

gal
SLOVENSKÁ VYSOKÁ ŠKOLA TECHNICKÁ V BRATISLAVE

ELEKTROTECHNICKÁ FAKULTA

RNDr. Igor Bock, CSc.

MATEMATICKÁ FYZIKA



© RNDr. Igor Bock, CSc.

Lektori: RNDr. Vladimír Ďurikovič, CSc.
RNDr. Rudolf Kodnár, CSc.

Vydala Slovenská vysoká škola technická v Bratislave v Edičnom stredisku SVŠT, Bratislava, Gottwaldovo nám. 17.

Za odbornú a ideologickú náplň tohto vydania zodpovedá Doc. RNDr. Ján Gatiaľ, CSc., vedúci Katedry matematiky.

Schválil rektor Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave dňa 24.5. 1985, č. 3223/85 ako skriptá pre Elektrotechnickú fakultu, študijné odbory: Elektrotechnológia, Elektroenergetika.

Úvod

Zostavovanie a skúmanie matematických modelov fyzikálnych javov tvorí podstatu predmetu matematická fyzika. Matematická fyzika sa rozvíja od 17. storočia súčasne s rozvojom matematiky a fyziky. Podkladom tohto rozvoja bol vznik diferenciálneho a integrálneho počtu (I. Newton, G. Leibniz) a Newtonom sformulované zákony klasickej mechaniky. Metódy matematickej fyziky sa začínajú vytvárať v 18. storočí pri skúmaní úloh o kmitení struny a tyče, ako aj úloh akustiky a hydrodynamiky; kladú sa základy klasickej mechaniky (J. d'Alembert, L. Euler, D. Bernoulli, J. Lagrange, P. Laplace). V 19. storočí dostáva matematická fyzika nové impulzy v súvislosti s úlohami vedenia tepla, difúzie, teórie pružnosti, teórie elektromagnetického poľa a potenciálu; súčasne dochádza k ďalšiemu rozvoju matematického aparátu najmä v oblasti vektorovej analýzy, Fourierových a ortogonálnych radov (J. Fourier, S. Poisson, K. Gauss, A. Cauchy, P. Dirichlet, G. Green, D. Stokes, S. Kovalevská, A. Poincaré, D. Hilbert). V 20. storočí do vývoja matematickej fyziky významne zasahuje kvantová mechanika, teória prenosu elementárnych častíc, fyzika plazmy; matematický aparát sa obohacuje o variačné metódy, teóriu distribúcií, široko sa využívajú metódy funkcionálnej analýzy (W. Fitz, B. G. Galerkin, P. Dirac, E. Fredholm, F. Riesz, S. L. Sobolev, L. Schwartz, R. Courant, J. Leray, J. L. Lions, L. Nirenberg, J. Nečas).

Väčšina uvedených matematických modelov má tvar parciálnej diferenciálnej rovnice. Je to tým, že skúmané deterministické procesy sú popísané časovými a priestorovými zmenami hľadanej funkcie a tým sa dostanú vzťahy medzi funkciou a jej deriváciami.

Podstatnú úlohu v teórii parciálnych diferenciálnych rovníc hrajú rovnice 2. rádu, ktoré modelujú širokú škálu fyzikálnych problémov. Metodika riešenia týchto rovníc je najviac rozpracovaná a čiastočne sa dá použiť aj na riešenie rovníc vyšších rádov a systémov rovníc. V priebehu celého textu sa preto obmedzíme len na lineárne parciálne diferenciálne rovnice 2. rádu.

Celá látka je rozdelená do troch kapitol.

I. kapitola je rozšírením poznatkov z diferenciálneho a integrálneho počtu, teórie Fourierových radov a obyčajných diferenciálnych rovníc nadobudnutých v priebehu predchádzajúceho štúdia (lit. [7], [8], [19], [20]). II. kapitola obsahuje metódy riešenia stacionárnych (od času nezávislých) a III. kapitola sa zaoberá riešením nestacionárnych (od času závislých) rovníc. Toto rozdelenie je dané nielen fyzikálnou odlišnosťou daných úloh, ale aj ich metodikou riešenia. Väčšina úloh sa bude riešiť metódami ortogonálnych radov a integrálnych reprezentácií. Čiastočne sa použijú aj metódy funkcionálnej analýzy.

nálnej analýzy. Čitateľom, ktorí by si chceli prehĺbiť poznatky z matematickej fyziky, odporúčam knihy a skriptá [1], [2], [6], [12], [13], [17], [18], [21], [22].

Dúfam, že predložené skriptum prispeje k lepšiemu pochopeniu prednášanej látky a vzbudí záujem aj o rozšírenie nadobudnutých poznatkov.

Je mojou milou povinnosťou poďakovať sa recenzentom RNDr. Vladimírovi Ďuríkovi, CSc. a RNDr. Rudolfovi Kodnárovi, CSc. za starostlivé prečítanie textu, ako aj za cenné rady a pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu jeho úrovne.

Bratislava v marci 1987

Autor

I. Vybrané kapitoly z matematickej analýzy

V tejto kapitole uvedieme niektoré výsledky z matematickej analýzy, ktoré budeme potrebovať najmä pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc analytickými metódami. Vzhľadom na pomocný charakter látky uvedieme časté výsledkov bez dôkazov, len s odvolaním sa na literatúru.

§1. NIEKTORÉ PRIESTORY FUNKCIÍ

V tejto časti si prehĺbime niektoré poznatky z diferenciálneho a integrálneho počtu funkcií viac premenných s dôrazom na vhodné rozdelenie funkcií podľa ich vlastností.

1.1 Priestory spojitých a diferencovateľných funkcií

Symbolom Ω budeme označovať oblasť v priestore R^m , $m \geq 1$. Pripomeňme si, že oblasť je otvorená súvislá množina, t.j. jej ľubovoľné dve body môžeme spojiť lomenou čiarou, ktorá sa v nej celá nachádza. $\partial\Omega$ označuje hranicu a $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ uzáver oblasti Ω . Číslo $|x - y| = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2]^{1/2}$ je vzdialenosť bodov $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$.

Symbolom

$$C(\Omega)$$

označujeme množinu všetkých funkcií spojitých na množine Ω a symbolom

$$C^k(\Omega)$$

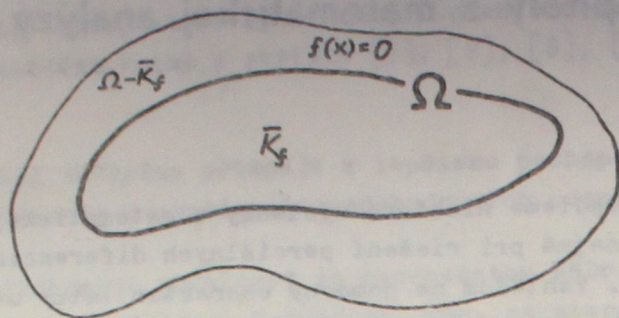
množinu všetkých funkcií k-krát spojitely diferencovateľných na množine Ω .

$C^\infty(\Omega)$ bude označovať množinu všetkých funkcií ľubovoľne veľakrát spojitely diferencovateľných na Ω .

V teórii parciálnych diferenciálnych rovníc má dôležitú úlohu množina

$$C_0^\infty(\Omega)$$

všetkých tých funkcií $f \in C_0^\infty(\Omega)$, pre ktoré existuje taká ohraňovaná uzavretá podmnožina $\bar{K}_f \subset \Omega$, že $f(x) = 0$ pre každé $x \in (\Omega \setminus \bar{K}_f)$. Ak má množina Ω neprázdnu hranicu, je funkcia rovná nule v istom okolí hranice $\partial\Omega$ (obr. 1).



Obr. 1
Tvar množiny K_f, \bar{K}_f

Predpokladajme teraz, že oblasť Ω je ohraničená.

Symbolom

$$C(\bar{\Omega})$$

označujeme množinu všetkých funkcií definovaných a spojitých na uzávere Ω oblasti Ω . Pre funkcie $f \in C(\bar{\Omega})$ existuje (konečné) nezáporné číslo

$$\|f\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|,$$

ktoré sa nazýva norma funkcie $f \in C(\bar{\Omega})$. Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C(\bar{\Omega})$, rovnomerne konverguje k funkcii $f \in C(\bar{\Omega})$ na množine $\bar{\Omega}$ práve vtedy, keď $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_C = 0$

Ak k je prirodzené číslo, potom symbol

$$C^k(\bar{\Omega})$$

označuje podmnožinu všetkých tých funkcií $f \in C^k(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, ktorých všetky parciálne derivácie až do rádu k vrátane možno spojiť rozšíriť z oblasti Ω na hranicu $\partial\Omega$.

Nakoniec ešte zavedieme množinu $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\bar{\Omega})$.

1.2 Priestory integrovateľných funkcií

V tejto časti, ako aj v celom skripte budeme uvažovať funkcie integrovateľné v Lebesguovom¹⁾ zmysle na množinách lebesguovsky merateľných. Nebudeme sa zaoberať presnými definíciami (napr. [14], [16]), stačí, keď si uvedomíme, že každá jordanovsky merateľná množina je merateľná aj lebesguovsky

¹⁾ LEBESGUE Henri Leon (1875-1941), francúzsky matematik, člen francúzskej akadémie vied, zostrojil novú teóriu integrálu, vďaka ktorej možno integrovať veľmi širokú triedu funkcií.

a každá riemannovsky integrovateľná funkcia je integrovateľná aj lebesguovsky, pričom obe integrály sú totožné. Lebesguov integrál zahŕňa aj nevlastné Riemannove integrály.

Množinu tých funkcií $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré je (Lebesguov) integrál

$$\int_{\Omega} [f(x)]^2 dx < \infty$$

označíme symbolom

$$L_2(\Omega)$$

Z teórie Lebesguovho integrálu vyplýva, že $L_2(\Omega)$ je lineárny priestor, t.j. pre ľubovoľné funkcie $f, g \in L_2(\Omega)$ je aj $\alpha f + \beta g \in L_2(\Omega)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ako nulovú funkciu v $L_2(\Omega)$ uvažujeme každú funkciu, ktorá je rovná nule takmer všade, t.j. môže byť nenulová na množine miery nula (napr. konečná, alebo spočítateľná množina bodov v \mathbb{R}^m , po častiach hladká krivka v \mathbb{R}^m , po častiach hladká plocha v \mathbb{R}^3). Funkcie, ktoré sa líšia len na množine miery nula, považujeme za rovnaké.

Skalárnym súčinom funkcií $f, g \in L_2(\Omega)$ nazývame číslo

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Uvedený integrál je konečný na základe nerovnosti $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$,

$a, b \in \mathbb{R}$, do ktorej dosadíme $a = f(x)$, $b = g(x)$ a novú nerovnosť zintegrujeme cez oblasť Ω .

Ľahko sa presvedčíme, že skalárny súčin funkcií má tieto vlastnosti:

- (i) $(f, g) = (g, f)$ (symetria)
- (ii) $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$ (homogénosť)
- (iii) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (distributívosť)
- (iv) $(f, f) \geq 0$; $(f, f) = 0$ práve vtedy, keď $f = 0$
pre ľubovoľné funkcie $f, g, h \in L_2(\Omega)$ a čísla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nezáporné číslo

$$\|f\|_{L_2} = (f, f)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}$$

sa nazýva norma funkcie $f \in L_2(\Omega)$.

Pre ľubovoľné funkcie $f, g \in L_2(\Omega)$ platí veľmi dôležitá Schwarzova²⁾ (v literatúre aj Cauchyho³⁾-Buňakovského⁴⁾ nerovnosť

²⁾ SCHWARZ Hermann Amendus (1843-1921), nemecký matematik, najvýznamnejšie práce má v teórii trigonometrických radov a analytických funkcií. Dokázal existenciu konformného zobrazenia ľubovoľnej jednoducho súvislej oblasti na kruh.

$$|(f, g)| \leq \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2} \quad (1.1)$$

Nerovnosť (1.1) vyplýva zo vzťahov

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + 2\alpha (f, g) + \alpha^2 (g, g),$$

ktoré platia pre ľubovoľné $f, g \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ak $g = 0$, potom nerovnosť (1.1) platí ako rovnosť nule. V opačnom prípade položíme $\alpha = -\frac{(f, g)}{(g, g)}$.

Na základe vlastností skalárneho súčinu a Schwarzovej nerovnosti spĺňa norma funkcií tieto vlastnosti

- (i) $\|f\|_{L_2} \geq 0$, $\|f\|_{L_2} = 0$ práve vtedy, keď $f = 0$
- (ii) $\|\alpha f\|_{L_2} = |\alpha| \|f\|_{L_2}$ (homogénnosť)
- (iii) $\|f + g\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}$ (trojuholníková nerovnosť)

pre všetky $f, g \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Užitočná je aj nerovnosť

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$$

ktorá vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti, ak položíme g namiesto f a $f - g$ namiesto g . Poznámame, že vzťahy (i) - (iv) sa dajú dokázať na základe vlastností maxime aj pre normu $\|f\|_C$ funkcie $f \in C(\bar{\Omega})$. Na základe vlastností normy hovoríme, že množiny $L_2(\Omega)$, $C(\bar{\Omega})$ sú lineárne normované priestory.

Definícia 1.1. Hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z $L_2(\Omega)$ konverguje (v strede) k funkcii $f \in L_2(\Omega)$, ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_2} = 0 \quad (1.2)$$

Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z priestoru $C(\bar{\Omega})$ rovnomerne konverguje k funkcii f , potom tá istá postupnosť konverguje k f aj v strede, ako to vyplýva z nerovnosti $\|f_n - f\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (f_n - f)^2 dx \right)^{1/2} \leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} \max_{x \in \Omega} |f_n - f(x)|$,

kde $\text{mes } \Omega$ je miera (ohraničenej oblasti) Ω .

Poznámky z predchádzajúcej strany:

- 3) CAUCHY Augustin Louis (1789-1857), francúzsky matematik. Napísal vyše 700 prác zásadného významu pre rozvoj teórie funkcií reálnej a komplexnej premennej, nekonečných radov, teórie čísel, diferenciálnych rovníc.
- 4) RUŽAKOVSKIĬ Viktor Jakovlevič (1804-1889), ruský matematik, pracoval v oblasti teórie reálnych funkcií, teórie čísel a teórie pravdepodobnosti.

Na základe trojuholníkovej nerovnosti je každá konvergentná v $L_2(\Omega)$ postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyovská (v $L_2(\Omega)$), t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že

$$\|f_k - f_n\|_{L_2} < \varepsilon \quad \text{pre všetky } k, n > n_0$$

Mimoriadne dôležitá je nasledujúca vlastnosť priestoru $L_2(\Omega)$:

Veta 1.1. Priestor $L_2(\Omega)$ je úplný, t.j. každá Cauchyovská v $L_2(\Omega)$ postupnosť funkcií je v ňom konvergentná.

Dôkaz vety je náročný, používajú sa v ňom vlastnosti Lebesgueovej miery a Lebesgueovho integrálu. Možno ho nájsť napr. v knihe [16], alebo [5]. Uvedená veta je hlavnou príčinou, prečo v celom texte uvažujeme integrál v zmysle Lebesguea.

Užitočná je aj nasledujúca veta:

Veta 1.2. Skalárny súčin a norma sú spojité funkcie na priestore $L_2(\Omega)$, t.j. pre ľubovoľné postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnosťou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{L_2} = 0; \quad f, g \in L_2(\Omega) \quad (1.3)$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L_2} = \|g\|_{L_2} \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g_n) = (f, g) \quad (1.5)$$

Dôkaz: Vzťahy (1.4) vyplývajú priamo z (1.3) a vlastnosti (iv) normy. Na základe Schwartzovej nerovnosti (1.1) platia vzťahy

$$\begin{aligned} |(f_n, g_n) - (f, g)| &= |(f_n, g_n) - (f_n, g) + (f_n, g) - (f, g)| = \\ &= |(f_n, g_n - g) + (f_n - f, g)| \leq \\ &\leq \|f_n\|_{L_2} \|g_n - g\|_{L_2} + \|f_n - f\|_{L_2} \|g\|_{L_2} \end{aligned}$$

Postupnosť $\{\|f_n\|_{L_2}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, pretože má podľa (1.4) vlastnú limitu. Vzťah (1.5) potom vyplýva z poslednej nerovnosti a predpokladov (1.3).

Priestor $L_2(\Omega)$ obsahuje dosť širokú triedu funkcií napr. aj neohraničené na množine Ω funkcie, ako to vyplýva z úlohy 1.1. Nasledujúca veta hovorí, že neopak, každú funkciu z priestoru $L_2(\Omega)$ možno s ľubovoľnou presnosťou aproximovať v norme $\|\cdot\|_{L_2}$ funkciami z množiny $C_0^{\infty}(\Omega)$, teda takými funkciami, ktoré sú nekonečne veľakrát diferencovateľné na Ω a nenulové len na ohraničených uzavretých podmnožinách oblasti Ω .

Veta 1.3. Množina funkcií $C_0^\infty(\Omega)$ je hustá v priestore $L_2(\Omega)$, t.j. pre každú funkciu $f \in L_2(\Omega)$ a každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje funkcia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ taká, že

$$\|f - \varphi\|_{L_2} < \varepsilon$$

Dôkaz vety je založený na nahradení funkcie f funkciou, ktorá je rovná nule na dostatočne malom páse okolo hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω a jej "zhladzovanie" nekonečne veľakrát diferencovateľnými funkciami (pozri napr. v [5], [11]).

Veľmi užitočný je nasledujúci dôsledok vety 1.3.

Dôsledok 1.1. Ak funkcia $f \in L_2(\Omega)$ spĺňa vzťah

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \text{pre všetky } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.6)$$

potom $f = 0$ takmer všade na Ω .

Dôkaz: Na základe vety 1.3 pre každú funkciu $f \in L_2(\Omega)$ existuje postupnosť funkcií $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots$, taká, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L_2} = 0$$

Použitím vety 1.2 o spojitosti skalárneho súčinu dostaneme vzťahy

$$\int_{\Omega} f^2(x) dx = \|f\|_{L_2}^2 = (f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a teda funkcia f je rovná nule takmer všade na Ω .

5) Z teórie trigonometrických Fourierových radov vieme, že každú spojitú funkciu $f: \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$; a po častiach spojitou prvou deriváciou možno vyjadriť v tvare Fourierovho radu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

ktorý rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ k funkcii f .

5) **FOURIER** Jean Baptiste Joseph (1768-1830), francúzsky matematik, jeden zo zakladateľov matematickej fyziky. Jeho základné práce sa týkajú teórie vedenia tepla a parciálnych diferenciálnych rovníc. Odvodil rovnice vedenia tepla a metódy jej riešenia. Rozpracoval teóriu o rozvoji funkcií do trigonometrických radov.

Ak $f \in L_2(0, 2\pi)$, potom daný Fourierov rad konverguje k funkcii f v strede na intervale $(0, 2\pi)$. Uvedená vlastnosť môže byť prenesená aj do priestoru $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Definícia 1.2. Postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z priestoru $L_2(\Omega)$ sa nazýva ortogonálny systém, ak pre všetky k, n je

$$(u_k, u_n) = \int_{\Omega} u_k(x) u_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ak } k \neq n \\ 1, & \text{ak } k = n. \end{cases}$$

Ak navyše $(u_n, u_n) = \|u_n\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} u_n^2(x) dx = 1$, nazýva sa $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonálny systém.

Definícia 1.3. Nech $f \in L_2(\Omega)$ a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonálny systém v $L_2(\Omega)$. potom čísla

$$c_n = \frac{(f, u_n)}{\|u_n\|_{L_2}^2} = \left(\int_{\Omega} u_n^2(x) dx \right)^{-1} \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sa nazývajú Fourierove koeficienty a funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{L_2}^{-2} (f, u_n) u_n(x)$$

Fourierov rad funkcie f podľa systému $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 1.4. Ortogonálny systém $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva úplný (v úriestore $L_2(\Omega)$), ak Fourierov rad každej funkcie $f \in L_2(\Omega)$ podľa systému $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $L_2(\Omega)$ k funkcii f , t.j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - f(x)\|_{L_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} (s_n(x) - f(x))^2 dx \right]^{1/2} = 0$$

kde

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x) = \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{L_2}^{-2} (f, u_k) u_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Uvedieme si ešte nasledujúcu vetu o konvergencii ortogonálnych radov:

Veta 1.5. Nech $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormálny systém v $L_2(\Omega)$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ľubovoľná postupnosť reálnych čísel. Potom nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

konvergoval v $L_2(\Omega)$, je, aby číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ konvergoval.

Dôkaz: Nech $s_n = \sum_{k=1}^n c_k u_k$, $n = 1, 2, \dots$. Pre $m < n$ máme vzťahy

$$\|s_n - s_m\|_{L_2}^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k u_k \right\|_{L_2}^2 = \left(\sum_{k=m+1}^n c_k u_k, \sum_{k=m+1}^n c_k u_k \right) = \sum_{k=m+1}^n c_k^2$$

Pretože priestor $L_2(\Omega)$ je úplný, je postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná v $L_2(\Omega)$ práve vtedy, keď je cauchyovská. Na základe predchádzajúcich vzťahov je cauchyovská práve vtedy, keď je cauchyovská a teda aj konvergentná postupnosť čiastočných súčtov číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, čím je dôkaz skončený.

Poznámka 1.1. Ak systém $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ortonormálny, ale len ortogonálny v $L_2(\Omega)$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ konverguje v $L_2(\Omega)$ práve vtedy, keď konverguje číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n u_n\|_{L_2}^2$.

Zavedieme si ešte jeden priestor integrovateľných funkcií, ktorý má všeobecnejší charakter ako priestor $L_2(\Omega)$.

Nech $\varrho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je kladná a ohraničená funkcia. Symbolom

$$L_{2,\varrho}(\Omega)$$

označujeme množinu všetkých funkcií $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré

$$\int_{\Omega} \varrho(x) [f(x)]^2 dx < \infty$$

Aj $L_{2,\varrho}(\Omega)$ je úplný priestor so skalárnym súčinom

$$(f, g)_{\varrho} = \int_{\Omega} \varrho(x) f(x) g(x) dx$$

a normou

$$\|f\|_{L_{2,\varrho}} = (f, f)_{\varrho}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \varrho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

Priestor $L_2(\Omega)$ je špeciálnym prípadom priestoru $L_{2,\varrho}(\Omega)$ s funkciou $\varrho \equiv 1$. Funkcia ϱ sa nazýva váhová funkcia a $L_{2,\varrho}(\Omega)$ váhový priestor. Aj v priestore $L_{2,\varrho}(\Omega)$ možno zaviesť ortogonálne systémy funkcií a Fourierove rady analogicky ako v $L_2(\Omega)$.

1.3 Integrál po hranici oblasti

Keďže okrajové úlohy pre parciálne diferenciálne rovnice budeme uvažovať v m -rozmerovom priestore, je užitočné zaviesť integrál po hranici oblasti, ktorý v prípade $m = 2$ je totožný s krivovým a v prípade $m = 3$ s plošným integrálom prvého druhu.

Kvôli analytickému popisu hranice si zavedieme najprv istú triedu spojitých funkcií.

Definícia 1.5. Funkcia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^m$ sa nazýva lipschitzovsky⁶⁾ spojitá na množine K , ak existuje (Lipschitzova) konštanta L taká, že

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{pre všetky } x, y \in K$$

Na základe Lagrangeovej⁷⁾ vety o prírastku funkcie je každá funkcia $f \in C^1(K)$ s ohraničenými parciálnymi deriváciami $\frac{\partial f}{\partial x_i} : K \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$; na množine K lipschitzovsky spojitá. Lipschitzovsky spojité sú aj také funkcie jednej premennej, ktorých derivácia v konečnom počte bodov neexistuje, ale existujú v nich derivácie zľava a sprava ako napríklad funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Funkcia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; nie je lipschitzovsky spojitá na žiadnom intervale $(0, a)$, $a > 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = +\infty$.

Definícia 1.6. Oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sa nazýva lipschitzovská (s lipschitzovskou hranicou), ak existujú kladné čísla α, β , konečný počet k karteziánskych systémov súradníc $(x_1^{(r)}, \dots, x_{m-1}^{(r)}, x_m^{(r)}) = (\bar{x}^{(r)}, x_m^{(r)})$, $r = 1, \dots, k$; a k funkcií $\alpha_r : K_r \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzovsky spojitých na $(m-1)$ -rozmerných kockách

$$K_r = \{ \bar{x}^{(r)} : |x_i^{(r)}| < \alpha, i = 1, \dots, m-1 \}$$

tak že

- a) každý bod x hranice $\partial\Omega$ možno vyjadriť aspoň v jednom z uvažovaných k systémov súradníc v tvare

- 6) LIPSCHITZ Rudolf Otto Sigismund (1832-1903), nemecký matematik. Pracoval hlavne v teórii čísel a funkcií. Sformuloval vetu o existencii riešenia začiatočnej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu, v teórii funkcií zaviedol dostatočnú podmienku konvergenzie Fourierových radov.
- 7) LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813), francúzsky matematik, člen francúzskej akadémie. Pracoval v mechanike, geometrii, matematickej analýze, algebre, teórii čísel. Zaviedol analytické riešenie úloh mechaniky. V teórii funkcií našiel formuly zvyšku v Taylorovom rade, rozpracoval teóriu viazaných extrémov.

$$x = [x_1^{(r)}, \dots, x_m^{(r)}; a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{m-1}^{(r)})] = [\bar{x}^{(r)}, a_r(\bar{x}^{(r)})]$$

b) body $x = [\bar{x}^{(r)}, x_m^{(r)}]$, pre ktoré je $\bar{x}^{(r)} \in K_r$

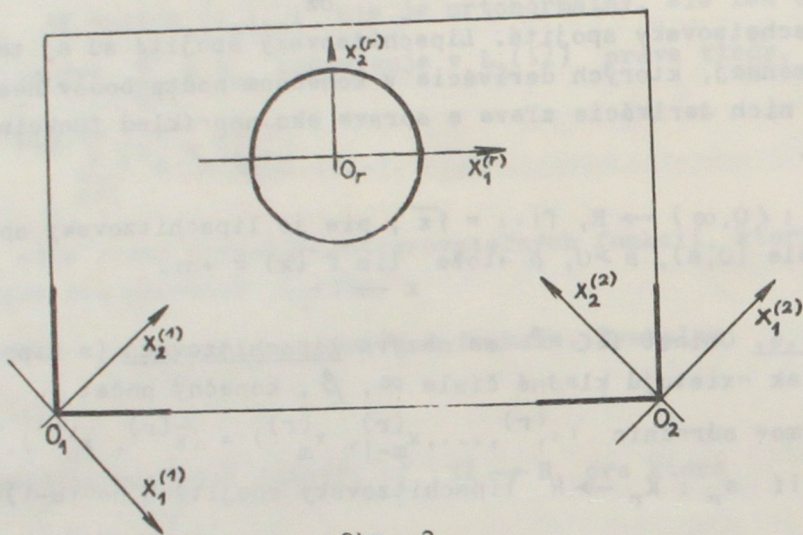
$$a_r(\bar{x}^{(r)}) < x_m^{(r)} < a_r(\bar{x}^{(r)}) + \beta,$$

resp.

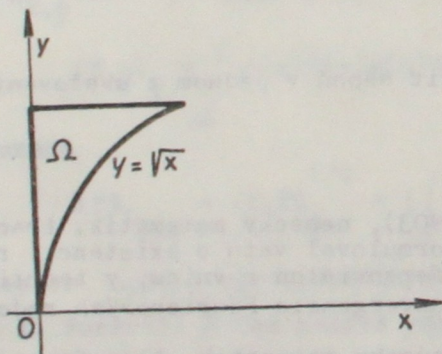
$$a_r(\bar{x}^{(r)}) - \beta < x_m^{(r)} < a_r(\bar{x}^{(r)})$$

ležia v oblasti Ω , resp. v množine $R^m - \bar{\Omega}$.

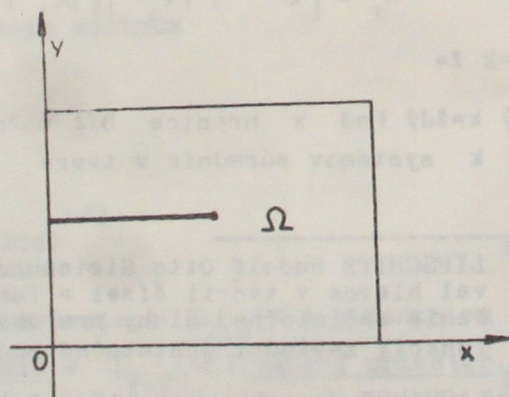
Ak sa nebude spomínať iná vlastnosť hranice $\partial\Omega$, budeme uvažovať len lipschitzovské oblasti (obr. 2). Patrí medzi ne napríklad vnútro, alebo vonkajšok mnohouholníka, kruhu, medzikružie v rovine R^2 ; vnútro alebo vonkajšok mnohostenu, gule, valca, kužela v priestore R^3 .



Obr. 2
Lipschitzovská oblasť



Obr. 3
Nelipschitzovská oblasť



Obr. 4
Nelipschitzovská oblasť s výrezom

Na obrázkoch 3, 4 sú oblasti, ktoré nie sú lipschitzovské. V jednom prípade vrchol P a jeho okolie nemožno vyjadriť pomocou lipschitzovsky spojitých

funkcie, v druhom prípade na reze oblasťou Ω nemožno splniť požiadavku b) z definície 1.6.

Ak funkcie $a_r : K_r \rightarrow R$ vystupujúce v predchádzajúcej definícii sú nekonečne veľakrát diferencovateľné, budeme hovoriť, že Ω je oblasť s hladkou hranicou. Také oblasti sú kruh, guľa, ale nie mnohouholník, mnohosten, valec, kužeľ.

Možno ukázať ([11], [15]), že lipschitzovsky spojité funkcie a_r popisujúce hranicu $\partial\Omega$ majú takmer všade na K_r ohrozené a integrovateľné partiálne derivácie 1. rádu podľa všetkých premenných. Táto okolnosť umožňuje zaviesť integrál funkcie definovanej na hranici $\partial\Omega$.

Definícia 1.7. Nech $f : \partial\Omega \rightarrow R$ je funkcia definovaná na hranici $\partial\Omega$ lipschitzovskej oblasti Ω . Nech existujú také podoblasti K_r' kociek K_r , že hranica $\partial\Omega$ môže byť vyjadrená v tvare

$$\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^k \bar{\Gamma}_r; \bar{\Gamma}_i \cap \bar{\Gamma}_j = \emptyset \text{ pre všetky } i \neq j$$

kde

$$\bar{\Gamma}_r = \{x \in \partial\Omega : x = [\bar{x}^{(r)}, a_r(\bar{x}^{(r)})], \bar{x}^{(r)} \in K_r'\}; r = 1, \dots, k$$

Ak čísla

$$\int_{\bar{\Gamma}_r} f(s) ds = \int_{K_r'} f(\bar{x}^{(r)}, a_r(\bar{x}^{(r)})) \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_i^{(r)}} \right)^2 \right]^{1/2} d\bar{x}^{(r)}$$

sú konečné, potom hovoríme, že funkcia f je (lebesguovsky) integrovateľná na $\partial\Omega$ a číslo

$$\int_{\partial\Omega} f(s) ds = \sum_{r=1}^k \int_{\bar{\Gamma}_r} f(s) ds$$

je jej integrál po hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω .

V prípade $m = 2$, resp. $m = 3$ je takto zavedený integrál zhodný s krivkovým, resp. plošným integrálom prvého druhu zavedenými v klasickej analýze ([8]).

Ak Γ je časť hranice $\partial\Omega$, potom definujeme integrál funkcie $f : \Gamma \rightarrow R$ na množine Γ vzťahom

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_{\partial\Omega} f_0(s) ds$$

kde $f_0 : \partial\Omega \rightarrow R$ je funkcia definovaná vzťahmi

$$f_0(s) = \begin{cases} f(s), & \text{ak } s \in \Gamma \\ 0, & \text{ak } s \in \partial\Omega - \Gamma \end{cases}$$

Pomocou integrálu po časti Γ hranice $\partial\Omega$ lipschitzovskej oblasti Ω zavedieme priestor

$$L_2(\Gamma)$$

všetkých funkcií $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, ktorých druhá mocnina je integrovateľná na množine Γ . $L_2(\Gamma)$ je opäť úplný priestor so skalárnym súčinom

$$(f, g)_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} f(s)g(s)ds$$

a normou

$$\|f\|_{L_2(\Gamma)} = (f, f)_{L_2(\Gamma)}^{1/2} = \left(\int_{\Gamma} f^2(s)ds \right)^{1/2}$$

Pretože funkcie $a_r: K_r \rightarrow \mathbb{R}$ popisujúce hranicu $\partial\Omega$ oblasti Ω majú takmer všade na K_r parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných, existuje takmer všade na $\partial\Omega$ jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$.

Ak bod $P \in \partial\Omega$ je vyjadrený v tvare $P = [\bar{p}^{(r)}, a_r(\bar{p}^{(r)})]$, pričom funkcia $a_r: K_r \rightarrow \mathbb{R}$ má v bode $\bar{p}^{(r)} \in K_r$ parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných, potom v bode P existuje jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$, ktorý má v (lokálnej) sústave súradníc $[\bar{x}^{(r)}, x_m^{(r)}]$ tvar

$$\bar{y} = |\bar{b}|^{-1} \bar{b}$$

$$\bar{b} = \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_1^{(r)}}(\bar{p}^{(r)}), \dots, \frac{\partial a_r}{\partial x_{m-1}^{(r)}}(\bar{p}^{(r)}), -1 \right)$$

Ďalej budeme označovať

$$\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$$

jednotkový vektor vonkajšej normály k $\partial\Omega$ so súradnicami vzhľadom na prvénu súradnicovú sústavu x_1, \dots, x_m .

Veta 1.4. (Gaussova⁸⁾ - Ostrogradského⁹⁾ formula). Nech Ω je ohraničená lipschitzovská oblasť, $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorová funkcia so zložkami $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, m$. Potom platí formula

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{f} dx = \int_{\partial\Omega} \bar{f} \cdot \bar{n} ds \quad (1.7)$$

kde $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω .

Formula (1.10) je pre $m = 2$, $m = 3$ dokázaná za silnejších predpokladov v ([8]). Pre ľubovoľné m je veta dokázaná v [15] pod názvom Greenova¹⁰⁾ formula, ktorá sa obyčajne používa pre $m = 2$.

Ak položíme v (1.7) $f_i = uv$, $f_j = 0$ pre $j \neq i$, máme

Dôsledok 1.2. (Integrácia per partes pre množné integrály.) Nech $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Potom platí vzťah

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i ds, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.8)$$

kde $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$ ohraničenej oblasti Ω .

1.3 Úlohy

1. Dokážte, že funkcia f daná predpisom $f(x) = \ln|x|$, ak $x \neq \bar{0}$, $f(\bar{0}) = 0$ patrí do priestoru $L_2(\Omega)$, kde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m, |x| < a\}$, $m \leq 3$. Vypočítajte jej normu.
2. Zistite pre aké hodnoty α patrí funkcia daná predpisom $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ do priestoru $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, ak a) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m, |x| < a\}$, b) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m, |x| > a > 0\}$. Vypočítajte jej normu.

- 8) GAUSS Carl Fridrich (1777-1855), nemecký matematik, astronóm. Pracoval v teórii čísel, vyššej algebre, diferenciálnej geometrii, astronómii, geodézii, fyzike. Dokázal základnú vetu algebry, rozpracoval novú aritmetickú teóriu kvadratických plôch. V súvislosti s astronomickými výpočtami skúmal konvergenciu nekonečných radov. Zaviedol pojem krivosti plochy.
- 9) OSTROGRADSKIJ Michail Vasilievič (1801-1862), ruský matematik a mechanik. Pracoval v analytickej a nebeskej mechanike, matematickej fyzike, matematickej analýze. Odvodil formuly na výpočet neurčitých integrálov z racionálnych funkcií a transformáciu objemového integrálu na plošný.
- 10) Green George (1793-1841), anglický matematik a fyzik. Zaviedol pojem potenciálu v teórii elektromagnetizmu, odvodil formulu na výpočet krivkového integrálu pomocou dvojného. Odvodil základné rovnice teórie pružnosti.