

2.2 LINEÁRNE HOMOGÉNNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE n -TÉHO RÁDU

Budeme sa zaoberať diferenciálnymi rovnicami n -tého rádu

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (2.1)$$

Predpokladáme, že koeficienty $t \rightarrow a_k(t)$ sú spojité funkcie na intervale (a,b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Rovnica (2.1) sa nazýva *lineárna homogénna diferenciálna rovnica - LHDR*.

V prípade $n = 1$ máme LHDR 1. rádu, ktorá je totožná s rovnicou z časti 1.4

$$x' = p(t)x$$

kde $p(t) = -a_1(t)$, $t \in (a,b)$.

Podľa vety 1.3 môžeme každé riešenie uvedenej rovnice 1. rádu vyjadriť v tvare

$$x(t) = \xi u(t, \tau), \quad t, \tau \in (a,b)$$

kde $\xi = x(\tau)$ a $u(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t p(s) ds$ je prechodová funkcia spĺňajúca podmienku $u(\tau, \tau) = 1$. To znamená, že množina všetkých riešení LHDR 1. rádu tvorí jednorozmerný lineárny priestor s bázou $\{u(t, \tau)\}$.

Podobnú štruktúru množiny všetkých riešení - *všeobecného riešenia* odvodíme aj pre LHDR n -tého rádu. Rovnicu (2.1) možno vyjadriť v tvare lineárnej operátorovej rovnice

$$Lx = 0, \quad x \in X \quad (2.2)$$

kde $X = C^n(a,b)$ je lineárny priestor všetkých n -krát spojitostne diferencovateľných funkcií definovaných na intervale (a,b) , $L: X \rightarrow Y$ je lineárny operátor z priestoru X do priestoru Y všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale (a,b) definovaný ľavou stranou diferenciálnej rovnice (2.1).

Nasledujúca veta vyjadruje všeobecné riešenie LHDR n -tého rádu ako n -rozmerný lineárny priestor.

Veta 2.2

Množina X_0 všetkých riešení lineárnej homogénnej diferenciálnej rovnice (2.1) je n -rozmerným lineárnym podpriestorom lineárneho priestoru $X = C^n(a,b)$.

Dôkaz. Množina X_0 je totožná s množinou tých funkcií - prvkov $x \in X$, pre ktoré platí rovnosť

$$Lx = 0$$

Teda X_0 je jadro lineárneho operátora L a podľa známej vety z lineárnej algebry ([7]) je X_0 lineárny podpriestor priestoru X . Ukážeme, že tento priestor je n -rozmerný.

Nájdeme jeho bázu $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

V jednorozmernom prípade bola báza tvorená prechodovou funkciou $u(t, \tau)$. Nech $\tau \in (a,b)$ je ľubovoľné číslo. Definujme funkcie $u_i \in X_0$, t.j. riešenia LHDR (2.1) spĺňajúce začiatočné podmienky:

$$u_i^{(j-1)}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{ak } i \neq j \\ 1, & \text{ak } i = j \end{cases} \quad (2.3)$$

kde $i, j = 1, \dots, n$

pričom označujeme $x^{(0)}(\tau) = x(\tau)$, $x^{(1)}(\tau) = x'(\tau)$, ...

Funkcie u_1, \dots, u_n sú jednoznačne určené podľa vety 2.1 o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu n -tého rádu. Ukážeme, že uvedené funkcie tvoria bázu priestoru X_0 .

Funkcie u_1, \dots, u_n sú lineárne nezávislé na základe začiatočných podmienok (2.3). Skutočne, nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú reálne čísla, pre ktoré platí:

$$\alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_n u_n(t) = 0 \quad \text{pre všetky } t \in (a,b) \quad (2.4)$$

Z identity (2.4) dostaneme na základe začiatočných podmienok (2.3) rovnosť

$$[\alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_n u_n(t)]_{t=\tau}^{(i-1)} = \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

a teda funkcie u_1, \dots, u_n sú lineárne nezávislé.

Ešte ukážeme, že každá funkcia $x \in X_0$ - riešenie LHDR (2.1) je lineárnou kombináciou funkcií u_1, \dots, u_n .

Nech $x: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľné riešenie rovnice (2.1). Označme

$$c_i = x^{(i-1)}(\tau), \quad i = 1, \dots, n$$

Funkcia

$$y(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t), \quad t \in (a,b)$$

je lineárnou kombináciou funkcií u_1, \dots, u_n , a teda riešením rovnice (2.1) spĺňajúcim podľa (2.3) začiatočné podmienky

$$y^{(i-1)}(\tau) = c_i = x^{(i-1)}(\tau), \quad i = 1, \dots, n$$

Na základe jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy (2.1), (2.3) máme identitu

$$x(t) = y(t), \quad t \in (a,b)$$

a teda

$$x(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t), \quad t \in (a,b)$$

čím sme dokázali, že systém funkcií

$$\mathfrak{B} = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$$

Je bázou priestoru X_0 všetkých riešení LHDR (2.1) a teda priestor X_0 je n -rozmerný, čo sme chceli dokázať.

Príklad 2.3

Nájdime všeobecné riešenie lineárnej homogénnej diferenciálnej rovnice druhého rádu

$$x'' - \frac{1}{\sin t} x' = 0, \quad t \in (0, \pi) \quad (2.5)$$

Riešenie. Všeobecné riešenie má podľa predchádzajúcej vety tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad t \in (0, \pi)$$

kde x_1, x_2 sú ľubovoľné dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (2.5). Bázové funkcie x_1, x_2 nájdeme podľa dôkazu predchádzajúcej vety ako riešenia rovnice (2.5) spĺňajúce začiatočné podmienky

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad x_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.6)$$

resp.

$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (2.7)$$

Rovnicu (2.5) budeme riešiť substitúciou

$$x' = y \quad (2.8)$$

Dostaneme lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$y' - \frac{1}{\sin t} y = 0 \quad (2.9)$$

Každé riešenie rovnice (2.9) má tvar

$$y(t) = \xi \exp \int_{\pi/2}^t \frac{1}{\sin s} ds, \quad t \in (0, \pi)$$

Platí vzťah

$$\int_{\pi/2}^t \frac{1}{\sin s} ds = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad t \in (0, \pi)$$

a teda

$$y(t) = \xi \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

S prihliadnutím na začiatočné podmienky (2.6) dostaneme nasledujúce bázové funkcie:

$$x_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = \int_{\pi/2}^t \operatorname{tg} \frac{s}{2} ds = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \cos \frac{t}{2} = -\ln (\sqrt{2} \cos \frac{t}{2})$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.5) má potom tvar

$$x(t) = c_1 - c_2 \ln (\sqrt{2} \cos \frac{t}{2})$$

Z vety 2.2 vyplýva, že všeobecné riešenie LHDR n -tého rádu má tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad t \in (a, b)$$

kde

$$\mathfrak{B} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

Je ľubovoľná báza množiny (priestoru) X_0 všetkých riešení LHDR (2.1). Na rozdiel od lineárnej homogénnej rovnice 1. rádu n -ticu lineárne nezávislých riešení $x_1(t), \dots, x_n(t)$ možno analyticky vyjadriť len pri špeciálnom výbere koeficientov $a_1(t), \dots, a_n(t)$ ako tomu bolo napríklad v predchádzajúcom príklade, kde platilo $a_2(t) = 0$.

V celom ďalšom texte tejto časti sa zameriame na LHDR s konštantnými koeficientmi

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (2.10)$$

V prípade $n = 1$ dostaneme rovnicu

$$x' = -a_1 x$$

ktorej všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c e^{-a_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Hľadáme aj riešenie rovnice (2.10) v exponenciálnom tvare

$$x(t) = e^{rt}, \quad r \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Dosadením do rovnice (2.10) dostaneme identitu

$$(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) e^{rt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pretože $e^{rt} \neq 0$ pre ľubovoľné r, t dostaneme algebrickú rovnicu

$$p_n(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (2.12)$$

na určenie neznámeho exponenta r . Polynóm $p_n(r)$ sa nazýva *charakteristický polynóm* a rovnica (2.12) *charakteristická rovnica*, korene charakteristického polynómu - riešenia charakteristickej rovnice budeme nazývať *charakteristickými koreňmi*. Ako je známe z algebry, charakteristická rovnica (2.12) má práve n koreňov, ak každý koreň rátame toľkokrát koľko je jeho násobnosť. Korene môžu byť reálne alebo komplexné.

Predpokladajme, že charakteristická rovnica má n reálnych rôznych koreňov. Potom dostaneme n rôznych riešení LHDR (2.10), ktoré majú exponen-

ciálny tvar. Podľa nasledujúcej vety sú tieto riešenia lineárne nezávislé, a teda tvoria bázu priestoru X_0 všetkých riešení rovnice (2.10).

Veta 2.3

Ak charakteristická rovnica (2.12) má n rôznych reálnych koreňov r_1, \dots, r_n , tak množina funkcií

$$\mathfrak{B} = \{e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}\} \quad (2.14)$$

je bázou priestoru X_0 všetkých riešení HLDR (2.10) a jej všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n e^{r_n t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

kde c_1, \dots, c_n sú ľubovoľné reálne čísla.

D ō k a z. Uvažujme najprv prípad $n = 2$. Nech r_1, r_2 sú ľubovoľné rôzne reálne čísla a platí rovnosť

$$\alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t} = 0 \quad (2.16)$$

Derivovaním poslednej rovnosti dostaneme

$$\alpha_1 r_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{r_2 t} = 0 \quad (2.17)$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t}$$

systému rovníc (2.16), (2.17) je nenulový pre ľubovoľnú vzájomne rôznu dvojicu r_1, r_2 a ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$. Potom má systém (2.16), (2.17) jedine nulové riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Systém funkcií $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ je lineárne nezávislý, a teda uvedené funkcie sú bázou priestoru X_0 . Všeobecné riešenie má v prípade rovnice 2. rádu s dvoma reálnymi rôznymi koreňmi r_1, r_2 tvar

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}; \quad c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$$

Podobne postupujeme v dôkaze aj v prípade $n > 2$. Z identity

$$\alpha_1 e^{r_1 t} + \dots + \alpha_n e^{r_n t} = 0$$

dostaneme postupným derivovaním až do rádu $n-1$ systém lineárnych algebrických rovníc

$$\alpha_1 r_1^{j-1} e^{r_1 t} + \dots + \alpha_n r_n^{j-1} e^{r_n t} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Determinant systému má tvar

$$D(t) = e^{(r_1 + \dots + r_n)t} V(t)$$

kde

$$V(t) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (r_i - r_j)$$

je *Vandermondov determinant* ([9]), ktorý je nenulový, pretože všetky charakteristické korene r_1, \dots, r_n sú navzájom rôzne. Potom aj determinant $D(t) \neq 0$, a teda rovnako ako v prípade $n = 2$ je systém funkcií

$$\{e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}\}$$

lineárne nezávislý a tvrdenie vety je dokázané.

Príklad 2.4

Nájdime všeobecné riešenie rovnice

$$x'' + 5x' + 6x = 0 \quad (2.18)$$

a riešenie rovnice (2.18) spĺňajúce začiatkové podmienky

$$x(0) = -1, \quad x'(0) = 0 \quad (2.19)$$

R i e š e n i e. Postupujeme podľa vety 2.2. Charakteristická rovnica patriaca k rovnici (2.18) je

$$p_2(r) = r^2 + 5r + 6 = 0$$

a má dva reálne rôzne korene $r_1 = -2, r_2 = -3$. Všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Riešenie začiatkovej úlohy (2.18), (2.19) dostaneme po výpočte konštánt c_1, c_2 zo systému rovníc

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = -1 \\ x'(0) &= -2c_1 - 3c_2 = 0 \end{aligned}$$

Máme $c_1 = -3, c_2 = 2$. Riešenie úlohy (2.18), (2.19) má potom tvar

$$x_0(t) = -3 e^{-2t} + 2 e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Predchádzajúca veta hovorila o báze a všeobecnom riešení LHDR (2.10) v prípade n reálnych rôznych koreňov príslušnej charakteristickej rovnice. Ďalej sa budeme zaoberať postupom riešenia v prípade viacnásobných charakteristických koreňov.

Uvažujme najskôr rovnicu 2. rádu

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \quad (2.20)$$

Predpokladajme, že r_1 je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice. To znamená, že platia rovnosti

$$\begin{aligned} r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 &= 0 \\ 2r_1 + a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vieme, že funkcia

$$x_1(t) = e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

je riešením diferenciálnej rovnice (2.20). Hľadáme ešte jedno riešenie lineárne nezávislé vzhľadom na funkciu x_1 . Použijeme metódu variácie konštanty. Vyjadrieme predpokladané riešenie v tvare

$$x_2(t) = \xi(t) e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

kde $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je niektorá dvakrát diferencovateľná funkcia. Po dosadení funkcie x_2 do rovnice (2.20) dostaneme identitu

$$[\xi''(t) + 2r_1 \xi'(t) + r_1^2 \xi(t) + a_1(r_1 \xi(t) + \xi'(t)) + a_2 \xi(t)] e^{r_1 t} = 0$$

a po úprave

$$\xi''(t) + (2r_1 + a_1) \xi'(t) + (r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) \xi(t) = 0$$

Z poslednej identity dostaneme na základe vzťahov (2.21) obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\xi'' = 0$$

ktorej riešenie je napr. funkcia

$$\xi(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dosadením tejto funkcie do výrazu (2.22) dostaneme ďalšie riešenie rovnice (2.20) v tvare

$$x_2(t) = t e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lahko možno ukázať, že funkcie x_1, x_2 sú lineárne nezávislé, a teda tvoria bázu

$$\mathfrak{B} = \{e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}\}$$

priestoru X_0 všetkých riešení rovnice (2.20). Všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Posledný výsledok môže byť zovšeobecnený. Uvedieme bez dôkazu nasledujúcu vetu o báze priestoru X_0 v prípade viacnásobných charakteristických koreňov.

Veta 2.4

Ak charakteristická rovnica (2.12) má reálne charakteristické korene r_j násobnosti m_j , $j = 1, \dots, k$; $m_1 + \dots + m_k = n$, tak báza priestoru všetkých riešení LHDR (2.10) má tvar

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{matrix} e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{r_1 t} \\ e^{r_2 t}, t e^{r_2 t}, \dots, t^{m_2-1} e^{r_2 t} \\ \dots \\ e^{r_k t}, t e^{r_k t}, \dots, t^{m_k-1} e^{r_k t} \end{matrix} \right\} \quad (2.23)$$

a všeobecné riešenie je množina funkcií určená formulou

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} + \dots + c_{m_1} t^{m_1-1} e^{r_1 t} + \dots + c_n t^{m_k-1} e^{r_k t} \\ t, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Príklad 2.5

Určte všeobecné riešenie rovnice

$$x^{(4)} - 2x'' + x = 0 \quad (2.24)$$

Riešenie. Charakteristická rovnica má tvar

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

alebo

$$(r^2 - 1)^2 = (r - 1)^2 (r + 1)^2 = 0$$

Teda máme dva dvojnásobné korene charakteristickej rovnice

$$r_1 = -1, r_2 = 1$$

Báza priestoru všetkých riešení rovnice (2.24) je

$$\mathfrak{B} = \{e^{-t}, t e^{-t}, e^t, t e^t\}$$

a všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t + c_4 t e^t$$

Doteraz sme riešili LHDR s konštantnými koeficientami za predpokladu reálnych charakteristických koreňov. Aby sme mohli predchádzajúci postup rozšíriť aj na prípad komplexných charakteristických koreňov, rozšírime exponenciálnu funkciu na množinu \mathbb{C} všetkých komplexných čísel.

Definujeme funkciu $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ predpisom

$$\exp(x + iy) = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Nech $r = \alpha + i\omega$, ($\omega \neq 0$) je komplexné číslo. Pomocou predchádzajúcej

komplexnej exponenciálnej funkcie zavedieme komplexnú funkciu φ reálnej premennej t predpisom

$$\varphi(t) = e^{rt} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Uvedená funkcia môže byť vyjadrená v tvare

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i \varphi_2(t), \quad (2.26)$$

kde

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t, \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Vo všeobecnosti možno každú komplexnú funkciu $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ reálnej premennej vyjadriť v tvare (2.26), kde reálne funkcie φ_1, φ_2 sa nazývajú *reálna*, resp. *imaginárna časť* funkcie φ . Ak funkcie φ_1, φ_2 sú diferencovateľné, definujeme deriváciu funkcie φ predpisom

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i \varphi_2'(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Potom aj komplexná exponenciálna funkcia (2.25) je diferencovateľná a pre jej deriváciu platia vzťahy

$$\begin{aligned} (e^{rt})' &= (e^{\alpha t} \cos \omega t)' + i (e^{\alpha t} \sin \omega t)' = \\ &= e^{\alpha t} [\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t + i (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)] = \\ &= (\alpha + i\omega) e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = r e^{rt} \end{aligned}$$

Teda pravidlo o derivovaní exponenciálnej funkcie môžeme rozšíriť aj na exponenciálne funkcie s komplexným exponentom, čo nám umožňuje získať aj v prípade komplexne združených charakteristických koreňov bázu a všeobecné riešenie LHDR n -tého rádu s konštantnými koeficientmi.

Vzhľadom na definíciu derivácie komplexnej funkcie reálnej premennej, ktorá je zovšeobecnením derivácie reálnej funkcie reálnej premennej, môžeme zaviesť aj komplexné riešenia diferenciálnych rovníc. Označme X_0^* komplexný lineárny priestor všetkých komplexných riešení LHDR (2.10) s konštantnými koeficientmi. Vety 2.2 a 2.3 môžu byť bez zmeny prenesené aj na prípad komplexných riešení. Ak

$$\mathfrak{B}^* = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$$

je (komplexná) báza priestoru X_0^* , všeobecné (komplexné) riešenie má tvar

$$x^*(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

kde c_1, \dots, c_n sú ľubovoľné komplexné čísla.

Príklad 2.6

Nájdime komplexné všeobecné riešenie rovnice

$$x'' + 2x' + 5x = 0$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

má komplexne združené korene

$$r_1 = -1 + 2i, \quad r_2 = -1 - 2i$$

Komplexná báza je

$$\mathfrak{B}^* = \{e^{(-1+2i)t}, e^{(-1-2i)t}\}$$

a všeobecné riešenie má tvar

$$\begin{aligned} x^*(t) &= c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t} = \\ &= e^{-t} (c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Ak charakteristická rovnica má aj reálne aj komplexné korene, tak komplexná báza obsahuje aj reálne aj komplexné funkcie.

Príklad 2.7.

Nájdime komplexné všeobecné riešenie rovnice

$$x^{(4)} - 1 = 0.$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

má korene

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = i, \quad r_4 = -i$$

Komplexná báza potom pozostáva z funkcií

$$\mathfrak{B}^* = \{e^{-t}, e^t, e^{it}, e^{-it}\}$$

Komplexné všeobecné riešenie má tvar

$$x^*(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it}, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}$$

Pomocou komplexnej bázy \mathfrak{B}^* množiny X_0^* všetkých komplexných riešení LHDR (2.10) získame aj bázu \mathfrak{B} množiny X_0 všetkých reálnych riešení tej istej rovnice. Využijeme pritom, že každý prvok bázy môžeme nahradiť jeho lineárnou kombináciou s inými bazovými prvkami. Vieme, že každej dvojici $\alpha \pm i\omega$ komplexne združených charakteristických koreňov odpovedá dvojica komplexne združených bazových funkcií

$$y_1(t) = e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$y_2(t) = e^{\alpha t} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

Ich lineárne kombinácie

$$x_1(t) = \frac{1}{2} y_1(t) + \frac{1}{2} y_2(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t = \operatorname{Re} y_1(t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2i} y_1(t) - \frac{1}{2i} y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t = \operatorname{Im} y_1(t)$$

sú reálne funkcie, ktoré môžu nahradiť komplexné bazové funkcie y_1, y_2 v báze \mathfrak{B} . Týmto spôsobom dostaneme reálnu bázu \mathfrak{B} množiny X_0 všetkých komplexných riešení, ktorá je aj bazou množiny X_0 všetkých reálnych riešení rovnice (2.10).

Príklad 2.8

Nájdime (reálne) všeobecné riešenie rovnice

$$x^{(4)} - 1 = 0 \quad (2.27)$$

Riešenie. V príklade 5.5 sme našli komplexnú bázu

$$\mathfrak{B} = \{e^{-t}, e^t, e^{it}, e^{-it}\}$$

množiny všetkých komplexných riešení rovnice (2.27). Reálna báza má potom tvar

$$\mathfrak{B} = \{e^{-t}, e^t, \cos t, \sin t\}$$

pričom sme využili vzťahy

$$\cos t = \operatorname{Re} e^{it}, \sin t = \operatorname{Im} e^{it}$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.27) má potom tvar

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 \cos t + c_4 \sin t; c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$$

Príklad 2.9

Riešme začiatočnú úlohu:

$$x'' + 2x' + 5x = 0 \quad (2.28)$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 0 \quad (2.29)$$

Riešenie. Najprv nájdeme všeobecné riešenie LHDR (2.28). V príklade 2.6 sme našli bázu množiny jej komplexných riešení

$$\mathfrak{B} = \{e^{(-1+2i)t}, e^{(-1-2i)t}\}$$

Na základe vzťahu

$$e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t)$$

dostaneme bázu reálnych riešení

$$\mathfrak{B} = \{e^{-t} \cos 2t, e^{-t} \sin 2t\}$$

a všeobecné riešenie

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$$

Dosadením začiatočných podmienok (2.29) do všeobecného riešenia máme systém lineárnych algebrických rovníc

$$c_1 = 1, -c_1 + 2c_2 = 0$$

a teda $c_2 = \frac{1}{2}$. Riešením začiatočnej úlohy (2.28), (2.29) je potom funkcia

$$x(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$$

Zopakujme si postup riešenia LHDR n-tého rádu s konštantnými koeficientmi

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (2.30)$$

1. Utvoríme charakteristickú rovnicu

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

2. Nájdeme jej korene

$$r_1, \dots, r_k, k \leq n$$

3. Podľa typu koreňov nájdeme n lineárne nezávislých riešení rovnice (2.30):

a) Každému reálnemu koreňu r násobnosti m ($m = 1$ v prípade jednoduchého koreňa) zodpovedá m riešení tvaru

$$e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{m-1} e^{rt}.$$

b) Každé dvojici komplexne združených koreňov

$$r^{(1)} = \alpha + i\omega, r^{(2)} = \alpha - i\omega$$

násobnosti j zodpovedá $2j$ riešení tvaru

$$e^{\alpha t} \cos \omega t, te^{\alpha t} \cos \omega t, \dots, t^{j-1} e^{\alpha t} \cos \omega t,$$

$$e^{\alpha t} \sin \omega t, te^{\alpha t} \sin \omega t, \dots, t^{j-1} e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Takto nájdene riešenia tvoria bázu lineárneho priestoru X_0 všetkých riešení LHDR (2.30).

4. Po nájdení n lineárne nezávislých riešení x_1, \dots, x_n vyjadríme všeobecné riešenie rovnice (2.30) v tvare

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad (2.31)$$

kde c_1, \dots, c_n sú ľubovoľné reálne čísla.

5) Ak hľadáme riešenie spĺňajúce začiatočné podmienky

$$x(\tau) = \xi_1, x'(\tau) = \xi_2, \dots, x^{(n-1)}(\tau) = \xi_n \quad (2.32)$$

potom dosadením do rovnosti (2.31) ako aj do rovností

$$x^{(k-1)}(t) = c_1 x_1^{(k-1)}(t) + \dots + c_n x_n^{(k-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n$$

dostaneme systém lineárnych algebraických rovníc

$$\begin{aligned} c_1 x_1(\tau) + \dots + c_n x_n(\tau) &= \xi_1 \\ c_1 x_1'(\tau) + \dots + c_n x_n'(\tau) &= \xi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(\tau) + \dots + c_n x_n^{(n-1)}(\tau) &= \xi_n \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tento systém má práve jedno riešenie, pretože jeho determinant je nenulový na základe lineárnej nezávislosti funkcií x_1, \dots, x_n . Funkcia tvaru (2.31) s koeficientmi c_1, \dots, c_n spĺňajúcimi systém (2.33) je potom jediným riešením začiatkovej úlohy (2.30), (2.32).

CVIČENIA 2.2

V príkladoch 1 - 24 nájdite všeobecné riešenia daných diferenciálnych rovníc.

1. $x'' - 9x = 0$
2. $x'' + 3x' - 4x = 0$
3. $x'' + 5x' = 0$
4. $2x'' - 5x' + 2x = 0$
5. $x'' + 6x' + 9x = 0$
6. $4x'' + 12x' + 9x = 0$
7. $x'' - 2a^2x' + a^4x = 0$
8. $x'' + 16x = 0$
9. $x'' - 4x' + 13x = 0$
10. $x'' + x' + 2x = 0$
11. $x'' + x' - 2x = 0$
12. $3x'' - 2x' - 8x = 0$
13. $x'' - 2x' - x = 0$
14. $x'' + 6x' + 13x = 0$
15. $4x'' - 8x' + 5x = 0$
16. $4x'' - 20x' + 25x = 0$
17. $x''' - x' = 0$
18. $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$
19. $x^{(4)} - 2x'' + x' = 0$
20. $x''' - x = 0$
21. $x^{(4)} + 4x = 0$
22. $x^{(4)} + 5x'' + 4$
23. $x^{(5)} + 2x''' + x' = 0$
24. $x^{(4)} - 13x'' + 36x = 0$

Riešte nasledujúce začiatkové úlohy:

25. $x'' - 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$
26. $x'' - 2x' + x = 0$, $x(2) = 1$, $x'(2) = -2$
27. $4x'' + x = 0$, $x(\pi) = 2$, $x'(\pi) = 3$
28. $x''' - x' = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$
29. $x'' + 2x' + 5x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$
30. $x^{(4)} + 4x = 0$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$
31. $4x'' + x = 0$, $x(\pi) = 2$, $x'(\pi) = 3$
32. $x'' - 4x' + 3x = 0$, $x(0) = 6$, $x'(0) = 10$
33. $x'' + 4x' + 29x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 15$
34. $4x'' + 4x' + x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 2.2

1. $c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$
2. $c_1 e^t + c_2 e^{3t}$
3. $c_1 + c_2 e^{-5t}$
4. $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t/2}$
5. $e^{-3t}(c_1 + c_2 t)$
6. $(c_1 + c_2 t) e^{-3t/2}$
7. $(c_1 + c_2 t) e^{a^2 t}$
8. $c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$
9. $(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) e^{2t}$
10. $e^{-t/2} [c_1 \cos(\sqrt{7} \frac{t}{2}) + c_2 \sin(\sqrt{7} \frac{t}{2})]$
11. $c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$
12. $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4/3t}$
13. $c_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$
14. $e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$
15. $e^t(c_1 \cos \frac{t}{2} + c_2 \sin \frac{t}{2})$
16. $(c_1 + c_2 t) e^{5/2t}$
17. $c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$
18. $c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$
19. $c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t$
20. $c_1 e^t + [c_2 \cos(\sqrt{3} \frac{t}{2}) + c_2 \sin(\sqrt{3} \frac{t}{2})] e^{-t/2}$
21. $(c_1 \cos t + c_2 \sin t) e^t + (c_3 \cos t + c_4 \sin t) e^{-t}$
22. $c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t$
23. $c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t$

$$24. c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_4 e^{-3t}$$

$$25. \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

$$26. (7 - 3t) e^{t-2}$$

$$27. 2 \sin \frac{t}{2} - 6 \cos \frac{t}{2}$$

$$28. 2 + e^{-t}$$

$$29. e^{-t} (2 \cos 2t + \sin 2t)$$

$$30. \frac{1}{2} [\sin t \cosh t - \cos t \sinh t]$$

$$31. -6 \cos \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2}$$

$$32. 4e^t + 2e^{3t}$$

$$33. 3e^{-2t} \sin 5t$$

$$34. e^{-t/2} (2 + t)$$

2.3. LINEÁRNE NEHOMOGÉNNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE n -TÉHO RÁDU

Budeme sa zaoberať diferenciálnymi rovnicami tvaru

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (3.1)$$

kde a_1, \dots, a_n, f sú spojité funkcie na intervale (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Rovnica (3.1) sa nazýva *lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica* - LNDR (rádu n).

Podobne ako lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu môžeme aj LNDR (3.1) vyjadriť v operátorovom tvare

$$Lx = f, \quad x \in X$$

kde $L: X \rightarrow Y$ je lineárny operátor zobrazujúci lineárny priestor $X = C^n(a, b)$ do priestoru $Y = C(a, b)$.

Na určenie všeobecného riešenia LNDR (3.1) stačí nájsť všeobecné riešenie príslušnej LHDR

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (3.2)$$

a jedno ľubovoľné tzv. *partikulárne riešenie* nehomogénnej rovnice (3.1). Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 2.5.

Nech $x_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľné riešenie LNDR (3.1). Potom všeobecné riešenie rovnice (3.1) má tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + x_f(t), \quad t \in (a, b) \quad (3.3)$$

kde c_1, \dots, c_n sú ľubovoľné reálne čísla a

$$\mathcal{B} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

je báza priestoru X_0 všetkých riešení LHDR (3.2).

Dôkaz. Najprv ukážeme, že každá funkcia tvaru (3.3) je riešením nehomogénnej diferenciálnej rovnice (3.1). Nech L je lineárny operátor ľavej strany rovnice (3.1) definovaný vzťahom

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t), \\ t \in (a, b), \quad x \in C^{(n)}(a, b)$$

Na základe jeho lineárnosti a charakteru funkcií x_1, \dots, x_n, x_f dostaneme vzťahy

$$Lx = L\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + x_f\right) = \sum_{i=1}^n c_i Lx_i + Lx_f = f$$

To znamená, že každá funkcia tvaru (3.4) je riešením LNDR (3.1).

Nech funkcia $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je riešením LNDR (3.1). Potom platia vzťahy

$$L(x - x_f) = Lx - Lx_f = f - f = 0$$

Teda rozdiel funkcií $x - x_f$ je riešením LHDR (3.2) a možno ho vyjadriť v tvare

$$x - x_f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Potom funkcia x má tvar (3.3) a tým je dôkaz vety skončený.

Teda na určenie všeobecného riešenia lineárnej nehomogénnej rovnice (3.1) stačí poznať všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice (3.2) a jedno (partikulárne) riešenie rovnice (3.1). Ďalej sa budeme zaoberať hľadaním tohto riešenia.

V nasledujúcom texte sa zameriame na rovnice s konštantnými koeficientmi

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

so špeciálnymi pravými stranami $f(t)$ v tvare polynómov, exponenciálnych a goniometrických funkcií. Uvedené pravé strany zahŕňajú dostatočne širokú triedu funkcií z hľadiska riešenia praktických úloh. Podstatou metódy je vyjadrenie riešenia v tvare určenom podľa pravých strán a s konečným počtom neznámych koeficientov, ktoré nájdeme dosadením uvedenej funkcie - riešenia do LNDR (3.1). Metóda sa nazýva *metóda neurčitých koeficientov* a jej výhoda je v tom, že riešenie nájdeme bez operácie integrovania.

Uvažujme pravú stranu v tvare

$$f(t) = q_m(t) e^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

kde $q_m(t)$ je polynóm stupňa m s reálnymi koeficientami a exponent β je komplexné číslo.

Základná myšlienka metódy spočíva v tom, že derivovaním funkcií tvaru (3.5) opäť dostaneme funkcie tvaru (3.5). Riešenie LNDR (3.1) hľadáme v tvare

$$x_f(t) = t^k (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m) e^{\beta t} \quad (3.6)$$

kde b_0, b_1, \dots, b_m sú neznáme komplexné koeficienty. Exponent k sa rovná násobnosti čísla β ako koreňa charakteristickej rovnice

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (3.7)$$

Ak β nie je koreňom rovnice (3.7), kladieme $k = 0$.

Dosadením funkcie (3.6) do riešenej diferenciálnej rovnice (3.1) dostaneme porovnaním ľavej a pravej strany rovnosť dvoch polynómov stupňa m a porovnaním koeficientov sústavu $m+1$ lineárnych algebrických rovníc na určenie neznámych koeficientov b_0, b_1, \dots, b_m . Táto sústava má práve jedno riešenie, o čom sa čitateľ môže presvedčiť v lit. [6], [10], [15].

Príklad 2.10

Nájdime všeobecné riešenie LNDR

$$x'' + 4x = te^t \quad (3.8)$$

R i e š e n i e. Najskôr nájdeme všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice

$$x'' + 4x = 0$$

Jej charakteristická rovnica

$$r^2 + 4 = 0$$

má komplexne združené korene $r_{1,2} = \pm 2i$, ktorým zodpovedá reálne všeobecné riešenie

$$x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Funkcia na pravej strane rovnice (3.8) je súčinom polynómu 1. stupňa a exponenciálnej funkcie. Jej exponent $\beta = 1$ nie je koreňom charakteristickej rovnice. Partikulárne riešenie rovnice (3.8) potom hľadáme v tvare

$$x_p(t) = (b_0 t + b_1) e^t$$

Dosadením funkcie $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$; do riešenej rovnice (3.8) dostaneme:

$$[5b_0 t + (2b_0 + 5b_1)] e^t = te^t$$

Porovnaním ľavej a pravej strany poslednej rovnice získame systém lineárnych algebrických rovníc

$$5b_0 = 1$$

$$2b_0 + 5b_1 = 0$$

ktorého riešením je dvojica

$$b_0 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = -\frac{2}{25}$$

Partikulárnym riešením je potom funkcia

$$x_f(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{25}\right) e^t$$

a všeobecné riešenie rovnice (3.8) je súčtom všeobecného riešenia (3.9) a funkcie x_f :

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{25}\right) e^t; \quad c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$$

Príklad 2.11

Nájdime partikulárne riešenie rovnice

$$x''' - 2x' + 2x = 4e^{(1+i)t} \quad (3.10)$$

R i e š e n i e. Príslušná charakteristická rovnica

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

má komplexne združené korene $r_{1,2} = 1 \pm i$.

Pravá strana je súčinom konštanty (polynómu nultého stupňa) a exponenciálnej funkcie s komplexným exponentom. Tento exponent je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice. Hľadané partikulárne riešenie a jeho derivácie sú: