

kde

$$\beta_k = \int_0^1 u_0'(x) \cos k\pi x \, dx; \quad k = 1, 2, \dots$$

sú Fourierove koeficienty funkcie $\frac{1}{2} u_0' \in C(0,1)$ podľa ortogonálneho systému $\{\cos k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$.

Nekonečný (číselný) rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 \pi^2} + \beta_k^2 \right)$$

je majorantný konvergentný rad k radu (4.19), pretože rad $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ konverguje podľa teórie Fourierových radov ([8]). Potom rad (4.19) rovnomerne konverguje na množine $(0,1) \times (0,\infty)$ k funkcii $u \in C((0,1) \times (0,\infty))$ a priamym dosadením vidíme, že je splnená aj začiatočná podmienka (4.17) a okrajové podmienky (4.18).

Na to, aby funkcia u bola aj riešením rovnice (4.16), musíme ukázať, že rad (4.19) môžeme dvakrát derivovať podľa x a raz podľa t na množine $(0,1) \times (0,\infty)$.

Derivovaním podľa premenných t, x a dvojnásobným derivovaním podľa x dostaneme z radu (4.19) postupne rady

$$-\pi^2 a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \gamma_k e^{-(k\pi a)^2 t} \sin k\pi x \quad (4.23)$$

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k e^{-(k\pi a)^2 t} \cos k\pi x \quad (4.24)$$

$$-\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \gamma_k e^{-(k\pi a)^2 t} \sin k\pi x \quad (4.25)$$

Nech $t_0 > 0$. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 e^{-(k\pi a)^2 t_0} = 0$ a existuje $M > 0$ také, že rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{1}{k^2} + \gamma_k^2 \right)$$

je majorantným konvergentným radom k radu (4.23) na množine $(0,1) \times (t_0,\infty)$ a teda rad (4.23) na tej množine rovnomerne konverguje. Rovnakým spôsobom

dostaneme aj rovnomernú konvergenciu radov (4.24), (4.25). Potom môžeme rad (4.19) derivovať a súčty radov (4.23), (4.24), (4.25) sú postupne rovné $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t); (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$. Pretože každý člen radu (4.19) je riešením rovnice (4.16), je aj jeho súčet - funkcia u riešením rovnice (4.16) a teda aj začiatočno-okrajovej úlohy (4.16), (4.17), (4.18).

Poznámka 4.1. Ak $L = -a^2 \Delta$, potom vlastné hodnoty operátora L majú tvar $\lambda_k = a^2 \mu_k; k = 1, 2, \dots$, kde μ_k sú vlastné hodnoty operátora $-\Delta$, pričom vlastné funkcie w_k sú tie isté ako u operátora $-\Delta$.

4.2 Hyperbolické rovnice

Nech je daná začiatočno-okrajová úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x,t); \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.26)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (4.27)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s,t) + \beta(s)u(s,t) = 0; \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4.28)$$

Opäť vyjadríme riešenie v tvare Fourierovho radu podľa vlastných funkcií patriacich k operátoru L a okrajovej podmienke (4.28):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x); \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.29)$$

Dosadením do rovnice (4.26) a využitím začiatočných podmienok (4.27) dostaneme začiatočné úlohy pre Fourierove koeficienty $c_k(t), t > 0; k = 1, 2, \dots$:

$$c_k''(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t), \quad t > 0 \quad (4.30)$$

$$c_k(0) = \gamma_k, \quad c_k'(0) = \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

kde $f_k(t), \gamma_k, \delta_k$ sú Fourierove koeficienty funkcií $f(.,t), u_0, u_1$ podľa systému $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ dané vzťahmi (4.9), (4.10) a

$$\delta_k = \|w_k\|^{-2} \int_{\Omega} u_1(x) w_k(x) \, dx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Riešenie úlohy (4.30), (4.31) má za predpokladu $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ tvar

$$c_k(t) = f_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\delta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) f_k(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

a teda

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\delta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) f_k(\tau) d\tau \right] w_k(x) \quad (4.34)$$

Rad (4.34) reprezentuje vo všeobecnosti slabé riešenie úlohy (4.26), (4.27), (4.28). Klasické riešenie podobne ako v parabolickom prípade existuje za predpokladu dostatočnej hladkosti dát úlohy.

Ak pravá strana $f(x, t) = 0$ na $\Omega \times (0, \infty)$, tak postupujeme separáciou premenných, keď riešenie u vyjadríme najprv v tvare

$$u(x, t) = X(x)T(t); \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

4.3 Schrödingerova rovnica

Začistočno-okrajová úloha pre Schrödingerovu rovnicu má tvar

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta u - V(x)u(x, t) = 0; \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.35)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (4.36)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n}(s, t) + \beta(s)u(s, t) = 0; \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4.37)$$

Riešenie u vyjadríme v tvare Fourierovho radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x); \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.38)$$

kde $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ sú vlastné funkcie zodpovedajúce vlastným hodnotám $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ operátora L tvaru

$$(Lv)(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta v + V(x)v(x), \quad x \in \Omega \quad (4.39)$$

spĺňajúce okrajovú podmienku (4.37). Fourierove koeficienty $c_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ sú potom riešením začistočnoj úlohy

$$i\hbar c_k'(t) - \lambda_k c_k(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.40)$$

$$c_k(0) = f_k \quad (4.41)$$

kde

$$f_k = \|w_k\|^{-2} \int_{\Omega} u_0(x)w_k(x)dx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

Riešenie úlohy (4.40), (4.41) má potom tvar

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_k t} w_k(x); \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.43)$$

Príklad 4.2. Uvažujme začistočno-okrajovú úlohu pre Schrödingerovu rovnicu v guli polomeru ϱ :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta u + V(|x|)u(x, t); \quad |x| < \varrho, \quad t > 0 \quad (4.44)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < \varrho \quad (4.45)$$

$$u(s, t) = 0; \quad |s| = \varrho, \quad t > 0 \quad (4.46)$$

Použijeme separáciu premenných x, t . Vyjadríme funkciu u najprv v tvare

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Dosadením do rovnice (4.44) a separáciou dostaneme rovnosti

$$\frac{i\hbar T'(t)}{T(t)} = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta X + V(x)X(x)}{X(x)} = \lambda$$

a teda

$$i\hbar T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (4.47)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta X + (V(r) - \lambda)X(r, \varphi, \vartheta) = 0 \quad (4.48)$$

$$X(\varphi, \vartheta) = 0 \quad (4.49)$$

keď sme použili sférické súradnice r, φ, ϑ .

Úlohu (4.18), (4.49) na vlastné hodnoty a vlastné funkcie riešime ďalšou separáciou premenných. Vyjadríme najprv rovnicu (4.48) v sférických súradniciach:

$$-\frac{h^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right] + V(r) X(r, \vartheta, \varphi) = \lambda X(r, \vartheta, \varphi)$$

Hľadané vlastné funkcie vyjadríme v tvare

$$X(r, \varphi, \vartheta) = R(r)Y(\varphi, \vartheta)$$

Ďalšou separáciou dostaneme rovnice:

$$-(r^2 R')' + \frac{2m_0}{h^2} r^2 [V(r) - \lambda] R(r) + \mu R(r) = 0 \quad (4.50)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y(\varphi, \vartheta) = 0 \quad (4.51)$$

Vieme z časti II.3.4, že riešením úlohy (4.51) sú vlastné hodnoty

$$\mu_n = n(n+1); \quad n = 0, 1, \dots$$

a im zodpovedajúce sférické vlastné funkcie $\{Y_n^k\}_{k=-n}^n$ definované vzťahmi

$$Y_n^k(\varphi, \vartheta) = \cos k\varphi P_n^k(\cos \vartheta); \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$Y_n^{-k}(\varphi, \vartheta) = \sin k\varphi P_n^k(\cos \vartheta); \quad k = 1, \dots, n$$

Dosadením do rovnice (4.50) dostaneme úlohu

$$r^2 R'' + 2r R' + \left[\frac{2m_0}{h^2} r^2 (\lambda - V(r)) - n(n+1) \right] R(r) = 0 \quad (4.52)$$

$$R(\varrho) = 0 \quad (4.53)$$

Položme ďalej kvôli jednoduchoosti $V(r) = V = \text{const.}$ Úloha (4.52), (4.53) prejde substitúciou

$$R(r) = \frac{\tilde{R}(r)}{\sqrt{r}}, \quad r > 0$$

na úlohu

$$r^2 \tilde{R}'' + r \tilde{R}' + \left[\frac{2m_0}{h^2} r^2 (\lambda - V) - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \tilde{R} = 0; \quad \tilde{R}(\varrho) = 0$$

ktorej riešením sú vlastné hodnoty

$$\lambda_{nj} = \frac{h^2}{2m_0 \varrho^2} \mu_j^{(n+\frac{1}{2})} + V$$

a zodpovedajúce vlastné funkcie

$$\tilde{R}_{nj}(r) = J_{n+\frac{1}{2}} \left(\mu_j^{(n+\frac{1}{2})} \frac{r}{\varrho} \right)$$

kde $\mu_j^{(n+\frac{1}{2})}$ je j -tý koreň Besselovej funkcie $J_{n+\frac{1}{2}}$; $j = 1, 2, \dots$

Výsledné riešenie úlohy (4.44), (4.45), (4.46) má potom nasledujúce vyjadrenie v tvare ortogonálneho radu:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u(r, \varphi, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^n g_{nj k} e^{-\frac{i}{h} \lambda_{nj} t} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\mu_j^{(n+\frac{1}{2})} \frac{r}{\varrho} \right) Y_{nk}(\varphi, \vartheta)$$

kde

$$g_{nj k} = \frac{(2n+1)(n-|k|)!}{\epsilon_k \pi \varrho^2 (n+|k|)! \left[J_{n+\frac{1}{2}} \left(\mu_j^{(n+1/2)} \right) \right]^2}$$

$$= \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{3/2} u_0(r, \varphi, \vartheta) J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_j^{(n+1/2)}}{\varrho} r \right) Y_n^k(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

$$\epsilon_0 = 2, \quad \epsilon_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

4.4. Úlohy

1. Nájdite rozdelenie teploty v tyči dĺžky l , tepelne izolovanej od okolia a bez vnútorných zdrojov teploty, ak

a) Začiatková teplota je $u_0(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$, $x \in (0, l)$ a konce tyče sú

udržiavané na nulovej teplote.

b) Začiatková teplota je $u_0(x) = Ax$, $x \in (0, l)$ a konce tyče sú tepelne izolované.

c) Začiatková teplota je $u_0(x) = Ax$, $x \in (0, l)$; koniec $x = 0$ je udržiavaný na nulovej teplote a na konci $x = l$ prebieha výmena tepla

s prostredím, t.j. $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + h u(l, t) = 0$, $t > 0$, $h > 0$.

d) Začiatková teplota a teplota na konci $x = 0$ je nulová a na konci $x = l$ sa teplota mení podľa vzťahu $u(l, t) = At$.

Návod: Vyjadrite riešenie pôvodnej úlohy v tvare

$$u(x, t) = \frac{A}{l} xt + \frac{Ax}{6a^2 l} (x^2 - l^2) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

a riešte úlohu

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = \frac{Ax}{6a^2 l} (l^2 - x^2).$$

2. Nájdite teplotu tyče dĺžky l tepelne izolovanej od okolia, ak v tyči sú spojené rozložené tepelné zdroje s hustotou $f(x, t)$, začiatková teplota je $u_0(x)$, $x \in (0, l)$; a teplota na koncoch je udržiavaná na nule, pričom

a) $f(x, t) = e^{-\alpha t} \sin \frac{\pi x}{l}$, $u_0(x) = \frac{cx(l-x)}{2}$

b) $f(x, t) = A$, $u_0(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$

3. Nájdite rozdelenie teploty vnútri tepelne izolovaného nekonečného kruhového valca polomeru ρ , ak nemá vnútorné zdroje tepla a

a) začiatková teplota je rovná $u(r) = 1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2$, $0 < r < \rho$; a teplota plášte je nulová,

b) začiatková teplota je $u_0(r) = A \frac{r}{\rho}$, $0 < r < \rho$; a plášť je udržiavaný na konštantnej teplote A .

Návod: $u(x, t) = A + v(x, t)$.

4. Nájdite funkciu kmitania struny dĺžky l s upevnenými koncami, ak vonkajšia sila f je nulová a

a) začiatková rýchlosť je nulová a začiatková výchylka je parabola symetrická vzhľadom na priamku $x = \frac{l}{2}$ a prechádzajúca bodmi $(0, 0)$,

$(\frac{l}{2}, h)$, $(l, 0)$,

b) začiatková výchylka je nulová a začiatková rýchlosť je

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0 - \delta \\ v_0 \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l \end{cases}$$

5. Nájdite funkciu kmitania struny dĺžky l na koncoch upevnenej, ak začiatková výchylka $u(x, 0) = u_0 x(l-x)$, $0 < x < l$; začiatková rýchlosť je nulová a na strunu pôsobí vonkajšia sila dĺžkovej hustoty $f(x, t) = A \sin \omega t$. Vyšetrite prípad rezonancie.

6. Nájdite kmity štvorcovej membrány so stranou dĺžky b , ktorej protilahlé strany $x = 0$, $x = b$ sú upevnené a druhé dve sú voľné, pričom začiatková výchylka je $u(x, y, 0) = ax(b-x)$, začiatková rýchlosť je nulová a vonkajšia sila je konštantná.

7. Nájdite kmity kruhovej membrány s polomerom ρ upevnenej na okraji a kmitajúcej v prostredí, ktoré kladie jej pohybu odpor priamo úmerný opačnej rýchlosti, pričom začiatková výchylka je $u(x, y, 0) = A(\rho - r)$ a začiatková rýchlosť a vonkajšia sila sú nulové.

Návod: Riešte začiatko-okrajovú úlohu pre rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad h > 0.$$

Literatúra

- [1] Arsenin, V. J.: Matematická fyzika, Bratislava, Alfa 1977, 1. vyd.
(Preklad ruského originálu)
- [2] Barták, J. - Hermann, L. - Lovocer, J. - Vejvoda, O.: Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice, MVŠT XXI., Praha, SNTL.
(Připravuje se.)
- [3] Ciarlet, P.: The Finite Element Method for Elliptic Problems, 1st Ed., Amsterdam, North Holland 1978. (Preklad z ruštiny - Moskva, Mir 1980.)
- [4] Hartman, P.: Ordinary Differential Equations, New York, 1. vyd., John Wiley 1964. (Preklad do ruštiny, Moskva, Mir 1970.)
- [5] Kačur, J.: Vybrané kapitoly z matematickej fyziky I. - skriptá, 1. vyd. Bratislava, MFF UK 1984.
- [6] Kantorovič, I.V. - Krylov, V.I.: Probližennyye metody vyššego analiza, 2. izd., Moskva, Fizmatgiz 1962.
- [7] Kluváněk, I. - Mišík, L. - Švec, M.: Matematika I., 2. vyd., Bratislava, SVTL 1962.
- [8] Kluváněk, I. - Mišík, L. - Švec, M.: Matematika II., 2. vyd., Bratislava, SVTL 1963.
- [9] Kolář, V. a kol.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, 1. vyd., Praha, SNTL 1972.
- [10] Kolmogorov, A.N. - Fomin, S.V.: Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy, 1. vyd., Praha, SNTL 1975. (Preklad ruského originálu.)
- [11] Kufner, A. - John, O. - Fučík, S.: Function Spaces, 1. vyd., Praha, Academia 1977.
- [12] Michlin, S.G.: Kurs matematičeskoj fiziki, 1. vyd., Moskva, Nauka 1968.
- [13] Míka, S. - Kufner, A.: Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice, 1. vyd., MVŠT XX., Praha, SNTL 1983.
- [14] Nagy, J. - Nováková, E. - Váček, M.: Lebesguova míra a integrál, 1. vyd., MVŠT XXII., Praha, SNTL 1985.
- [15] Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, 1. vyd., Praha, Academia 1967.
- [16] Neubrunn, T. - Riečan, B.: Miera a integrál, 1. vyd., Bratislava, VEDA 1981.
- [17] Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky, 1. vyd., Praha, SNTL 1974.
- [18] Rektorys, K.: Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice, 1. vyd., Praha, SNTL 1985.
- [19] Šulka, R. - Satko, L.: Matematická analýza I. - skriptá, 1. vyd., Bratislava, ES SVŠT 1980.
- [20] Šulka, R. - Satko, L.: Matematická analýza II. - skriptá, 1. vyd., Bratislava, Alfa 1985.
- [21] Tichonov, A.N. - Samarskij, A.A.: Uravnenija matematičeskoj fiziki, 4.vyd., Moskva, Nauka 1972. (Preklad do češtiny: Praha, SNTL 1955.)
- [22] Vladimirov, V.S.: Uravnenija matematičeskoj fiziki, 4. vyd., Moskva, Nauka 1981.

Obsah

Úvod	3
I. VYBRANÉ KAPITOLY Z MATEMATICKEJ ANALÝZY	5
1. Niektoré priestory funkcií	5
2. Sturmova-Liouvilleova úloha	19
II. STACIONÁRNE ROVNICE	32
1. Niektoré fyzikálne deje vyjadrené stacionárnymi rovnícami	32
2. Eliptické rovnice	36
3. Metóda separácie premenných	55
4. Integrálne metódy riešenia eliptických okrajových úloh	90
5. Metódy funkcionálnej analýzy	107
III. NESTACIONÁRNE ROVNICE	147
1. Niektoré fyzikálne deje vyjadrené nestacionárnymi rovnícami	147
2. Parabolické rovnice	151
3. Hyperbolické rovnice	163
4. Fourierova metóda riešenia začiatovo-okrajových úloh	177
Literatúra	188