateľ zoznámi so základmi parciálnych diferenciálnych rovníc. Každá kapitola pozostáva z niekoľkých častí. Vety, definície, poznámky a príklady sú číslované v každej kapitole dvojčíslím bez ohľadu na jednotlivé časti, pričom prvé číslo je totožné s číslom kapitoly. Vzorce sú číslované v každej časti dvojčíslím bez ohľadu na číslo kapitoly, pričom prvé číslo je totožné s číslom príslušnej časti. V texte sme použili niektoré výsledky lineárnej algebry a matematickej analýzy, ktoré čitateľ môže nájsť v lit. [7], [9], [10], [14], [18], [4]. Poznamenávame, že ovládanie základov matematickej analýzy a lineárnej algebry je nevyhnutné pre zvládnutie základov diferenciálnych rovníc. Rozsah skriptu ako aj výuky nám nedovolil preniknúť do väčšej hĺbky predmetu. Potenciálnym zájemcom odporúčame lit. [8], [11], [15], [16], [1], [2], [3], [12], [13], [18].

Je našou milou povinnosťou vysloviť vďaka recenzentom doc. RNDr. Rudolfovi Kodnárovi, Dr.Sc. a doc. RNDr. Milanovi Medveďovi, CSc. za ich cenné rady a pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu úrovne textu.

Bratislava, v auguste 1993

Autori

1. OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE 1. RÁDU

V tejto kapitole sa budeme zaoberať rovnicami, ktoré obsahujú neznámu reálnu funkciu jednej reálnej premennej spolu s jej prvou deriváciou. Ak $t \rightarrow x(t)$ je neznáma funkcia, potom obyčajná diferenciálna rovnica 1. rádu má tvar

$$F(t, x, x') = 0$$

kde F je daná funkcia troch premenných. Zameriame sa len na rovnice, pre ktoré

$$F(t, x, x') = f(t, x) - x'$$

a teda majú tvar

$$x' = f(t, x)$$

1.1 MOTIVAČNÉ PŘÍKLADY

Príklad 1.1 Priamočiary pohyb

Nech spojitá funkcia $v : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ vyjadruje premennú rýchlosť hmotného bodu pohybujúceho sa v kladnom smere osi x . Predpokladajme, že bod má polohu ξ v čase $\tau \in \langle 0, T \rangle$ a hľadáme funkciu vyjadrujúcu závislosť polohy (dráhy) hmotného bodu od času.

Riešenie. Ak $t \rightarrow x(t)$ je neznáma funkcia vyjadrujúca dráhu hmotného bodu, tak funkcia rýchlosti v je jej derivácia a tá spĺňa v každom bode t rovnosť

$$x'(t) = v(t)$$

Dostali sme jednoduchú formu diferenciálnej rovnice 1. rádu, ktorú môžeme vyjadriť aj v tvare

$$x' = v(t)$$

Vieme, že všetky funkcie spĺňajúce túto rovnicu majú tvar neurčitého integrálu

$$x(t) = \int v(t) dt$$

Aby sme využili známu polohu bodu

$$x(\tau) = \xi$$

vyjadríme neurčitý integrál pomocou určitého integrálu s dolnou hranicou τ a premennou hornou hranicou t a dostaneme vzťah

$$x(t) = \int_{\tau}^t v(s) ds + C$$

Na základe vety o derivácii integrálu podľa hornej hranice ([10], [18]) platí $x'(t) = v(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$. Aby bola splnená podmienka $x(\tau) = \xi$ dostávame rovnosť

$$x(\tau) = \int_{\tau}^{\tau} v(s) ds + C = 0 + C = C = \xi$$

a teda funkcia vyjadrujúca pohyb hmotného bodu má tvar

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t v(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

Poznámka 1.1

Výpočet neurčitého integrálu $\int f(t) dt$ je podľa jeho definície ekvivalentný s riešením diferenciálnej rovnice

$$x' = f(t)$$

Príklad 1.2 Voľný pád

Nech teleso hmotnosti m voľne padá pod vplyvom gravitačnej sily a sily odporu prostredia. Odvodíme rovnicu pre časovú funkciu jeho rýchlosti.

Riešenie. Ak $v(t)$ je rýchlosť telesa v čase t , tak podľa Newtonovho pohybového zákona platí vzťah

$$m v'(t) = F(t)$$

pričom $F(t)$ je sila pôsobiaca na teleso v čase t . V našom prípade

$$F(t) = mg - kv(t)$$

kde g je gravitačné zrýchlenie a $k > 0$ je konštanta vyjadrujúca odpor prostredia. Dostávame tak rovnicu pre funkciu rýchlosti v tvare

$$m v'(t) = mg - kv(t)$$

alebo

$$v' + \frac{k}{m} v = g$$

Príklad 1.3 Populačná dynamika

Pomocou matematických modelov môžeme predvídať rast a pokles množstva populácie v závislosti od času. Každú populáciu tvorí jeden druh, napr. ľudia, zvieratá, baktérie. Odvodíme diferenciálnu rovnicu pre množstvo populácie v čase t za predpokladu, že jednotlivé druhy populácie sú izolované.

R i e š e n i e. Základom našich úvah je vzorec pre pomer relatívneho prírastku populácie k danému množstvu $x(t)$. V jednoduchom prípade máme

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k$$

kde konštanta $k = m - n$ vyjadruje rozdiel prírastkových a úbytkových pomerov k celkovému množstvu populácie. Dostávame tak rovnicu

$$x' = kx$$

ktorá vyjadruje exponenciálny rast ($k > 0$), exponenciálny pokles ($k < 0$), alebo konštantné množstvo populácie ($k = 0$) v určitom časovom intervale.

Zložitejší, ale realistickejší model je vyjadrený vzťahom

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = F(x(t))$$

kde F je daná empiricky určená funkcia. Dostávame tak nelineárnu diferenciálnu rovnicu

$$x' = x F(x)$$

Ak populácia nie je izolovaná a na jej prírastok vplyvajú vonkajšie vplyvy vyjadrené funkciou $t \rightarrow f(t)$, dostaneme rovnicu

$$x' = x F(x) + f(t)$$

1.2 VŠEOBECNÉ RIEŠENIE A ZAČIATOČNÁ ÚLOHA

Ako bolo už spomenuté v úvode, budeme sa zaoberať obyčajnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu

$$x' = f(t, x) \quad (2.1)$$

Zavedieme prvý základný pojem teórie diferenciálnych rovníc - riešenie rovnice.

Definícia 1.1 Riešenie diferenciálnej rovnice

Diferencovateľná funkcia $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ je riešením diferenciálnej rovnice (2.1), ak

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

pre všetky $t \in (a, b)$.

Príklad 1.4

Ukážte, že funkcia $x(t) = ce^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$; je pre každé $c \in \mathbb{R}$ riešením diferenciálnej rovnice

$$x' = 2x \quad (2.2)$$

R i e š e n i e. Derivovaním funkcie x dostávame vzťahy

$$x'(t) = (ce^{2t})' = c \cdot 2e^{2t} = 2ce^{2t} = 2x(t)$$

pre všetky $t \in \mathbb{R}$ a porovnaním s rovnicou (2.2) vidíme, že funkcia $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = ce^{2t}$ je jej riešením pre každé $c \in \mathbb{R}$. Grafy riešení pre rôzne hodnoty c sú na obr.1. Všimnime si, že grafy sa v žiadnom bode roviny nepretínajú.

Príklad 1.5

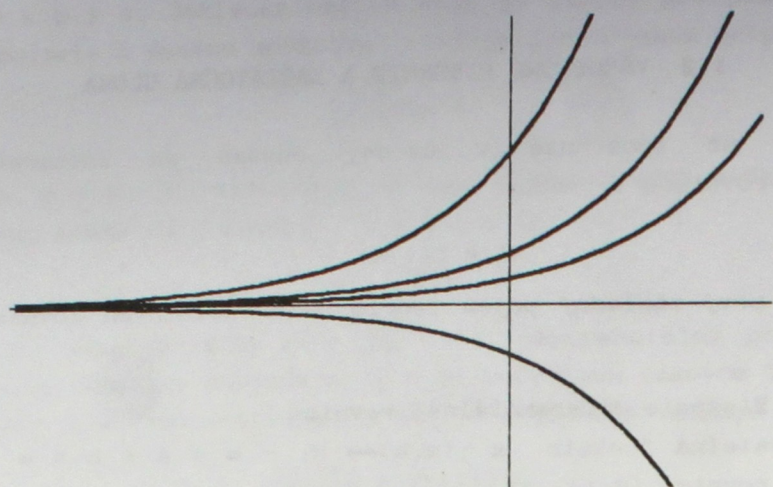
Nájdime všetky riešenia rovnice

$$x' = 2t \quad (2.3)$$

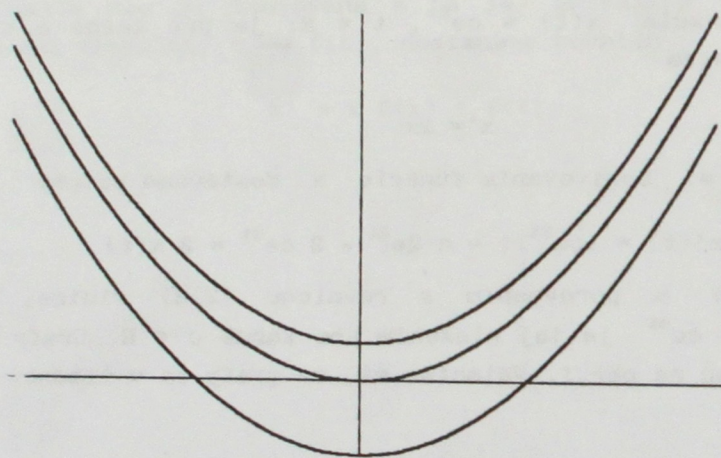
R i e š e n i e. Funkcia $F(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ je primitívnu funkciou k funkcii $f(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Každá funkcia tvaru

$$x(t) = t^2 + C, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

je potom riešením rovnice (2.3). Naopak, každá funkcia, ktorá je riešením rovnice (2.3) je primitívnu funkciou k funkcii $f(t) = 2t$ a má tvar (2.4). To znamená, že vzťahom (2.4) sú určené všetky riešenia obyčajnej diferenciálnej rovnice (2.3) (obr.2).



Obr. 1
Riešenia rovnice $x' = 2x$



Obr. 2
Riešenia rovnice $x' = 2t$

Z predchádzajúcich príkladov vidíme, že diferenciálna rovnica má vo všeobecnosti nekonečne veľa riešení. Preto má zmysel nasledujúca definícia.

Definícia 1.2 Všeobecné riešenie

Množina všetkých riešení diferenciálnej rovnice

$$x' = f(t, x)$$

sa nazýva *všeobecné riešenie*.

Všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice môže byť vo väčšine prípadov vyjadrené v tvare

$$x(t) = \varphi(t, C), \quad t \in I_C$$

kde C je reálny parameter a I_C je interval (vo všeobecnosti závislý od C).

Príklad 1.6

Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$x' = \cotg t \quad (2.5)$$

Riešenie. Funkcia

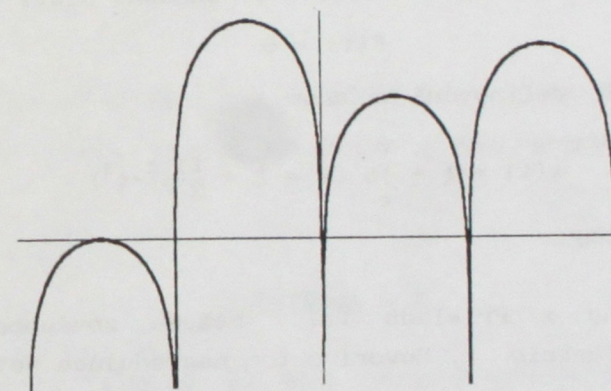
$$F(t) = \ln|\sin t|$$

je na každom intervale $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ primitívnu funkciou k funkcii $f(t) = \cotg t$. Všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = \ln|\sin t| + c, \quad t \in (n\pi, (n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ak položíme $c = \ln C$, $C > 0$; tak všeobecné riešenie môžeme vyjadriť aj v tvare (obr.3)

$$x(t) = \ln |C|\sin t|, \quad t \in (n\pi, (n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad C > 0$$



Obr. 3
Niektoré riešenia rovnice $x' = \cotg x$

Ako sme spomenuli už v úvode, diferenciálne rovnice vystupujúce v našom texte modelujú *deterministické procesy* vyznačujúce sa tým, že celý budúci, ako aj predchádzajúci dej je jednoznačne určený stavom v danom časovom okamihu. V našom prípade to znamená, že k obyčajnej diferenciálnej rovnici 1. rádu pridávame podmienku vyjadrujúcu predpísanú hodnotu riešenia v danom bode. Nasledujúca definícia formuluje úlohu o hľadaní riešenia spĺňajúceho uvedenú podmienku.

Definícia 1.3 Začiatočná úloha

Nech je daná spojitá funkcia $f : (a,b) \times (c,d) \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $(\tau, \xi) \in (a,b) \times (c,d)$. *Začiatočná úloha* je úloha nájsť riešenie $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciálnej rovnice

$$x' = f(t, x) \quad (2.6)$$

ktoré spĺňa *začiatočnú podmienku*

$$x(\tau) = \xi \quad (2.7)$$

Príklad 1.7

Riešme začiatočnú úlohu

$$x' = t$$

$$x(\tau) = \xi$$

Riešenie. Funkcia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$F(t) = \int_{\tau}^t s \, ds$$

je primitívnou funkciou k funkcii $f(t) = t$. Súčasne platí

$$F(\tau) = 0$$

Potom funkcia $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vzťahom

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t s \, ds = \xi + \frac{1}{2}(t^2 - \tau^2)$$

je riešením danej úlohy.

Začiatočnú úlohu z Príkladu 1.7 môžeme zovšeobecniť pre prípad ľubovoľnej spojitej funkcie f . Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 1.1

Nech $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, $\tau \in (a,b)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $x : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ daná vzťahom

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s) \, ds, \quad t \in (a,b) \quad (2.8)$$

je jediným riešením začiatočnej úlohy

$$x' = f(t) \quad (2.9)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (2.10)$$

Dôkaz. Funkcia $F : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{\tau}^t f(s) \, ds$; je primitívnou funkciou k funkcii f , pričom platí $F(\tau) = 0$. Podľa vety o derivácii integrálu s premennou hornou hranicou ([18]) je funkcia x definovaná vzťahom (2.8)

diferencovateľná a platí:

$$x'(t) = f(t) \quad \text{pre každé } t \in (a,b)$$

Teda funkcia x je riešením diferenciálnej rovnice (2.9). Priamo z tvaru (2.8) vyplýva splnenie začiatočnej podmienky (2.10). Tým sme dokázali, že funkcia x je riešením začiatočnej úlohy (2.8), (2.9). Ešte nám zostáva dokázať jednoznačnosť riešenia.

Nech $y : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ je riešenie začiatočnej úlohy (2.9), (2.10), teda platí

$$y'(t) = f(t) \quad \text{pre všetky } t \in (a,b) \quad (2.11)$$

a

$$y(\tau) = \xi. \quad (2.12)$$

Funkcia y je potom primitívnou funkciou k funkcii f . Pretože ľubovoľné primitívne funkcie k funkcii f na intervale (a,b) sa líšia o konštantu, dostávame vzťah

$$y(t) = \int_{\tau}^t f(s) \, ds + C, \quad t \in (a,b)$$

a na základe začiatočnej podmienky (2.12) dostávame

$$y(\tau) = 0 + C = C = \xi$$

Teda

$$y(t) = \int_{\tau}^t f(s) \, ds + \xi = x(t) \quad \text{pre všetky } t \in (a,b)$$

a začiatočná úloha (2.9), (2.10) má práve jedno riešenie vyjadrené vzťahom (2.8).

CVIČENIA 1.2

V úlohách 1 - 2 ukážte, že dané funkcie sú riešeniami diferenciálnych rovníc:

1. $x = t \sqrt{1 - t^2}$, $t \in (-1,1)$, $x x' = t - 2t^3$
2. $x = \frac{12}{\cos t}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x' - x \operatorname{tg} t = 0$

V úlohách 3 - 14 nájdite všeobecné riešenia daných obyčajných diferenciálnych rovníc:

3. $x' = t^{-1/2}$, $t > 0$
4. $x' = \frac{2}{t}$, $t > 0$
5. $x' = \frac{1}{t}$, $t < 0$
6. $x' = t e^t$, $t \in \mathbb{R}$
7. $x' = (8 - 6t - 9t^2)^{-1/2}$, $t \in (-4/3, 2/3)$
8. $x' = \sin^2 t$, $t \in \mathbb{R}$

$$9. x' = \operatorname{tg} t, t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$10. x' = \ln t, t > 0$$

$$11. x' = (9 - t^2)^{-1/2}, |t| < 3$$

$$12. x' = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}, |t| > 1$$

$$13. x' = \frac{1}{(t-1)t^2}, 0 < t < 1$$

$$14. x' = \frac{1}{\sin^3 t}, t \in (0, \pi)$$

V úlohách 15 - 23 nájdite riešenia daných začiatočných úloh a určte maximálne intervaly, na ktorých sú definované:

$$15. x' = t^{-1/2}, x(1) = 0$$

$$16. x' = \frac{1}{t+1}, x(0) = -1$$

$$17. x' = \frac{1}{t(t-1)}, x(\frac{1}{3}) = 0$$

$$18. x' = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}, x(0) = \pi$$

$$19. x' = \cos^2 t, x(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$20. x' = t \operatorname{tg}^2 t, x(0) = \pi$$

$$21. x' = \cos(\ln t), x(1) = 0$$

$$22. x' = \frac{1}{3 - \cos t}, x(0) = 5$$

$$23. x' = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{\sqrt{(1+t^2)^3}}, x(0) = \frac{1}{2}$$

V úlohách 24 - 27 riešte začiatočné úlohy:

$$x' = f(t), x(\tau) = \xi \text{ pre}$$

$$24. f(t) = \frac{1}{1-t^2}, |t| < 1$$

$$25. f(t) = t \sin t, t \in \mathbb{R}$$

$$26. f(t) = \frac{\ln(1-t+t^2)}{t^2}, t > 0$$

RIEŠENIA CVIČENÍ 1.2

$$3. x(t) = 2\sqrt{t} + C$$

$$4. x(t) = \ln Ct^2, C > 0$$

$$5. x(t) = \ln Ct, C < 0$$

$$6. x(t) = (t-1)e^t + C$$

$$7. x(t) = \frac{1}{3} \operatorname{arcsin} \frac{3t+1}{3} + C$$

$$8. x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C$$

$$9. x(t) = \ln \frac{C}{\cos t}, C > 0$$

$$10. x(t) = t(\ln t - 1) + C$$

$$11. x(t) = \operatorname{arcsin} \frac{t}{3} + C$$

$$12. x(t) = \sqrt{t^2 - 1} + C$$

$$13. x(t) = \frac{1}{t} + \ln C \frac{1-t}{t}, C > 0$$

$$14. x(t) = -\frac{\cos t}{2 \sin^2 t} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right| + C$$

$$15. x(t) = 2\sqrt{t} - 2, (0, \infty)$$

$$16. x(t) = \ln(t+1) - 1, (0, \infty)$$

$$17. x(t) = \ln \frac{1-t}{2t}, (0, 1)$$

$$18. x(t) = \pi + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} 2t, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$19. x(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\pi}{4}, (-\infty, \infty)$$

$$20. x(t) = t \operatorname{tg} t + \ln \cos t - \frac{t^2}{2} + \pi, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$21. x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} [\sin(\ln t) + \cos(\ln t)], (0, \infty)$$

$$22. x(t) = 5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2}), (-\pi, \pi)$$

$$23. x(t) = \frac{(1+t)e^{\operatorname{arctg} t}}{2\sqrt{1+t^2}}, (-\infty, \infty)$$

$$24. \xi + \ln \left[\frac{(1+t)(1-\tau)}{(1-t)(1+\tau)} \right]^{1/2}$$

$$25. \xi + \sin t - t \cos t - \sin \tau + \tau \cos \tau$$

$$26. \xi + \frac{1}{\tau} \ln(1-\tau+t^2) - \frac{1}{t} \ln(1-t-t^2) - \ln \left| \frac{t}{\tau} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t+t^2}{1-\tau+\tau^2} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\tau-1}{\sqrt{3}}$$

1.3 ROVNICE SO SEPAROVANÝMI PREMENNÝMI

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali začiatočnou úlohou

$$x' = f(t), \quad x(\tau) = \xi$$

ktorej riešenie malo tvar

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s) ds, \quad t \in (a, b)$$

Ako sme videli už v časti 1.1 v prípade rovníc populačnej dynamiky, mnohé matematické modely sú vyjadrené začiatočnou úlohou

$$x' = g(x), \quad x \in (c, d) \quad (3.1)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (3.2)$$

Ak $g(\xi) = 0$, tak funkcia

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) = \xi \quad (3.3)$$

je konštantným - *stacionárnym* riešením začiatočnej úlohy (3.1), (3.2).

Nech $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, pričom

$$g(x) \neq 0 \quad \text{pre všetky } x \in (c, d) \quad (3.4)$$

Vyjadrime rovnicu (3.1) v tvare

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad x \in (c, d) \quad (3.5)$$

Formálnym postupom dostaneme z rovnice (3.5) rovnicu

$$\frac{1}{g(x)} dx = dt \quad (3.6)$$

Ľavú stranu poslednej rovnosti integrujeme v hraniciach od ξ do x a pravú stranu v hraniciach od τ do t . Dostaneme vzťah

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy = \int_{\tau}^t ds \quad (3.7)$$

alebo

$$G_0(x) = t - \tau \quad (3.8)$$

kde

$$G_0(x) = \int_{\xi}^x \frac{1}{g(y)} dy, \quad x \in (c, d). \quad (3.9)$$

Funkcia G_0 má inverznú funkciu $G_0^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (c, d)$, pričom $\alpha < 0 < \beta$. Vyplýva

to z vlastností $G_0(\xi) = 0$, $G_0'(x) = \frac{1}{g(x)}$. Funkcia $\frac{1}{g}: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, a teda nemení znamienko na celom intervale (c, d) . Pretože je deriváciou funkcie G_0 , je funkcia $G_0: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ rastúca, alebo klesajúca, pričom jej obor hodnôt je interval (α, β) . Použitím inverznej funkcie na rovnosť (3.8) dostaneme riešenie začiatočnej úlohy (3.1), (3.2) v tvare

$$x(t) = G_0^{-1}(t - \tau), \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (3.10)$$

kde $\alpha = a + \tau$, $\beta = b + \tau$.

Príklad 1.8

Riešte začiatočnú úlohu

$$x' = \frac{1}{x} \quad (3.11)$$

$$x(\tau) = \xi, \quad \xi > 0 \quad (3.12)$$

Riešenie. Rovnicu (3.11), zapíšeme v tvare

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

a ďalej

$$x dx = dt$$

S využitím začiatočnej podmienky (3.12) dostaneme rovnosť

$$\int_{\xi}^x y dy = \int_{\tau}^t ds$$

a po integrovaní

$$\frac{1}{2}(x^2 - \xi^2) = t - \tau$$

Použitím inverznej funkcie dostaneme riešenie úlohy (3.11), (3.12) v tvare

$$x(t) = (2t - 2\tau + \xi^2)^{1/2}, \quad t > \tau - \frac{1}{2} \xi^2$$

Príklad 1.9

Riešte začiatočnú úlohu populačnej dynamiky

$$x' = kx \quad (3.13)$$

$$x(\tau) = \xi, \quad \xi > 0 \quad (3.14)$$

Riešenie. Ak $k \neq 0$, zapíšeme rovnicu (3.13) v tvare

$$\frac{1}{kx} dx = dt$$

a využitím začiatočných podmienok dostaneme

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{ky} dy = t - \tau$$

Po vykonaní integrovania máme vzťahy

$$\ln x - \ln \xi = \ln \frac{x}{\xi} = k(t - \tau), \quad x > 0, \quad \xi > 0$$

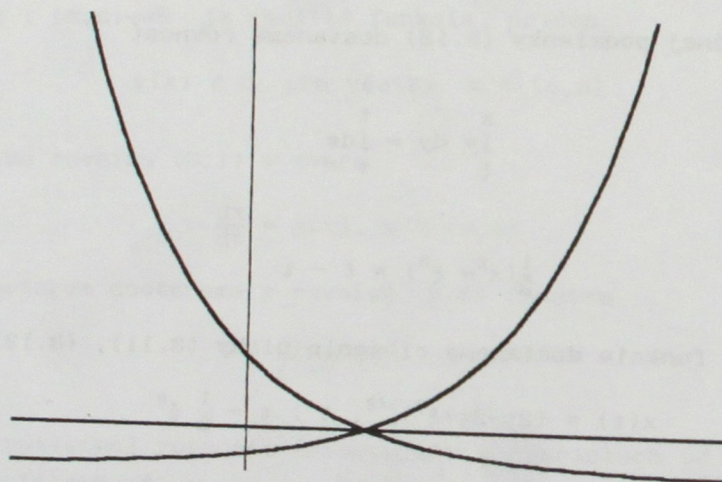
Použitím funkcie $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je inverznou k funkcii $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dostaneme rovnosť

$$\frac{x}{\xi} = \exp k(t - \tau)$$

a riešenie začiatkovej úlohy (3.13), (3.14) má potom tvar

$$x(t) = \xi \exp k(t - \tau), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Tvar riešenia závisí od znamienka koeficientu k . Ak $k > 0$, nazývame ho *index rastu* a riešenie - množstvo populácie exponenciálne rastie. Ak $k = 0$, riešenie je konštanta ξ . Riešenie exponenciálne klesá, ak $k < 0$, koeficient k potom nazývame *indexom poklesu* (obr. 4).



Obr. 4

Exponenciálny rast a pokles populácie

Uvedený model populácie použil anglický ekonóm Malthus na začiatku 19. storočia k pesimistickým predpovediam o raste ľudskej populácie. V súvislosti s rastom populácie ($k > 0$) je dôležitý čas T , za ktorý sa množstvo populácie zdvojnásobí. Podľa (3.15) platí vzťah

$$x(\tau + T) = \xi \exp kT = 2x(\tau) = 2\xi$$

a nakoniec

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

To znamená, že čas, za ktorý sa množstvo populácie zdvojnásobí nezávisí od začiatkovej podmienky. Malthus predpovedal hodnotu $T = 25$, čomu zodpovedá index rastu $k = \frac{\ln 2}{25} = 0.028$.

Príklad 1.10

Niektoré druhy baktérií sa rozmnožujú podľa modelu určeného začiatkovou úlohou

$$x' = kx^2 \quad (3.16)$$

$$x(\tau) = \xi, \quad \xi > 0 \quad (3.17)$$

Nájďme časovú funkciu rozmnožovania baktérií.

Riešenie. Rovnicu (3.23) zapíšeme v tvare

$$\frac{1}{kx^2} dx = dt$$

S využitím začiatkovej podmienky (3.24) dostaneme

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{ky^2} dy = t - \tau$$

a teda

$$\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x} \right) = t - \tau$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\xi} - k(t - \tau)$$

Riešenie začiatkovej úlohy (3.16), (3.17) má potom tvar

$$x(t) = \frac{\xi}{1 - k\xi(t - \tau)}, \quad t < \tau + \frac{1}{k\xi} \quad (3.18)$$

Vidíme, že model je realistický len pre hodnoty časovej premennej t nie príliš prevyšujúce hodnotu τ , pretože

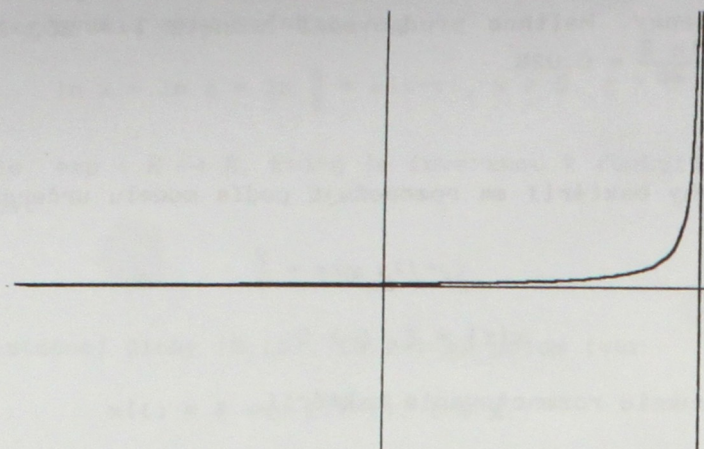
$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = \infty$$

kde $b = \tau + \frac{1}{k\xi}$ (obr. 5).

Realistickejší model rastu populácie dostaneme, ak namiesto konštanty k v rovnici (3.17) uvažujeme funkciu v tvare

$$k(x) = (b_1 - b_2 x) - (b_3 + b_4 x), \quad b_2 > 0, \quad b_4 > 0$$

ktorá vyjadruje fakt, že relatívna miera narodení je klesajúcou funkciou a



Obr. 5.

Graf funkcie rozmnožovania baktérií

relatívna miera úmrtí je rastúcou funkciou množstva populácie. Ak položíme

$$\alpha = b_2 + b_4, \quad A = \frac{b_1 - b_3}{b_2 + b_4}$$

máme

$$k(x) = \alpha(A-x)$$

a začiatková úloha pre uvedený model populačnej dynamiky je

$$x' = \alpha(A-x)x \quad (3.19)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (3.20)$$

Diferenciálna rovnica (3.19) sa nazýva *logistická rovnica*. Odvodil ju v polovici 19. storočia belgický matematik a demograf Verhulst, ktorý ju použil na predpovede počtu obyvateľstva v rôznych krajinách.

Príklad 1.11

Riešme začiatkovú úlohu (3.19), (3.20) za predpokladov

a) $0 < \xi < A$, b) $\xi = A$, c) $\xi > A > 0$.

Riešenie. a) Úlohu riešime pre $x \in (0, A)$. Po úprave rovnice (3.19) dostaneme vzťah

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{\alpha(A-y)y} dy = t - \tau$$

a po integrovaní s využitím rozkladu

$$\frac{1}{(A-y)y} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{A-y} + \frac{1}{y} \right)$$

dostaneme vzťahy

$$\ln \frac{x}{A-x} - \ln \frac{\xi}{A-\xi} = \ln \frac{x(A-\xi)}{(A-x)\xi} = \alpha A (t-\tau) \quad (3.21)$$

Použijúc inverznú funkciu k logaritmickému vzťahu, dostaneme rovnosť

$$\frac{x}{A-x} = \frac{\xi}{A-\xi} e^{\alpha A (t-\tau)}$$

Riešenie úlohy (3.19), (3.20) má potom tvar

$$x(t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{A}{\xi} - 1 \right) e^{\alpha A (t-\tau)}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

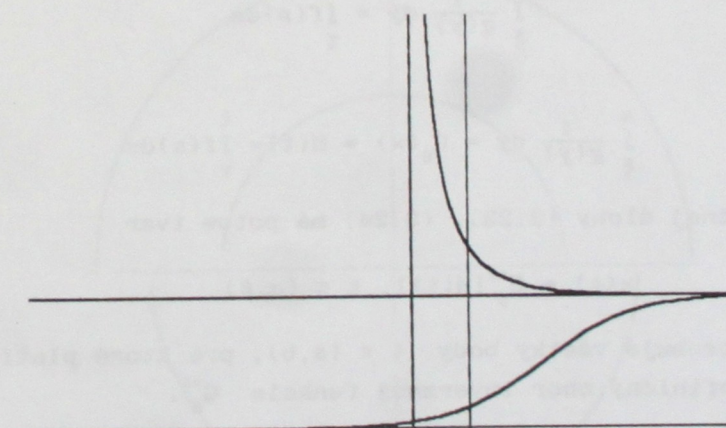
b) Ak $\xi = A$, tak dostaneme stacionárne riešenie

$$x(t) = A, \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Ak $\xi > A$, tak postupujeme rovnakým spôsobom ako v časti a). Po integrovaní dostaneme vzťah

$$\ln \frac{x(\xi-A)}{(x-A)\xi} = \alpha A (t-\tau), \quad x > A > 0$$

ktorý je totožný so vzťahom (3.21) odvodeným vyššie. Funkcia definovaná formulou (3.22) je potom riešením začiatkovej úlohy (3.19), (3.20) aj v prípade $\xi > A, x > A$.



Obr. 6

Graf rozmnožovania populácie podľa logistickej rovnice