

$$f_{mn}^s = \frac{2 \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r f(r, \varphi) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \sin n\varphi d\varphi}{\pi \rho^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}$$

Pre druhú mocninu normy funkcií  $u_{mn}$ ,  $u_{mn}^c$ ,  $u_{mn}^s$  sme použili vzťahy (3.62) ako aj vzorce I. (2.26). I. (2.28) z teórie Besselových funkcií:

$$\|u_{m0}\|^2 = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r J_0^2 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho} r \right) dr d\varphi = \pi \rho^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})$$

$$\|u_{nm}^c\|^2 = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r J_n^2 \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \cos^2 n\varphi dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \rho^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}) \quad (3.68)$$

$$\|u_{mn}^s\|^2 = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r J_n^2 \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \sin^2 n\varphi dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \rho^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})$$

$m, n = 1, 2, \dots$

**Poznámka 3.3.** Vzorec (3.66) sa podstatne zjednoduší, ak funkcie  $f$  na pravej strane rovnice (3.64) závisí len od vzdialenosti od začiatku súradnej sústavy, t.j.  $f(r, \varphi) \equiv f(r)$ . V tomto prípade máme

$$f_{mn}^c = f_{mn}^s = 0, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

a teda

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\rho} r f(r) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho} r \right) dr}{\rho^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho} r \right) \quad (3.69)$$

### 3.3 Riešenie okrajových úloh a úloh na vlastné hodnoty pre valec

Budeme sa zaoberať úlohami na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ :

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < \rho^2, 0 < z < d\}$$

a) Píšme Dirichletovu okrajovú úlohu:

$$\Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega$$

(3.70)

$$u(x, y, 0) = u(x, y, d) = 0, \quad x^2 + y^2 < \rho^2 \quad (3.71)$$

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \quad 0 < z < d \quad (3.72)$$

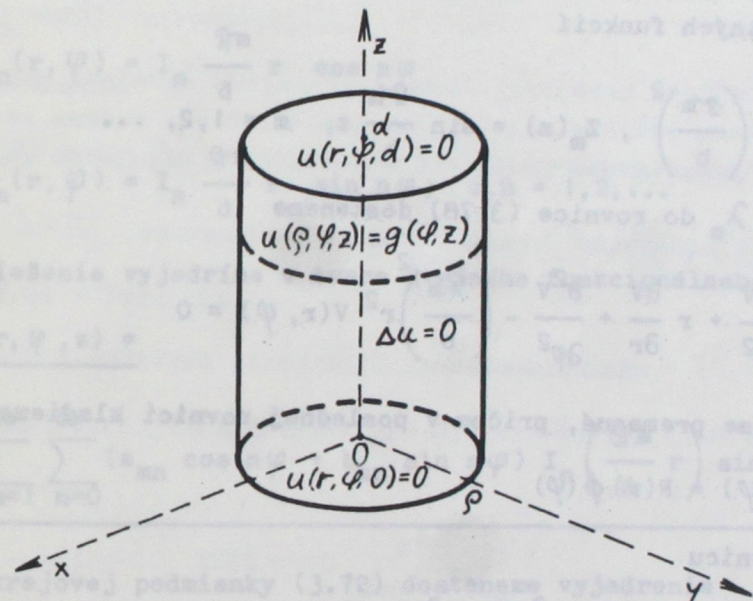
Úlohu (3.70), (3.71), (3.72) vyjadríme v cylindrických súradniciach:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.73)$$

$$0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d$$

$$u(r, \varphi, 0) = u(r, \varphi, d) = 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.74)$$

$$u(\rho, \varphi, z) = g(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d \quad (3.75)$$



Obr. 9  
Oblasť riešenia úlohy (3.73), (3.74), (3.75)

Kvôli spojitosti riešenia budeme predpokladať, že funkcia  $g$  spĺňa podmienky:

$$g(\varphi, 0) = g(\varphi, d) = 0 \quad (3.76)$$

Riešenie  $u$  hľadáme najprv v tvare

$$u(r, \varphi, z) = V(r, \varphi) Z(z) \quad (3.77)$$

(Premennú  $z$  separujeme ako prvú vzhľadom na nulové okrajové podmienky na základni a vrchu valca.) Dosadením výrazu (3.77) do rovnice (3.73) a separáciou dostaneme vzťahy



$$\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}}{v(r, \varphi)} = - \frac{z''(z)}{Z(z)} = \lambda$$

a ďalšou úpravou s použitím podmienok (3.74) máme rovnice

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \lambda v = 0, \quad 0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.78)$$

$$z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < d \quad (3.79)$$

$$Z(0) = Z(d) = 0 \quad (3.80)$$

Riešením úlohy (3.79), (3.80) je postupnosť vlastných hodnôt a im zodpovedajúcich vlastných funkcií

$$\lambda_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad Z_m(z) = \sin \frac{\pi m}{b} z, \quad m = 1, 2, \dots$$

Dosadením  $\lambda = \lambda_m$  do rovnice (3.78) dostaneme

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 r^2 v(r, \varphi) = 0 \quad (3.81)$$

Opäť separujeme premenné, pričom v poslednej rovnici kladieme

$$v(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$$

Dostaneme rovnicu

$$r^2 R'' + r R' - \left[\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 r^2 + \mu\right] R(r) = 0, \quad 0 < r < \rho, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (3.82)$$

a úlohu na vlastné hodnoty

$$\phi'' + \mu \phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.83)$$

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.84)$$

ktorá má riešenia:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \quad \phi_0(\varphi) = 1 \\ \mu_n &= n^2, \quad \phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.85)$$

Dosadením do rovnice (3.82) máme rovnicu

$$r^2 R'' + r R' - \left[\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 r^2 + n^2\right] R(r) = 0, \quad 0 < r < \rho \quad (3.86)$$

Riešenia rovnice (3.86), ohraňované na intervale  $\langle 0, \rho \rangle$  sú modifikované Besselove funkcie 1. druhu, pretože koeficient pri výraze  $r^2 R(r)$  je záporný (pozri I. §2.2, (2.31), (2.32)). Teda riešenia majú tvar:

$$R \equiv R_{mn}(r) = I_n\left(\frac{\pi m}{d} r\right), \quad 0 < r < \rho \quad (3.87)$$

a riešenia rovnice (3.81) spĺňajúce podmienku ohraňovanosti v okolí nulového bodu a periodickosti  $v(r, 0) = v(r, 2\pi)$  majú tvar:

$$v_{m0}(r, \varphi) = I_0\left(\frac{\pi m}{d} r\right)$$

$$v_{mn}^c(r, \varphi) = I_n\left(\frac{\pi m}{d} r\right) \cos n\varphi$$

$$v_{mn}^s(r, \varphi) = I_n\left(\frac{\pi m}{d} r\right) \sin n\varphi; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Výsledné riešenie vyjadríme v tvare dvojného funkcionálneho radu

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos n\varphi + b_{mn} \sin n\varphi) I_n\left(\frac{\pi m}{d} r\right) \sin \frac{\pi m}{d} z \end{aligned} \quad (3.88)$$

Využitím okrajovej podmienky (3.72) dostaneme vyjadrenie

$$g(\varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos n\varphi + b_{mn} \sin n\varphi) I_n\left(\frac{\pi m}{d} \rho\right) \sin \frac{\pi m}{d} z$$

a teda čísla  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  môžeme vyjadriť pomocou Fourierových koeficientov funkcie  $g$  podľa ortogonálneho na množine  $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, d \rangle$  systému funkcií:

$$\begin{aligned} &\left\{ \sin \frac{\pi m}{d} z, \cos n\varphi \sin \frac{\pi m}{d} z, \sin n\varphi \sin \frac{\pi m}{d} z \right\}_{m,n=1}^{\infty} \\ a_{m0} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^d g(\varphi, z) \sin \frac{\pi m}{d} z \, d\varphi \, dz}{d I_0\left(\frac{\pi m}{d} \rho\right)} \end{aligned}$$



$$a_{mn} = \frac{2 \int_0^{2\pi} \int_0^d g(\varphi, z) \cos n\varphi \sin \frac{\pi m}{d} z \, d\varphi \, dz}{d I_n \left( \frac{\pi m}{d} \varrho \right)}$$

$$b_{mn} = \frac{2 \int_0^{2\pi} \int_0^d g(\varphi, z) \sin n\varphi \sin \frac{\pi m}{d} z \, d\varphi \, dz}{d I_n \left( \frac{\pi m}{d} \varrho \right)}$$

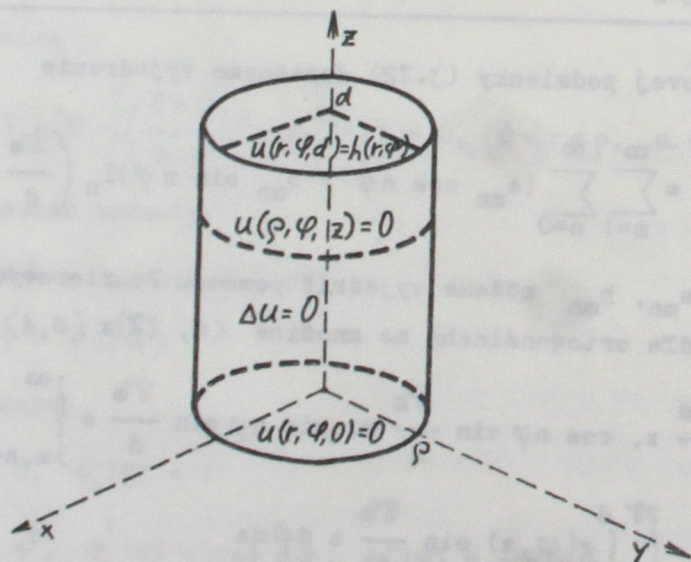
$$m, n = 1, 2, \dots$$

b) V predchádzajúcej okrajovej úlohe boli nulové okrajové podmienky na základni a vrchu valca a nenulové na plášti. Teraz budeme riešiť úlohu s nulovými podmienkami na plášti a základni a nenulovou na povrchu valca:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.89)$$

$$u(r, \varphi, 0) = u(\varrho, \varphi, z) = 0 \quad (3.90)$$

$$u(r, \varphi, d) = h(r, \varphi), \quad 0 < r < \varrho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d \quad (3.91)$$



Obr. 10  
Oblasť riešenia úlohy (3.89), (3.90), (3.91)

Riešenie hľadáme v tvare

$$u(r, \varphi, z) = W(r, z) \phi(\varphi)$$

a po separácii premenných dostaneme rovnice

$$r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + r \frac{\partial W}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \lambda W = 0; \quad 0 < r < \varrho, \quad 0 < z < d \quad (3.92)$$

$$\phi'' + \lambda \phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.93)$$

s podmienkou

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.94)$$

Riešeniami úlohy (3.93), (3.94) sú vlastné hodnoty

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a vlastné funkcie

$$\phi_0(\varphi) = 1, \quad \phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dosadením  $\lambda \equiv \lambda_n$  do rovnice (3.92) a ďalšou separáciou pri vyjadrení

$$W(r, z) = R(r) Z(z)$$

máme s využitím nulových okrajových podmienok úlohy:

$$r^2 R'' + r R' + (\mu r^2 - n^2) R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.95)$$

$$R(\varrho) = 0 \quad (3.96)$$

$$Z'' - \mu Z = 0, \quad Z(0) = 0 \quad (3.97)$$

Riešeniami úlohy (3.95), (3.96) sú rovnako ako to bolo v prípade úlohy (3.59), (3.60) vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$\mu_{mn} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} \right)^2, \quad R_{mn}(r) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right) \quad (3.98)$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

kde  $\mu_m^{(n)}$  je m-tý koreň rovnice  $J_n(r) = 0$ .

Riešeniami úlohy (3.97) sú po dosadení  $\mu \equiv \mu_{mn}$  funkcie

$$Z_{mn}(z) = \sinh \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} z$$

Aby sa splnila nenulová okrajová podmienka (3.91), musí mať hľadané riešenie úlohy (3.89), (3.90), (3.91) tvar



$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos n\varphi + b_{mn} \sin n\varphi) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \frac{\sinh \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} z}{\sinh \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} d} \quad (3.99)$$

kde  $a_{m0}, a_{mn}, b_{mn}$  sú Fourierove koeficienty funkcie  $h$  vzhľadom na systém

$$\left\{ J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho} r \right), J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \cos n\varphi, J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \sin n\varphi \right\}_{m,n=1}^{\infty}$$

ortogonálne na množine  $(0, \rho) \times (0, 2\pi)$  s váhou  $r$ :

$$a_{m0} = \frac{\int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r h(r, \varphi) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho} r \right) dr d\varphi}{\rho^2 \pi J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$

$$a_{mn} = \frac{2 \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r h(r, \varphi) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \cos n\varphi dr d\varphi}{\rho^2 \pi J_{n+1}^2(\mu_m^{(0)})}$$

$$b_{mn} = \frac{2 \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r h(r, \varphi) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} r \right) \sin n\varphi dr d\varphi}{\rho^2 \pi J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}$$

$m, n = 1, 2, \dots$

Ak v okrajových podmienkach (3.90), (3.91) je

$$u(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), u(r, \varphi, d) = 0$$

potom riešenie má ten istý tvar ako (3.99), len namiesto funkcií

$$\sinh \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} z \text{ budú funkcie } \sinh \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho} (d - z).$$

Pri nenulových podmienkach na celom povrchu valca treba sčítať predchádzajúce riešenia.

c) Úloha na vlastné hodnoty:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0 \quad (3.100)$$

$$u(\rho, \varphi, z) = u(r, \varphi, 0) = u(r, \varphi, d) = 0 \quad (3.101)$$

$$0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d$$

Riešenie rovnice (3.100) vyjadríme v tvare

$$u(r, \varphi, z) = U(r, \varphi) Z(z)$$

Po separácii premenných dostaneme úlohy

$$Z''(z) + \mu Z(z) = 0, \quad Z(0) = Z(d) = 0 \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + (\lambda - \mu) U = 0 \quad (3.103)$$

Už vieme, že riešením úlohy (3.102) je systém vlastných hodnôt a vlastných funkcií

$$\mu_m = \left( \frac{m\pi}{d} \right)^2, \quad Z_m(z) = \sin \frac{m\pi}{d} z, \quad m = 1, 2, \dots$$

Dosadením  $\mu \equiv \mu_m$  do (3.103) dostaneme ďalšiu úlohu na vlastné hodnoty v tvare

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \left[ \lambda - \left( \frac{m\pi}{d} \right)^2 \right] r^2 U = 0 \quad (3.104)$$

$$U(\rho, \varphi) = 0, \quad U(r, 0) = U(r, 2\pi) \quad (3.105)$$

$$0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Riešenie rovnice (3.104) hľadáme v tvare

$$U(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$$

Úloha (3.104), (3.105) sa rozpadne na dve úlohy:

$$\phi'' + \nu \phi = 0, \quad \phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.106)$$

$$r^2 R'' + r R' + \left[ \lambda - \left( \frac{m\pi}{d} \right)^2 \right] r^2 R(r) - \nu R(r) = 0 \quad (3.107)$$



$$R(\varrho) = 0 \quad (3.108)$$

Riešením úlohy (3.106) sú vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi_0(\varphi) = 1, \quad \phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dosadíme  $\lambda = n^2$  do rovnice (3.106). Podľa teórie vlastných hodnôt a vlastných funkcií pre Sturmovu-Liouvilleovu úlohu (veta I.2.1, poznámka I.2.2) musí byť vlastná hodnota

$$\lambda - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 > 0$$

a na základe vlastností Besselových funkcií má potom riešenie rovnice (3.107) tvar

$$R(r) = J_n \left( \sqrt{\lambda - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} r \right)$$

Vzhľadom na okrajovú podmienku (3.108) dostávame vzťahy

$$\sqrt{\lambda - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} \varrho = \mu_p^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad p = 1, 2, \dots$$

kde  $\mu_p^{(n)}$  je p-tý koreň Besselovej funkcie  $J_n$  a teda systém vlastných hodnôt má tvar

$$\lambda_{mnp} = \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho}\right)^2, \quad (3.109)$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad p = 1, 2, \dots$$

Príslušné vlastné funkcie majú tvar:

$$\begin{aligned} u_{mop}(r, \varphi, z) &= J_0 \left( \frac{\mu_p^{(0)}}{\varrho} r \right) \sin \frac{m\pi}{d} z \\ u_{mnp}^c(r, \varphi, z) &= J_n \left( \frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{m\pi}{d} z \\ u_{mnp}^s(r, \varphi, z) &= J_n \left( \frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho} r \right) \sin n\varphi \sin \frac{m\pi}{d} z \end{aligned} \quad (3.110)$$

Vidíme, že každej vlastnej hodnote  $\lambda_{mop}$  zodpovedá jedna a každej vlastnej hodnote  $\lambda_{mnp}$ ,  $n \geq 1$ ; zodpovedajú dve lineárne nezávislé vlastné funkcie.

d) Riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy pre Poissonovu rovnicu:

$$-\Delta u = f(r, \varphi, z) \quad (3.112)$$

$$u(r, \varphi, 0) = u(r, \varphi, d) = u(\varrho, \varphi, z) = 0 \quad (3.112)$$

$$0 < r < \varrho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d$$

vyjadríme v tvare

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= \sum_{m,p=1}^{\infty} \frac{f_{mop}}{\lambda_{mop}} J_0 \left( \frac{\mu_p^{(0)}}{\varrho} r \right) \sin \frac{m\pi}{d} z + \\ &+ \sum_{n,n,p=1}^{\infty} \frac{J_n \left( \frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho} r \right)}{\lambda_{mnp}} (f_{mnp}^c \cos n\varphi + f_{mnp}^s \sin n\varphi) \sin \frac{m\pi}{d} z \end{aligned}$$

kde  $\{f_{mop}, f_{mnp}^c, f_{mnp}^s\}_{m,n,p=1}^{\infty}$  sú Fourierove koeficienty funkcie  $f$  podľa

ortogonálneho na množine  $(0, \varrho) \times (0, 2\pi) \times (0, d)$  s váhou  $r$  systému vlastných funkcií

$$\{u_{mop}, u_{mnp}^c, u_{mnp}^s\}_{m,n,p=1}^{\infty} :$$

$$f_{mop} = \frac{2 \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^d f(r, \varphi, z) J_0 \left( \frac{\mu_p^{(0)}}{\varrho} r \right) \sin \frac{m\pi}{d} z \, dr \, d\varphi \, dz}{\pi \varrho^2 J_1^2(\mu_p^{(0)})}$$

$$f_{mnp}^c = \frac{4 \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^d r f(r, \varphi, z) J_n \left( \frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{m\pi}{d} z \, dr \, d\varphi \, dz}{d \pi \varrho^2 J_{n+1}^2(\mu_p^{(n)})}$$

$$f_{mnp}^s = \frac{4 \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^d r f(r, \varphi, z) J_n \left( \frac{\mu_p^{(n)}}{\varrho} r \right) \sin n\varphi \sin \frac{m\pi}{d} z \, dr \, d\varphi \, dz}{d \pi \varrho^2 J_{n+1}^2(\mu_p^{(n)})}$$

$$m, n, p = 1, 2, \dots$$



### 3.4 Riešenie okrajových úloh a úloh na vlastné hodnoty pre guľu

Budeme riešiť úlohy na množine  $\Omega$  v priestore  $R^3$ :

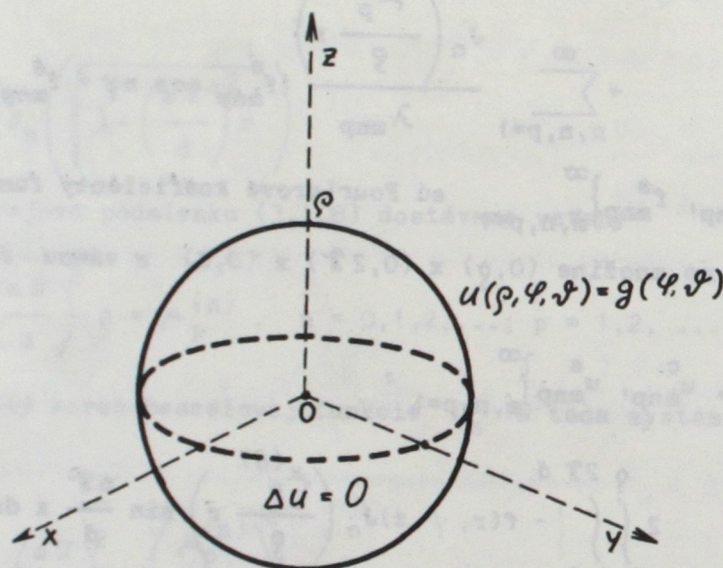
$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2, \rho > 0\}$$

a) Dirichletova úloha pre Laplaceovu rovnicu v sférických súradniciach má tvar:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.113)$$

$$u(\rho, \varphi, \vartheta) = g(\varphi, \vartheta) \quad (3.114)$$

$$0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi$$



Obr. 11  
Oblasť riešenia úlohy (3.113), (3.114)

Funkciu  $u$  vyjadríme v tvare

$$u(r, \varphi, \vartheta) = R(r) Y(\varphi, \vartheta)$$

Dosadením do rovnice (3.113) dostaneme po separácii premenných  $r, (\varphi, \vartheta)$  obyčajnú a parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$r^2 R'' + 2r R' - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < \rho \quad (3.115)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y(\varphi, \vartheta) = 0 \quad (3.116)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

Ďalej budeme hľadať sférické funkcie - ohraňované riešenia rovnice (3.116) spĺňajúce podmienku periodickosti

$$Y(0, \vartheta) = Y(2\pi, \vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi \quad (3.117)$$

Funkciu  $Y$  si vyjadríme v tvare

$$Y(\varphi, \vartheta) = \phi(\varphi) \psi(\vartheta)$$

Po dosadení do rovnice (3.116) a separácii dostaneme obyčajné diferenciálne rovnice

$$\phi''(\varphi) + \mu \phi = 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.118)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (\sin \vartheta \psi'(\vartheta))' + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \vartheta} \right) \psi(\vartheta) = 0 \quad (3.119)$$

$$0 < \vartheta < \pi$$

Už vieme, že úloha (3.118) má postupnosť vlastných hodnôt

$$\mu_k = k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ktorej zodpovedá postupnosť vlastných funkcií

$$\phi_0(\varphi) = 1, \quad \phi_k^c(\varphi) = \cos k\varphi, \quad \phi_k^s(\varphi) = \sin k\varphi \quad (3.120)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Rovnicu (3.119) budeme riešiť pomocou transformácie

$$\xi = \cos \vartheta, \quad \xi \in (-1, 1)$$

Označíme si

$$\hat{\psi}(\xi) = \psi(\arccos \xi), \quad \xi \in (-1, 1)$$

transformovanú funkciu. Použitím vzťahov

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{d\hat{\psi}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d\hat{\psi}}{d\xi}$$

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} \right) = \sin^3 \vartheta \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\xi^2} - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d\hat{\psi}}{d\xi}$$

dostaneme po dosadení  $\sin^2 \vartheta = 1 - \xi^2$ ,  $\mu = k^2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  do rovnice (3.119) rovnicu

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\hat{\psi}}{d\xi} + \left( \lambda - \frac{k^2}{1 - \xi^2} \right) \hat{\psi}(\xi) = 0 \quad (3.121)$$

$$-1 < \xi < 1$$



V kap. I, § 2.3 sme odvodili, že pre hodnoty

$$\lambda \equiv n(n+1); \quad n = k, k+1, k+2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$$

sú združené Legendrove funkcie  $P_n^k$  ohraničenými nenulovými riešeniami rovnice (3.121). Zopakujme si ich tvar:

$$P_n^k(\xi) = (1 - \xi^2)^{k/2} \frac{d^k}{d\xi^k} P_n(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} (1 - \xi^2)^{k/2} \frac{d^{k+n}}{d\xi^{k+n}} [(\xi^2 - 1)^n], \quad \xi \in (-1, 1)$$

Keď sa vrátíme k pôvodnej premennej  $\vartheta$ , dostaneme nasledujúci systém sférických funkcií - nenulových ohraničených riešení rovnice (3.116) s parametrom  $\lambda = n(n+1)$ , spĺňajúcich podmienku periodickosti (3.117):

$$Y_n^0(\varphi, \vartheta) = P_n(\cos \vartheta), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Y_n^k(\varphi, \vartheta) = \cos k\varphi P_n^k(\cos \vartheta) \quad (3.122)$$

$$Y_n^{-k}(\varphi, \vartheta) = \sin k\varphi P_n^k(\cos \vartheta)$$

$$k = 1, 2, \dots; \quad n = k, k+1, k+2, \dots$$

Rovnica (3.115) má po dosadení  $\lambda = n(n+1)$  všeobecné riešenie

$$R_n(r) = c r^n + d \frac{1}{r^{n+1}}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Pretože hľadáme riešenie ohraničené v guli  $\Omega$ , položíme  $c = 1, d = 0$ . Riešenie pôvodnej okrajovej úlohy (3.113), (3.114) ďalej vyjadríme v tvare funkcionálneho radu

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n c_{nk} R_n(r) Y_n^k(\varphi, \vartheta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_{nk} \cos k\varphi + b_{nk} \sin k\varphi) r^n P_n^k(\cos \vartheta)$$

Koeficienty radu získame vyjadrením okrajovej funkcie  $g$  v tvare

$$g(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \varrho^n c_{nk} Y_n^k(\varphi, \vartheta)$$

Na základe ortogonálnosti združených Legendrových funkcií  $P_n^k$  na intervale  $(-1, 1)$  a funkcií  $\{1, \cos k\varphi, \sin k\varphi\}$  na intervale  $(0, 2\pi)$  sú sférické funkcie  $\{Y_n^k\}$  ortogonálne na jednotkovej sfére, t.j.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_m^j(\varphi, \vartheta) Y_n^k(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = 0, \quad \text{ak } (j, m) \neq (k, n)$$

pričom pre ich normy platia vzťahy:

$$\|Y_n^k\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Y_n^k(\varphi, \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta =$$

$$= \int_{-1}^1 [P_n^k(\xi)]^2 d\xi = \varepsilon_k \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!}$$

$$\text{kde } \varepsilon_k = \begin{cases} 2, & \text{ak } k = 0 \\ 1, & \text{ak } k \neq 0 \end{cases}$$

Riešenie úlohy (1.113), (1.114) má nekonec tvar

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{\varrho} \right)^n [A_n P_n(\cos \vartheta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \vartheta)] \quad (3.123)$$

kde

$$A_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\varphi, \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\varphi, \vartheta) \cos k\varphi P_n^k(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\varphi, \vartheta) \sin k\varphi P_n^k(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, \dots, n$$



Poznámka 3.4: V prípade vonkajšej okrajovej úlohy pre guľu, t.j. pre  $r > \varrho$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , má riešenie rovnice (3.13) s Dirichletovou podmienkou (3.114) takmer rovnaký tvar ako (3.123), len výraz  $\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n$  je nahradený výrazom

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n+1}.$$

b) Prejdeme teraz na úlohu na vlastné hodnoty:

$$\Delta u + \lambda u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0 \quad (3.124)$$

$$u(\varrho, \varphi, \vartheta) = 0 \quad (3.125)$$

$$0 < r < \varrho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

Vlastné funkcie hľadáme v tvare

$$u(r, \varphi, \vartheta) = R(r)Y(\varphi, \vartheta)$$

Po separácii premenných dostaneme úlohy

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0 \quad (3.126)$$

$$Y(0, \vartheta) = Y(2\pi, \vartheta)$$

$$r^2 R'' + 2r R' + (\lambda r^2 - \mu) R(r) = 0 \quad (3.127)$$

$$R(\varrho) = 0$$

Úloha (3.126) je totožná s úlohou (3.116), (3.117) a ako sme už zistili, má postupnosť vlastných hodnôt

$$\mu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

a systém vlastných (sférických) funkcií

$$\left\{ Y_n^k(\varphi, \vartheta); n = 0, 1, 2, \dots, k = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n \right\}$$

Dosadením vlastných hodnôt  $\mu_n$  do rovnice (3.127) dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$r^2 R'' + 2r R' + [\lambda r^2 - n(n+1)] R(r) = 0 \quad (3.128)$$

Riešenie  $R$  tejto rovnice vyjadríme v tvare

$$R(r) = \frac{\hat{R}(r)}{\sqrt{r}}, \quad 0 < r < \varrho \quad (3.129)$$

Dosadením do (3.128) zistíme, že funkcie  $\hat{R}$  musí byť riešením rovnice

$$r^2 \hat{R}'' + r \hat{R}' + \lambda r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hat{R}(r) = 0 \quad (3.130)$$

Z teórie Besselových funkcií (kap. I., § 2.2) vieme, že riešením rovnice (3.130) je funkcia daná predpisom

$$\hat{R}_{n,\lambda}(r) = J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)$$

Riešenie pôvodnej rovnice (3.128) má potom tvar

$$R_{n,\lambda}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r), \quad r > 0$$

Aby sa zistila okrajová podmienka  $R(\varrho) = 0$ , musí byť

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} \varrho) = 0$$

Dostávame tak dvojnú postupnosť vlastných hodnôt

$$\lambda_{mn} = \left( \frac{\mu_m^{(n+\frac{1}{2})}}{\varrho} \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.131)$$

kde  $\mu_m^{(n+\frac{1}{2})}$  je  $m$ -tý koreň Besselovej funkcie  $J_{n+\frac{1}{2}}$ .

Zodpovedajúci systém vlastných funkcií úlohy (3.124), (3.125) má potom tvar

$$u_{mnk}(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_m^{(n+\frac{1}{2})}}{\varrho} r \right) Y_n^k(\varphi, \vartheta) \quad (3.132)$$

$$m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$$

Všimnime si, že vlastnej hodnote  $\lambda_{mn}$  zodpovedá  $2n+1$  lineárne nezávislých vlastných funkcií.

c) Riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy pre Poissonovu rovnicu:

$$-\Delta u = f, \quad u(\varrho, \varphi, \vartheta) = 0$$

$$0 < r < \varrho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi$$



vyjadríme v tvare

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{f_{mnk}}{\lambda_{mn}} J_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_m^{(n+\frac{1}{2})}}{\varrho} r \right) Y_n^k(\varphi, \vartheta)$$

kde  $\{\lambda_{mn}\}$  sú vlastné hodnoty určené vzťahom (1.31) a  $\{f_{mnk}\}$  Fourierove koeficienty funkcie  $f$  podľa systému vlastných funkcií  $\{u_{mnk}\}$  ortogonálnych s váhou  $r^2 \sin \vartheta$  na množine  $(0, \varrho) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ :

$$f_{mnk} = \frac{(2n+1)(n-|k|)!}{\varepsilon_k \pi \varrho^2 (n+|k|)! \left[ J_{n+\frac{3}{2}} \left( \frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{\varrho} \right) \right]^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{3/2} f(r, \varphi, \vartheta) J_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{\varrho} r \right) Y_n^k(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

kde  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Uvedené vyjadrenie riešenia  $u$  v tvare trojného radu sa podstatne zjednoduší, ak funkcia  $f$  nezávisí od jednej, alebo od žiadnej z uhlových súradníc  $\varphi, \vartheta$ . Vyplýva to z toho, že funkcia 1 je ortogonálna k funkciám  $\cos k\varphi$ ,  $\sin k\varphi$  na intervale  $(0, 2\pi)$ , ako aj k funkciám  $P_n^k$  na intervale  $(-1, 1)$ . Ak napríklad  $f(r, \varphi, \vartheta) = f(r)$ , má riešenie tvar

$$u(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_m^{(1/2)}}{\varrho} r \right), \quad a_m = c_{m00}$$

### 3.5 Úlohy

1. Nájdite riešenie Laplaceovej rovnice vnútri obdĺžnika  $(0, a) \times (0, b)$  spĺňajúce okrajové podmienky

a)  $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}$ ,  $u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}$ ,  $u(a, y) = u(x, b) = 0$

b)  $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = Ay$ ,  $u(x, b) = \frac{Ab}{a} x$

c)  $u(x, 0) = g(x)$ ,  $u(0, y) = h(y)$ ,  $g(0) = h(0)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \psi(y)$$

d)  $u(x, 0) = g(x)$ ,  $u(x, b) = h(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \varphi(y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \psi(y)$

e)  $u(x, 0) = A$ ,  $u(x, b) = Bx$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$

f)  $u(0, y) = A(b-y)$ ,  $u(x, b) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{2a}$

2. Nájdite rozdelenie potenciálu elektrostatického poľa v oblasti ohraničenej vodivými doskami  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ , ak dosky  $y = 0$ ,  $y = b$  sú uzemnené a doska  $x = 0$  má potenciál  $V_0$ , pričom vnútri danej oblasti nie sú náboje.

Návod: Riešte úlohu  $\Delta u = 0$ ,  $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, b)$ ,  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ ,  $u(0, y) = V_0$ ,  $|u(x, y)| \leq C$ .

3. Riešte okrajové úlohy -  $\Delta u = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$  pre priehyb štvorcovej membrány  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , ak

a)  $f(x, y) = 0, 1 \cdot x(1-x)$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$

b)  $f(x, y) = 0, 1 \cdot x(1-x)$ ,  $u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0$

c)  $f(x, y) = 0, 02 [\cos \pi(x-2y) - \cos \pi(x+2y)]$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$

d)  $f(x, y) = 0, 1 \cdot \cos \pi x \cdot \cos \pi y$ ,  $u(x, 1) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$

4. Nájdite stacionárne rozdelenie teploty vnútri nekonečného valca polomeru  $\varrho$ , v ktorom nie sú tepelné žriedla a na jeho povrchu je

a) udržiavaná teplota  $A \sin^3 \varphi + B$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

b) udržiavaná teplota  $A \sin \varphi$ , ak  $0 \leq \varphi \leq \pi$  a  $\frac{1}{3} A \sin^3 \varphi$ , ak  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

c) daný tok tepla na jednotku dĺžky  $Q = q \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

d) daná podmienka výmeny tepla s vonkajším prostredím:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} + h u \right)(\varrho, \varphi) = -g(\varphi), \quad h > 0, \quad g: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(0) = g(2\pi)$$

5. Nájdite potenciál a elektrostatické pole vnútri a zvonku nekonečného valca pri nulovom elektrickom náboji, ak na povrchu valca je daný potenciál

$$V = \begin{cases} V_1, & \text{ak } 0 < \varphi < \pi \\ V_2, & \text{ak } \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$