

3. Riešte začiatočno-okrajové úlohy pre vedenie tepla v polohraničenej tyči:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x) = u_0(x); \quad x > 0, \quad t > 0, \text{ ak}$$

a) $u(0, t) = 0, \quad b) \frac{\partial u}{\partial x}(0, T) = 0$

Návod: Použitie riešenia začiatočnej úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = \bar{u}_0(x); \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

kde

a) $\bar{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x > 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases}$ b) $\bar{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x > 0 \\ u_0(-x), & x < 0 \end{cases}$

4. Nájdite Greenovou funkciou a riešenie začiatočnej úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q u = f(x, t), \quad q > 0, \quad q \in \mathbb{R}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Návod: Zavedením novej neznámej funkcie $v(x, t) = e^{qt} u(x, t)$ preveďte úlohu na riešenie začiatočnej úlohy

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{qt} f(x, t), \quad v(x, 0) = u_0(x); \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

§3. HYPERBOLICKÉ ROVNICE

V tejto časti sa budeme zaoberať rovnicami vyjadrujúcimi kmitanie a vlnenie.

3.1 Definície a základné úlohy pre hyperbolickú rovnicu

Definícia 3.1. Nech L je eliptický operátor v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ tvaru

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x)$$

Potom parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

sa nazýva hyperbolická rovnica.

Medzi hyperbolické rovnice patria aj rovnice (1.3) - (1.6) kmitania struny, membrány, ako aj šírenia vln v priestore.

Rovnako ako v prípade parabolickej rovnice si zavedieme dva typy úloh.

Definícia 3.2. Začiatočná úloha pre hyperbolickú rovnicu je úloha nájsť funkciu $u : \mathbb{R}^m \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením rovnice (3.1) na množine $\mathbb{R}^m \times (0, \infty)$ a spĺňa začiatočné podmienky

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (3.2)$$

kde $u_0, u_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sú dané funkcie.

Definícia 3.3. Nech Ω je oblasť v \mathbb{R}^m . Začiatočno-okrajové úloha pre hyperbolickú rovnicu je úloha nájsť funkciu $u : \bar{\Omega} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením rovnice (3.1), spĺňa začiatočné podmienky

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

a okrajovú podmienku

$$\alpha(s, t) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s, t) + \beta(s, t)u(s, t) = g(s, t); \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (3.4)$$

3.2 Jednoznačnosť riešenia začiatko-okrajovej úlohy

Ak $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$, tak symbolom $C^{k,k}(D)$ budeme označovať množinu všetkých funkcií $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré majú na množine D spojité všetky parciálne derivácie k -teho rádu podľa priestorových premenných x_i , $i = 1, \dots, m$ a spojité parciálne derivácie $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$.

Veta 3.1. Začiatko-okrajová úloha (3.1), (3.3), (3.4) má najviac jedno riešenie $u \in C^{2,2}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^{1,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$

Dôkaz: Nech u, v sú dve riešenia úlohy (3.1), (3.3), (3.4) z uvedenej triedy funkcií. Potom funkcia

$$w = u - v \in C^{2,2}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^{1,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$$

je riešením homogénnej úlohy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Lw = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (3.5)$$

$$w(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.6)$$

$$\alpha(s, t) \frac{\partial w}{\partial n_A}(s, t) + \beta(s, t)w(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (3.7)$$

Použitím integrácie per partes dostaneme na základe vzťahov (3.5), (3.6), (3.7) a symetrie operátora L pre ľubovoľné $T > 0$ rovnosti

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Lw \right) \frac{\partial w}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{d}{dt} [(Lw)w] \right\} dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2(T) + w(x, T)(Lw)(x, T) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2(T) + \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(T) \frac{\partial w}{\partial x_j}(T) + \right. \\ &\quad \left. + q(x)w^2(x, T) \right] dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\beta(s, T)}{\alpha(s, T)} w^2(s, T) ds, \text{ ak} \end{aligned}$$

$$\alpha(s, T) > 0 \text{ pre všetky } s \in \partial\Omega$$

Z eliptickosti operátora L vyplývajú ďalej nerovnosti

$$0 \geq \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2(T) + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right)^2(T) \right] dx \geq 0$$

ktoré dostaneme aj v prípade $\alpha(s, T) = 0$ na $\partial\Omega$, alebo na časti $\Gamma \subset \partial\Omega$:

$$\text{Teda } \frac{\partial w}{\partial t}(x, T) = \frac{\partial w}{\partial x_k}(x, T) = 0 \text{ pre všetky } x \in \Omega, k = 1, \dots, m.$$

Pretože $T > 0$ je ľubovoľné, platí

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x_k}(x, t) = 0 \text{ pre všetky } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

a teda $w(x, t) = C = \text{konšt}$, $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$. Na základe podmienky $w(x, 0) = 0$ a spojitosti funkcie w musí byť $C = 0$ a $w = 0$ na množine $\Omega \times (0, \infty)$, čím je dôkaz jednoznačnosti riešenia skončený.

Uvažujme začiatko-okrajovú úlohu pre kmitanie struny, alebo membrány bez prítomnosti vonkajších síl:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(T(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u(x) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega$$

$$\alpha(s, t) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s, t) + \beta(s, t)u(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)$$

Pre každé $t \geq 0$ definujeme energetický integrál

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + T(x) |\operatorname{grad} u|^2 + q(x)u^2(x) \right] dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} T(s) \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} u^2(s, t) ds \end{aligned}$$

vyjadrujúci súčet kinetickej a potenciálnej energie kmitajúcej sústavy v čase t . Z priebehu dôkazu predchádzajúcej vety vidíme, že platí vzťah

$$E(t) = E(0) \text{ pre všetky } t > 0$$

čo znamená, že celková energia kmitajúcej sústavy bez vonkajších síl sa v čase nemení (zákon zachovania energie).

3.3 Kmitanie nekonečne dlhej struny

Budeme sa najprv zaoberať kmitaním struny pri danej začiatočnej polohe a začiatočnej rýchlosti bez vplyvu okrajov struny a vonkajších síl, čo vedie k začiatočnej úlohe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.9)$$

Zavedieme nové premenné ξ, η transformáciou

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

Rovnica (3.8) má po transformácii premenných (x, t) tvar

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3.10)$$

Ak rovnicu (3.10) integrujeme podľa premennej η , dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \varphi(\xi) \quad (3.11)$$

kde $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia. Po integrovaní tejto rovnice podľa premennej ξ dostaneme funkciu \tilde{u} v tvare

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int \varphi(\xi) d\xi + F(\eta) = \phi(\xi) + F(\eta)$$

a po prechode k pôvodným premenným

$$u(x, t) = \phi(x - at) + F(x + at) \quad (3.12)$$

kde ϕ, F sú ľubovoľné funkcie definované na celej reálnej osi \mathbb{R} . Ak funkcie ϕ, F sú dvakrát diferencovateľné, ľahko sa presvedčíme, že funkcia u v tvare (3.12) je naozaj riešením rovnice (3.8). Rečou obyčajných diferenciálnych rovníc môžeme povedať, že vzorec (3.12) vyjadruje všeobecné riešenie vlnovej rovnice (3.8).

Hľadáme ďalej riešenie rovnice (3.8) spĺňajúce aj začiatočné podmienky (3.9), ktoré majú v tomto prípade tvar

$$u(x, 0) = \phi(x) + F(x) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -a \phi'(x) + a F'(x) = u_1(x)$$

Integrovaním poslednej rovnice dostaneme pre určenie funkcií ϕ, F systém

$$\phi(z) + F(z) = u_0(z)$$

$$-\phi(z) + F(z) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^z u_1(y) dy + C$$

kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je ľubovoľný, ale pevný bod a C je integračná konštanta. Funkcie ϕ, F majú potom tvar

$$\phi(z) = \frac{1}{2} u_0(z) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^z u_1(y) dy - \frac{C}{2}$$

$$F(z) = \frac{1}{2} u_0(z) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^z u_1(y) dy + \frac{C}{2}$$

Po dosadení do vzorca (3.12) dostaneme D'Alembertov vzorec:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy \quad (3.13)$$

Ak je funkcia u_0 dvakrát a funkcia u_1 raz diferencovateľná, potom je funkcia u dvakrát diferencovateľná a dosadením sa ľahko presvedčíme, že je (klasickým) riešením začiatočnej úlohy (3.8), (3.9). Výraz (3.13) má zmysel aj v prípade funkcií u_0, u_1 , ktoré sú len spojité. V tom prípade hovoríme, že funkcia u je zovšeobecneným riešením úlohy (3.8), (3.9).

Vráťme sa ešte k vyjadreniu riešenia v tvare

$$u(x, t) = \phi(x - at) + F(x + at)$$

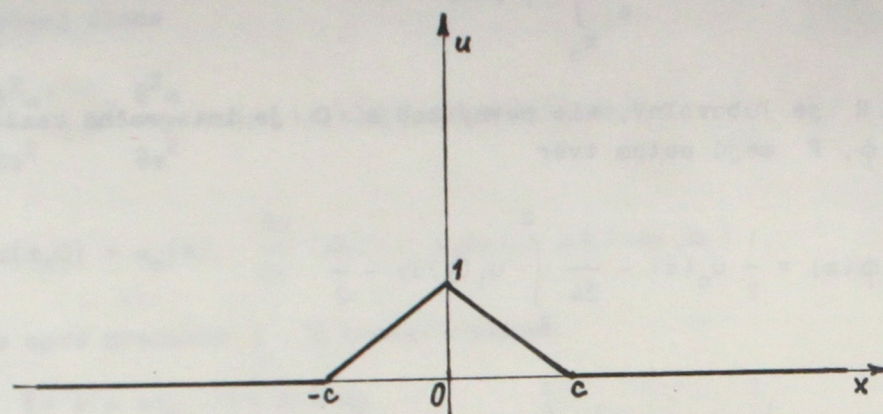
Funkcie ϕ, F vyjadrujú šírenie vlnenia v kladnom, resp. zápornom smere reálnej osi rýchlosťou a . Hodnoty $\phi(x - at)$ vyjadrujú priamo postupujúcu a hodnoty $F(x + at)$ opačne postupujúcu vlnu.

Príklad 3.1. Nech začiatočný profil struny má tvar na obr. 19 a začiatočnú rýchlosť $u_1 = 0$. Potom má riešenie tvar

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x - at) + \frac{1}{2} u_0(x + at)$$

kde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } |x| > c \\ 1 - \frac{|x|}{c}, & \text{ak } |x| \leq c \end{cases}$$



Obr. 19
Začiatkový profil struny

Na obr. 20 vidíme profily struny v niektorých časových okamihoch.

D'Alembertov vzorec môžeme použiť aj pri riešení úlohy o kmitení "poloohraničenej struny", pri ktorej kladieme okrajovú podmienku v ľavom konci struny. Ak napríklad predpokladáme, že struna je na jednom konci upevnená, dostaneme začiatko-okrajovú úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \quad (3.14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x, 0), \quad x \in (0, \infty) \quad (3.15)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, \infty) \quad (3.16)$$

O funkciách u_0, u_1 predpokladáme, že sú spojité na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ a spĺňajú okrajovú podmienku $u_0(0) = u_1(0) = 0$. Na základe týchto predpokladov môžeme definovať ich spojité nepárne predĺženia \bar{u}_0, \bar{u}_1 na celú reálnu os:

$$\bar{u}_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & x \in \langle 0, \infty \rangle \\ -u_i(-x), & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad i = 0, 1$$

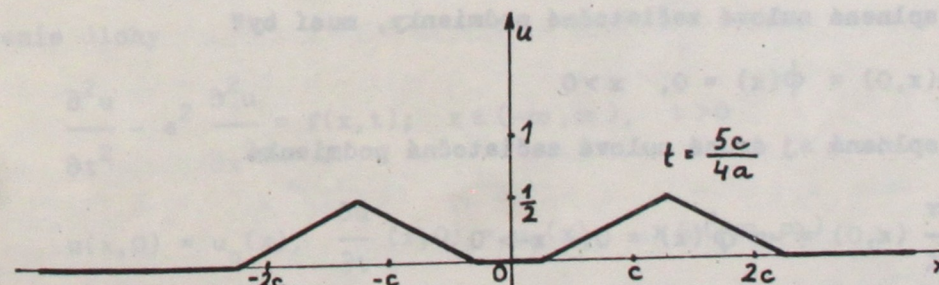
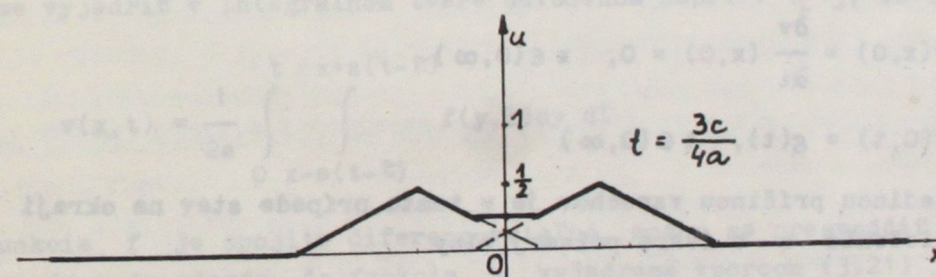
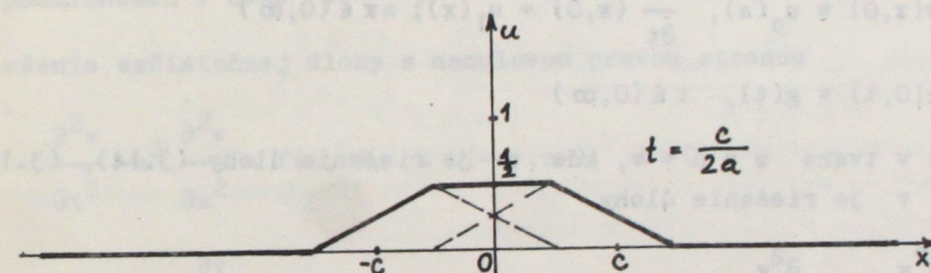
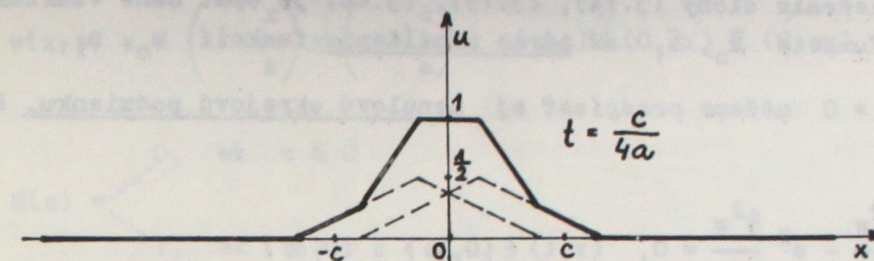
Vieme, že funkcia $u : (-\infty, \infty) \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vzorcom

$$u(x, t) = \frac{\bar{u}_0(x-at) + \bar{u}_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{u}_1(y) dy \quad (3.17)$$

je riešením začiatkovej úlohy pre rovnicu (3.8) so začiatkovými podmienkami

$$u(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Pretože funkcie \bar{u}_0, \bar{u}_1 sú nepárne, je funkcia u určená vzťahom (3.17) aj riešením začiatko-okrajovej úlohy (3.14), (3.15), (3.16).



Obr. 20
Profily struny v daných časových okamihoch

Analogicky riešime aj začiatočno-okrajovú úlohu pre rovnicu (3.14) so začiatočnými podmienkami (3.15) a okrajovou podmienkou

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \in (0, \infty) \quad (3.18)$$

V tomto prípade stačí o funkciách u_0, u_1 predpokladať, že sú spojité na $[0, \infty)$. Riešenie úlohy (3.14), (3.15), (3.18) je opäť dané vzorcom (3.17), v ktorom funkcie \bar{u}_0, \bar{u}_1 sú párne predĺženia funkcií u_0, u_1 .

V bode $x = 0$ môžeme predpísať aj nenulovú okrajovú podmienku. Riešenie w úlohy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

$$w(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = u_1(x); \quad x \in (0, \infty)$$

$$w(0, t) = g(t), \quad t \in (0, \infty)$$

vyjadríme v tvare $w = u + v$, kde u je riešenie úlohy (3.14), (3.15), (3.16) a v je riešenie úlohy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

$$v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty)$$

$$v(0, t) = g(t), \quad t \in (0, \infty)$$

Pretože jedinou príčinou vzruchov je v tomto prípade stav na okraji $x = 0$, hľadáme riešenie v v tvare priamej vlny

$$v(x, t) = \phi(x - at)$$

Aby boli splnené nulové začiatočné podmienky, musí byť

$$v(x, 0) = \phi(x) = 0, \quad x > 0$$

Potom je splnená aj druhá nulová začiatočná podmienka

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = -a \phi'(x) = 0, \quad x > 0$$

Z okrajovej podmienky dostaneme

$$v(0, t) = \phi(-at) = g(t), \quad t > 0$$

a teda

$$\phi(z) = \begin{cases} 0, & \text{ak } z > 0 \\ g\left(-\frac{z}{a}\right), & \text{ak } z < 0 \end{cases}$$

Funkcia v má potom tvar:

$$v(x, t) = H\left(t - \frac{x}{a}\right) g\left(t - \frac{x}{a}\right); \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

kde

$$H(z) = \begin{cases} 0, & \text{ak } z \leq 0 \\ 1, & \text{ak } z > 0 \end{cases}$$

Z riešenia vidno, že do bodu $x > 0$ príde vzruch g pri nulových začiatočných podmienkach v čase $t = \frac{x}{a}$.

Aj riešenie začiatočnej úlohy s nenulovou pravou stranou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \quad (3.19)$$

$$v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (3.20)$$

môžeme vyjadriť v integrálnom tvare odvodenom napr. v ([1], §3.3):

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \quad (3.21)$$

Ak funkcia f je spojite diferencovateľná, možno sa presvedčiť priamym derivovaním a dosadením, že funkcia v vyjadrená vzorcom (3.21) je naozaj (klasickým) riešením začiatočnej úlohy (3.19), (3.20).

Riešenie úlohy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t); \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \quad (3.22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.23)$$

má potom tvar

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \quad (3.24)$$

Platí nasledujúca veta o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy (3.22), (3.23) dokázaná napr. v ([22], § 13.4).

Veta 3.2. Nech $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle)$. Potom funkcia $u : \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ určená vzorcom (3.24) je jediným riešením začiatočnej úlohy (3.22), (3.23).

3.4 Šírenie vln v rovine a v priestore

Aj v rovinnom a priestorovom prípade možno riešenie začiatočnej úlohy pre vlnovú rovnicu vyjadriť v integrálnom tvare. Zavedieme si najprv označenia kruhov v rovine a gúl a sfér v priestore:

$$K(x, \varrho) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < \varrho\}; \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$G(x, \varrho) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| < \varrho\};$$

$$S(x, \varrho) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| = \varrho\}; \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \varrho > 0$$

Platí nasledujúca veta o existencii, jednoznačnosti a tvare riešenia začiatočnej úlohy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t); \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty) \quad (3.25)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (3.26)$$

dokázaná v ([22], § 13.4).

Veta 3.3. Nech $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^m)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^m)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^m \times \langle 0, \infty \rangle)$. Potom existuje jediné (klasické) riešenie začiatočnej úlohy (3.25), (3.26), ktoré môže byť vyjadrené

Poissonovou formulou, ak $m = 2$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{K(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x - y|^2}} dy + \iint_{K(x, at)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x - y|^2}} dy + \int_0^t \left(\iint_{K(x, a(t-\tau))} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x - y|^2}} dy \right) d\tau \right] \quad (3.27)$$

a Kirchhoffovou³¹⁾ formulou, ak $m = 3$:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \iint_{S(x, at)} u_0(s) ds \right) + \frac{1}{t} \iint_{S(x, at)} u_1(s) ds + \iiint_{G(x, at)} \frac{f\left(y, t - \frac{|x - y|}{a}\right)}{|x - y|} dy \right] \quad (3.28)$$

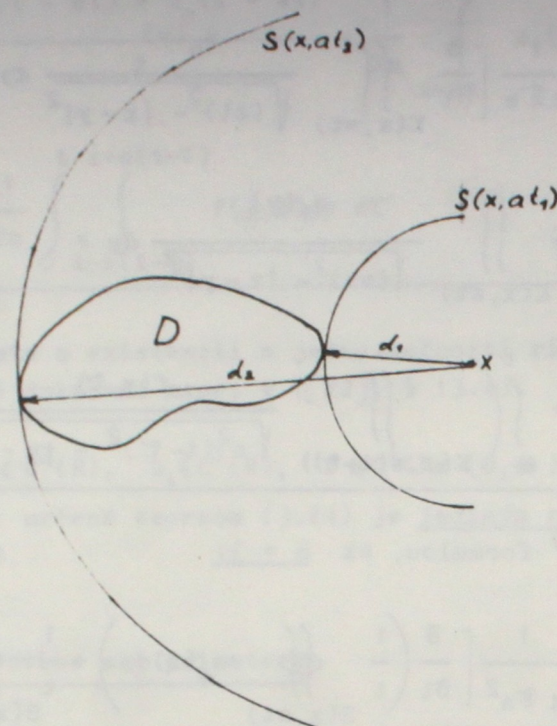
Všimnime si správanie vlnovej funkcie u v prípade, že chýbajú vonkajšie zdroje vlnenia, t.j. $f(x, t) = 0$ a začiatočné funkcie u_0, u_1 sú rôzne od nuly len v ohraničenej oblasti $D \subset \mathbb{R}^3$. Uvažujme bod $x \in \mathbb{R}^3$, $x \notin \bar{D}$, t.j. bod x má kladnú vzdialenosť od oblasti D . Pretože hodnota $u(x, t)$ závisí len od hodnôt funkcií u_0, u_1 na sfére $S(x, at)$ o strede x a polomere at , bude pre dostatočne malý a dostatočne veľký čas t $u(x, t) = 0$. Konkrétne,

$$u(x, t) = 0, \quad \text{ak } 0 \leq t < \frac{d_1}{a}, \quad \text{alebo } t > \frac{d_2}{a}$$

kde d_1 je najmenšia a d_2 najväčšia vzdialenosť bodu x od bodov v oblasti D : $d_1 = \inf_{y \in D} |x - y|$, $d_2 = \sup_{y \in D} |x - y|$. V čase $t_1 = \frac{d_1}{a}$ prejde

bodom x predný a v čase $t_2 = \frac{d_2}{a}$ zadný front vlny pochádzajúcej z oblasti vzruchov D (obr. 21).

³¹⁾ KIRCHHOFF Gustav Robert (1824-1887), nemecký fyzik a mechanik. Ešte ako študent odvodil svoje dva zákony o elektrickej sieti. Práce v mechanike sú venované teórii deformácie, pohybu a rovnováhy pružných telies. Odvodil formulu na riešenie vlnovej rovnice.



Obr. 21
Predný a zadný front vlny

Tento fakt možno vysvetliť aj Huyghensovým³²⁾ princípom, podľa ktorého sa vlny šíria vo všetkých smeroch rýchlosťou a .

Uvažujme ešte rovinné vlnenie opäť za predpokladu $f(x, t) = 0$ a $u_0(x) = u_1(x) = 0$, ak $x \notin D$, kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblasť. Ak bod $x \in \mathbb{R}^2$ má vzdialenosť $d = \inf_{y \in D} |x - y| > 0$ od oblasti D , potom predný front vlny príde na miesto x v čase $t_1 = \frac{d}{a}$. Zadný front však v tomto prípade neexistuje, pretože vo vzorci (4.27) vystupujú len integrály cez kruh $K(x, at)$. Tento jav možno vysvetliť tým, že daná dvojrozmerná úloha je v skutočnosti trojrozmernou, pričom začiatočné funkcie nezávisia od premennej x_3 a sú nenulové v nekonečnom valci, ktorého rezom v rovine $x_3 = 0$ je oblasť D .

³²⁾ HUYGHENS Christian (1629-1695), holandský fyzik, matematik a astronóm. Najviac sa zaoberal problémami mechaniky a optiky. Predložil podrobnú teóriu fyzikálneho kyvadla. Je autorom prvej vlnovej teórie svetla a všeobecného šírenia vzruchov. V matematike sa zaoberal teóriou kriviek, napísal jednu z prvých prác teórie pravdepodobnosti.

3.5 Úlohy

1. Riešte začiatočné úlohy pre vlnovú rovnicu:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, \quad u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin \omega x, \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin \omega t, \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

2. Neohraničená struna je rozkmitaná začiatočnou výchylkou tvaru

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c > 0 \\ h \left[1 - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right], & |x| \leq c \end{cases}$$

pri nulovej začiatočnej rýchlosti.

Nájdite funkcie vyjadrujúce tvar struny v čase $t > 0$ a funkcie vyjadrujúce pohyb bodu $x \in \mathbb{R}$.

3. Neohraničená struna s nulovou začiatočnou polohou je rozkmitaná pomocou začiatočnej rýchlosti $v_0 = \text{const.}$ na intervale $\langle -c, c \rangle$. Mimo tohto intervalu je začiatočná rýchlosť nulová. Nájdite funkcie vyjadrujúce pohyb bodu $x \in \mathbb{R}$ struny a nakreslite tvary struny v časoch $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6$.

4. V začiatočnom čase $t_0 = 0$ dostane neohraničená struna v bode x_0 kolmým úderom impulz I . Nájdite tvar struny v čase $t > 0$ za predpokladu nulovej začiatočnej výchylky a nulovej začiatočnej rýchlosti v bodoch $x \neq x_0$.

Návod: Riešte najprv úlohu

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad u_0(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0, & |x-x_0| > \delta \\ \frac{I}{2\delta\rho}, & |x-x_0| < \delta \end{cases}$$

kde ρ je dĺžková hustota struny. Riešenie pôvodnej úlohy má tvar $u(x,t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

5. Polookhraničená struna upevnená na konci $x = 0$ je rozkmitaná začiatočnou výchylkou tvaru

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq c \\ \frac{h}{c}(x-c), & c < x \leq 2c \\ \frac{h}{c}(2c-x), & 2c < x \leq 3c \\ 0, & x < 3c < \infty \end{cases}$$

pri nulovej začiatočnej rýchlosti.

Nakreslite profily struny v časoch $t_0 = 0$, $t_k = \frac{(2k-1)c}{a}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

6. Polookhraničená struna s pevným koncom $x = 0$ sa rozkmitá pomocou kolmého úderu dávajúce strune v čase $t = 0$ impulz I v bode x_0 . Nájdite tvar struny v čase $t > 0$, ak začiatočná výchylka je nulová a nulová je aj začiatočná rýchlosť v bodoch $x \neq x_0$.

Návod: Riešte najprv úlohu

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u_\delta(0,t) = u_\delta(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0 \\ \frac{I}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0, & x_0 + \delta < x < \infty, \quad \rho > 0, \quad \delta > 0 \end{cases}$$

Riešenie pôvodnej úlohy má tvar $u(x,t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x,t)$.

§4. FOURIEROVA METÓDA RIEŠENIA ZAČIATOČNO-OKRAJOVÝCH ÚLOH

Podstata Fourierovej metódy spočíva vo vyjadrení predpokladaného riešenia začiatočno-okrajovej úlohy v tvare Fourierovho radu podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií eliptického operátora L .

4.1 Parabolická rovnica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,t); \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (4.2)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s,t) + \beta(s)u(s,t) = 0; \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

Predpokladajme, že existuje riešenie u úlohy (4.1), (4.2), (4.3).

Pri pevnom $t > 0$ je funkcia $u(.,t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkciou z priestoru $L_2(\Omega)$ a môžeme ju vyjadriť ako súčet Fourierovho radu podľa úplného ortogonálneho systému vlastných funkcií eliptického operátora L s okrajovou podmienkou (4.3):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x); \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.4)$$

$$Lw_k = \lambda_k w_k; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial w_k}{\partial n_A}(s,t) + \beta(s)w_k(s,t) = 0; \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

Predpokladajme, že funkcionálny rad (4.4) môžeme derivovať člen po člene a dosadíme ho do rovnice (4.1) so začiatočnou podmienkou (4.2). Dostaneme vzťahy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)w_k(x) + c_k(t)(Lw_k)(x) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [c_k'(t) + \lambda_k c_k(t)] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)w_k(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k(x)$$

kde $f_k(t)$, g_k ; $k = 1, 2, \dots$, sú Fourierove koeficienty funkcií $f(.,t)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$ vzhľadom na systém $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f_k(t) = \|w_k\|^{-2} \int_{\Omega} u_0(x) w_k(x) dx \quad (4.9)$$

$$g_k = \|w_k\|^{-2} \int_{\Omega} u_0(x) w_k(x) dx \quad (4.10)$$

$$\|w_k\|^2 = \int_{\Omega} w_k^2(x) dx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Porovnaním ľavých a pravých strán rovností (4.7), (4.8) dostaneme začiatočné úlohy pre Fourierove koeficienty - funkcie $c_k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t), \quad t > 0 \quad (4.12)$$

$$c_k(0) = g_k; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Riešenie úlohy (4.12), (4.13) má tvar

$$c_k(t) = g_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (4.14)$$

a porovnaním s (4.4) dostaneme nasledujúce vyjadrenie riešenia u úlohy (4.1), (4.2), (4.3):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} f_k(\tau) d\tau \right] e^{-\lambda_k t} w_k(x) \quad (4.15)$$

V prípade $f(x, t) = 0$ môžeme odvodiť riešenie v tvare

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{-\lambda_k t} w_k(x); \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

s metodou separácie premenných, pričom uskutočnime separáciu priestorových premenných x od časovej premennej t , t.j. predbežným vyjadrením

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Ďalší postup je analogický ako pri separácii premenných použitej na eliptické rovnice.

Príklad 4.1. Uvažujme úlohu o vedení tepla v tyči jednotkovej dĺžky pri danej začiatočnej teplote, nulovej teplote na koncoch tyče a bez vnútorných zdrojov tepla. Teda riešime začiatočno-okrajovú úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.17)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.18)$$

pričom predpokladáme, že $u_0 \in C^1(0, 1)$, $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

Podľa (4.15) má riešenie tvar

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{-(k\pi a)^2 t} \sin k\pi x; \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.19)$$

kde

$$g_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin k\pi x dx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

sú Fourierove koeficienty funkcie u_0 podľa úplného ortogonálneho v priestore $L_2(0, 1)$ systému $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$ vlastných funkcií operátora L ;

$$Lv = -a^2 \frac{d^2 v}{dx^2}; \quad v(0) = v(1) = 0; \quad \text{ktoré zodpovedajú vlastným hodnotám}$$

$$\lambda_k = (k\pi a)^2; \quad k = 1, 2, \dots$$

Ukážeme, že funkcionálny rad vo vzťahu (4.19) rovnomerne konverguje na množine $(0, 1) \times (0, \infty)$ ku (klasickému) riešeniu začiatočno-okrajovej úlohy (4.16), (4.17), (4.18).

Koeficienty g_k môžu byť vyjadrené po integrácii per partes aj v tvare

$$g_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 u_0'(x) \cos k\pi x dx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Potom platí odhad

$$|g_k| \leq \frac{1}{k^2 \pi^2} + \beta_k^2; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$