

3. Analyticky popíšte (v zmysle def. 1.6) hranicu $\partial\Omega$ lipschitzovskej oblasti Ω a jednotkový vektor \bar{n} vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$, ak

- a) $\Omega = (a,b) \times (c,d)$; b) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < a\}$;
 c) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < a \leq |x| < b\}$; d) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < a < |x|\}$;
 e) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < a\}$; f) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; 0 < a < |x|\}$;
 g) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < a^2, 0 < x_3 < h\}$;
 h) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < x_3^2, 0 < x_3 < h\}$.

4. Dokážte, že Greenova formula v priestore \mathbb{R}^2 tvaru

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega} P(x,y) dx - Q(x,y) dy$$

je ekvivalentná s Gaussovou-Ostrogredského formulou (1.7).

§ 2. STURMOVA¹¹⁾-LIOUVILLEOVA¹²⁾ ÚLOHA A ŠPECIÁLNE FUNKCIE

Pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc sa často volí taký postup, pri ktorom sa úloha pre funkcie viac premenných rozdelí na postupnosť úloh pre obyčajné diferenciálne rovnice. Pri použití špeciálnych súradníc dostávame určité typy rovníc, ktorých riešenia sú špeciálne funkcie.

2.1 Sturmova-Liouvilleova úloha

Budeme sa zaoberať obyčajnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - \lambda \rho(x)u(x) = 0, \quad x \in (a,b) \quad (2.1)$$

s okrajovými podmienkami

$$\alpha u(a) - \beta u'(a) = 0, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0 \quad (2.2)$$

$$\gamma u(b) + \delta u'(b) = 0, \quad \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0 \quad (2.3)$$

Lahko vidieť, že funkcia $u \equiv 0$ je riešením úlohy (2.1) - (2.3). Nás budú zaujímať tie riešenia, ktoré sú nenulové.

Definícia 2.1. Úloha nájsť také čísla $\lambda \in \mathbb{R}$, pre ktoré existuje nenulové riešenie u okrajovej úlohy (2.1) - (2.3), sa nazýva Sturmova-Liouvilleova úloha. Číslo λ , pre ktoré existuje nenulové riešenie u úlohy (2.1)-(2.3), sa nazýva vlastná hodnota a zodpovedajúce riešenie vlastná funkcia (zodpovedajúce vlastnej hodnote λ) úlohy (2.1) - (2.3).

Nech $-\infty < a < b < +\infty$. Označme

$$D_L = \{u \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]; u'' \in L_2(a,b), u \text{ spĺňa (2.2), (2.3)}\}$$

Zavedieme operátor $L: D_L \rightarrow L_2(a,b)$ predpisom

$$Lu = -(p u')' + q u, \quad u \in D_L \quad (2.4)$$

Lema 2.1. Nech $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$. Potom operátor $L: D_L \rightarrow L_2(a,b)$ je lineárny a symetrický, t.j.

- 11) STURM Jean Charles Francois (1803-1855), švajčiarsky matematik. Zaoberal sa okrajovými úlohami pre obyčajné diferenciálne rovnice a algebraickými rovnicami. Dokázal vetu o koreňoch algebraickej rovnice v danom intervale.
- 12) LIOUVILLE Joseph (1809-1882), francúzsky matematik. Pracoval v teórii čísel, diferenciálnej geometrii, v reálnej a komplexnej analýze, kde dokázal vetu o tom, že celá analytická funkcia ohraničená na celej rovine je konštantná. Spolu so Sturmom sa zaoberal úlohami na vlastné hodnoty pre obyčajné diferenciálne rovnice.

$$\int_a^b (Lu)(x)v(x)dx = \int_a^b (Lv)(x)u(x)dx \quad (2.5)$$

pre všetky $u, v \in D_L$

Dôkaz: Lineárnosť operátora L je zrejmá z lineárnosti derivovania. Dokážeme vzťah (2.5). Nech $u, v \in D_L$. Integrovaním per partes a využitím okrajových podmienok (2.2), (2.3), ktoré spĺňa aj funkcia v , dostaneme vzťahy

$$\begin{aligned} \int_a^b (Lu)(x)v(x)dx &= - \int_a^b (p(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \\ &= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx - [p(x)u'(x)v(x)]_a^b = \\ &= \int_a^b u(x)(-p(x)v'(x))'dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx + \\ &+ [p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]_a^b = \int_a^b u(x)(Lv)(x)dx \end{aligned}$$

pričom posledný výraz v hranatej zátvorke je rovný nule na základe okrajových podmienok (2.2), (2.3).

Príklad 2.1. Riešme Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$-u''(x) - \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, \pi) \quad (2.6)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0 \quad (2.7)$$

Nech $\lambda < 0$. Všeobecné riešenie rovnice (2.6) má potom tvar

$$u(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

Dosaďením okrajových podmienok (2.7) dostaneme $c_1 = c_2 = 0$ a teda $u(x) \equiv 0$ a číslo λ nie je vlastná hodnota.

Rovnako sa presvedčíme, že ani $\lambda = 0$ nie je vlastná hodnota.

Nech teda $\lambda > 0$. Všeobecné riešenie rovnice (2.6) má potom tvar

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

Použitím podmienky $u(0) = 0$ dostaneme $c_1 = 0$. Z podmienky $u(\pi) = 0$ máme ďalej $c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$.

Aby platilo $u \neq 0$, musí byť $c_2 \neq 0$ a teda $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$, čo platí práve vtedy, keď

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Teda postupnosť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvorí množinu všetkých vlastných hodnôt úlohy (2.6), (2.7) a funkcie $u_n : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

tvoria zodpovedajúci systém vlastných funkcií. Pritom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (2.10)$$

$$\int_0^{\pi} u_j(x)u_k(x)dx = 0, \quad \text{ak } j \neq k; \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Z teórie trigonometrických Fourierových radov ([8]) vyplýva, že Fourierov rad každej funkcie $u \in C^1 \langle 0, \pi \rangle$, $u(0) = u(\pi)$; podľa systému (2.9) rovnomerne konverguje k u na intervale $\langle 0, \pi \rangle$. Vzhľadom na vetu 1.3 konverguje Fourierov rad podľa systému (2.9) každej funkcie $f \in L_2(0, \pi)$ v strede k funkcii f a teda postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvorí úplný ortogonálny systém v priestore $L_2(0, \pi)$.

Ako vidno z nasledujúcej vety, uvedené vlastnosti majú všeobecnejší charakter.

Veta 2.1. Nech $p \in C^1[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $\rho \in C[a, b]$, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Potom

a) Sturmova-Liouvilleova úloha má práve spočítateľne veľa vlastných hodnôt $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí

$$\min_{x \in \langle a, b \rangle} \frac{q(x)}{\rho(x)} \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots \quad (2.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (2.13)$$

b) Množina vlastných funkcií patriacich k vlastnej hodnote λ_n , $n = 1, 2, \dots$ je jednorozmerný podpriestor priestoru D_L , pričom každá vlastná funkcia má na (a, b) práve $(n-1)$ jednoduchých nulových bodov. Medzi každými dvoma susednými nulovými bodmi ľubovoľnej vlastnej funkcie zodpovedajúcej vlastnej hodnote λ_n sa nachádza práve jeden nulový bod vlastnej funkcie zodpovedajúcej vlastnej hodnote λ_{n+1} .

c) Každá postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastných funkcií u_n zodpovedajúcich vlastným hodnotám λ_n , $n = 1, 2, \dots$, tvorí úplný ortogonálny systém v priestore $L_{2,\rho}(a,b)$. Ak funkcia $f \in C^1(a,b)$ spĺňa okrajové podmienky (2.2), (2.3), potom jej Fourierov rad podľa systému $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje na $\langle a, b \rangle$.

Dôkaz. Kompletný dôkaz vyžaduje hlbšie poznatky z matematickej analýzy. Možno ho nájsť napr. v ([4], XI. 4.), alebo ([22], V. 22.). Dokážeme len niektoré tvrdenia vety.

Pomocou metódy per partes dokážeme dolný odhad vlastných hodnôt zo vzorca (2.12) a ortogonalnosť vlastných funkcií. Vlastná hodnota λ_n a vlastná funkcia u_n spĺňajú vzťah

$$Lu_n \equiv -(p(x)u_n'(x))' + q(x)u_n(x) = \lambda_n \rho(x)u_n(x), \quad x \in (a,b) \quad (2.14)$$

Vynásobením ľavej strany funkciou u_n a integrovaním dostaneme použijúc okrajové podmienky (2.2), (2.3) vzťahy

$$\int_a^b (Lu_n)(x)u_n(x)dx = \int_a^b p(x)u_n'(x)^2 dx + \int_a^b q(x)u_n^2(x)dx -$$

$$- [p(x)u_n'(x)u_n(x)]_a^b \geq \min_{x \in \langle a,b \rangle} \frac{q(x)}{\rho(x)} \int_a^b \rho(x)u_n^2(x)dx$$

keď výraz v hranatej zátvorke je nezáporný na základe okrajových podmienok (2.2), (2.3).

Ďalej dostaneme vzťahy

$$\lambda_n = \left(\int_a^b \rho(x)u_n^2(x)dx \right)^{-1} \int_a^b (Lu_n)(x)u_n(x)dx \geq \min_{x \in \langle a,b \rangle} \frac{q(x)}{\rho(x)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

a teda dolné ohreničenie pre vlastné hodnoty je dokázané.

Nech u_j, u_k sú vlastné funkcie zodpovedajúce vlastným hodnotám λ_j, λ_k , $j \neq k$. Použitím (2.5) a definície vlastných hodnôt dostaneme vzťahy

$$(\lambda_j - \lambda_k) \int_a^b \rho(x)u_j(x)u_k(x)dx =$$

$$= \int_a^b (Lu_j)(x)u_k(x)dx - \int_a^b (Lu_k)(x)u_j(x)dx = 0$$

a pretože $\lambda_j \neq \lambda_k$, musí byť $\int_a^b \rho(x)u_j(x)u_k(x)dx = 0$, čo dokazuje ortogonalitu systému vlastných funkcií $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ukážeme ešte, že ak $c \in (a,b)$ je nulový bod vlastnej funkcie u_n , tak je jednoduchý, t.j. $u_n(c) = 0$, ale $u_n'(c) \neq 0$.

Keby platila rovnosť $u_n'(c) = 0$, potom by začiatočná úloha pre lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$-(py') + qy - \lambda_n \rho y = 0, \quad y(c) = y'(c) = 0$$

mala okrem riešenia $y_0 \equiv 0$ a nenulové riešenie u_n , čo je spor s jednoznačnosťou riešenia uvedenej začiatočnej úlohy ([4], [8]).

Poznámka 2.1. Každéj vlastnej hodnote λ_n úlohy (2.1) - (2.3) priradujeme jednu vlastnú funkciu u_n . Podľa vety 2.1. všetky ostatné vlastné funkcie zodpovedajúce vlastnej hodnote λ_n majú tvar $v_n = cu_n$, $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka 2.2. Tvrdenia vety 2.1 platia za určitých doplňujúcich predpokladov aj pre Sturm-Liouvilleove úlohy na neohraničených intervaloch, alebo s funkciou p rovnou nule v jednom, alebo oboch koncových bodoch intervalu (a,b) . Okrajové podmienky v takých bodoch sa nahrádzajú podmienkami ohreničenosti hľadanej funkcie. Aj funkcia q môže byť v niektorých bodoch rovná nule. Podobné podmienky vystupujú práve pri diferenciálnych rovniciach určujúcich špeciálne funkcie, s ktorými sa budeme zaoberať v ďalších častiach tohto paragrafu. Podrobnosti s dôkazmi možno nájsť v knihách ([4], [22]).

2.2 Besselove¹³⁾ funkcie

Pri použití cylindrických funkcií na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc často riešime obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \langle 0, \infty \rangle \quad (2.15)$$

ktorá sa nazýva Besselova rovnica.

Nenulové riešenia Besselovej rovnice sa nazývajú cylindrické funkcie. Dôležitú triedu cylindrických funkcií dostaneme tak, že riešenie rovnice (2.15) hľadáme v tvare zovšeobecneného mocninového radu

$$y(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

¹³⁾ BESSEL FRIEDRICH Wilhelm (1784-1846), nemecký astronóm a matematik. Viac pracoval v astronómii a geodézii. V oblasti matematiky rozpracoval teóriu cylindrických funkcií.

Dosadením do rovnice (2.15) zistíme, že

$$\mu = \pm \nu, \quad a_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ak zvolíme $\mu = \nu$, dostaneme rekurentné vzťahy pre ostatné koeficienty:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4(\nu+k)k} = \frac{a_0}{4^k(\nu+k)(\nu+k-1)\dots(\nu+1)k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Konštantu a_0 môžeme zvoliť ľubovoľne. Položíme

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

kde $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je gamma-funkcia definovaná parametrickým integrálom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in (0, \infty)$$

pričom platí

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0! = 1$$

Riešenie (2.16) má potom tvar

$$y(x) \equiv J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (2.17)$$

Funkcia $J_\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva Besselova funkcia (prvého druhu rádu ν).

Pomocou d'Alembertovho¹⁴⁾ podielového kritéria ľahko zistíme, že rad reprezentujúci Besselovu funkciu konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$ a teda definícia funkcie je korektná.

Vyšetříme ďalej prípad $\mu = -\nu$. Pretože Besselova rovnica sa zámenou ν na $-\nu$ nemení, je aj funkcia $J_{-\nu}$ riešením rovnice.

Ak ν nie je celé číslo, sú funkcie $J_\nu, J_{-\nu}$ lineárne nezávislé, pretože v okolí nuly sa prvá z nich asymptoticky správa ako funkcia x^ν , zatiaľ čo druhá ako $x^{-\nu}$. Teda v tomto prípade tvoria funkcie $J_\nu, J_{-\nu}$ bázu množiny všetkých riešení Besselovej rovnice (2.15).

Ak $\nu = n$, n - celé nezáporné číslo, potom platí vzťah ([1], §11.1) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $x \in (0, \infty)$. Teda funkcie J_n, J_{-n} sú v tomto prípade lineár-

¹⁴⁾ D'ALEMBERT Jean Le Rond (1717-1783), francúzsky matematik, mechanik a filozof. Sformuloval pravidlá zostavenia diferenciálnych rovníc pohybu hmotných bodov. Jeho práce z diferenciálnych rovníc majú zakladajúcu úlohu v matematickej fyzike. Predložil riešenie rovnice kmitania struny v analytickom tvare.

ne závislé a musíme nájsť iné riešenie, ktoré je s funkciou J_ν lineárne nezávislé. Takýmto riešením je napríklad funkcia N definovaná vzťahom

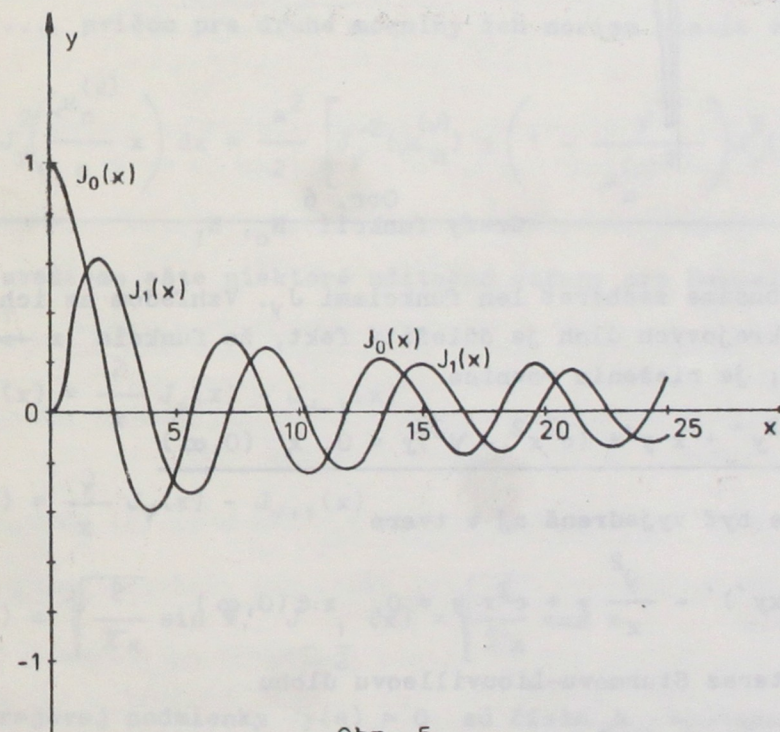
$$\left. \begin{aligned} N_\nu(x) &= \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}, \quad \text{ak } \nu \notin \{0, 1, 2, \dots\} \\ N_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x), \quad \text{ak } n \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Funkcia N_ν sa nazýva Neumannova¹⁵⁾ funkcia (alebo aj Besselova funkcia druhého druhu) rádu ν .

Všeobecné riešenie Besselovej rovnice má teda tvar

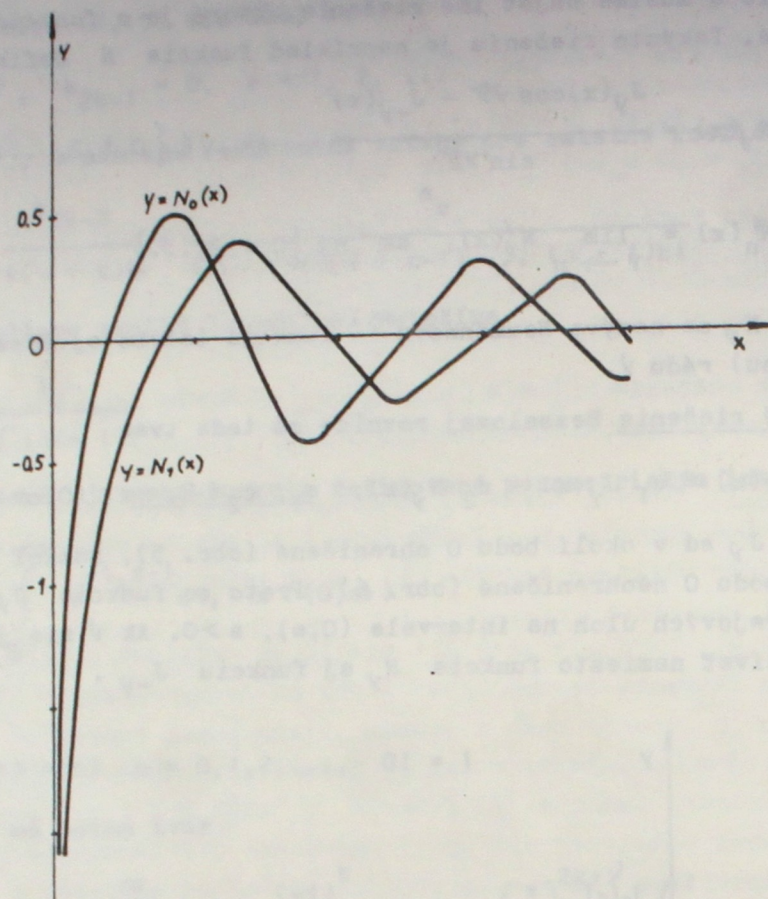
$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, \infty)$$

Funkcie J_ν sú v okolí bodu 0 ohraničené (obr. 5), zatiaľ čo funkcie N_ν sú v okolí bodu 0 neohraničené (obr. 6). Preto sa funkcie J_ν používajú na riešenie okrajových úloh na intervale $(0, a)$, $a > 0$. Ak ν nie je celé číslo, môžeme používať namiesto funkcie N_ν aj funkciu $J_{-\nu}$.



Obr. 5
Grafy funkcií J_0, J_1

¹⁵⁾ NEUMANN Karl Gottfried (1832-1925), nemecký matematik. Základné práce má v teórii logaritmického potenciálu a riešení okrajových úloh matematickej fyziky, zaoberal sa aj teóriou Besselových funkcií.



Obr. 6
Grafy funkcií N_0, N_1

Ďalej sa budeme zaoberať len funkciami J_ν . Vzhľadom na ich použitie pri riešení okrajových úloh je dôležitý fakt, že funkcia $x \rightarrow J_\nu(cx)$, $x \in (0, \infty)$; je riešením rovnice

$$x^2 y'' + x y' + (c^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (2.19)$$

ktorá môže byť vyjadrená aj v tvare

$$(xy')' - \frac{\nu^2}{x} y + c^2 x y = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (2.20)$$

Uvažujme teraz Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$-(xy')' + \frac{\nu^2}{x} y - \lambda xy = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (2.21)$$

$$y \text{ - ohraničená pri } x \rightarrow 0+ \quad (2.22)$$

$$\alpha y(a) + \beta a y'(a) = 0, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0 \quad (2.23)$$

Na základe podmienky (2.22) majú vlastné funkcie zodpovedajúce vlastným hodnotám λ tvar

$$u(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda} x), \quad x \in (0, \infty)$$

Na základe vety 2.1 a poznámky 2.2 platí

Veta 2.2. Existuje jednoznačne určená postupnosť vlastných hodnôt úlohy (2.21) - (2.23) tvaru

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(\nu)}}{a} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.24)$$

kde čísla $\mu_n^{(\nu)} \geq 0$ spĺňajú rovnosť

$$\alpha J(\mu_n^{(\nu)}) + \mu_n^{(\nu)} J'(\mu_n^{(\nu)}) = 0; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

Funkcie $\left\{ J_\nu \left(\frac{\mu_n^{(\nu)}}{a} x \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ tvoria úplný ortogonálny v priestore

$L_{2,x}(0, a)$ systém vlastných funkcií zodpovedajúcich vlastným hodnotám λ_n , $n = 1, 2, \dots$, pričom pre druhé mocniny ich noriem platia vzťahy

$$\int_0^a x J_\nu^2 \left(\frac{\mu_n^{(\nu)}}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{2} \left[J_\nu'^2(\mu_n^{(\nu)}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_n^{(\nu)2}} \right) J_\nu^2(\mu_n^{(\nu)}) \right] \quad (2.26)$$

Bez dôkazov uvedieme ešte niektoré užitočné vzťahy pre Besselove funkcie ([1], §11.1):

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \quad (2.27)$$

$$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (2.28)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (2.29)$$

V prípade okrajovej podmienky $y(a) = 0$ sú čísla μ_n vystupujúce v (2.24) nulové body funkcie J_ν a druhé mocniny noriem vlastných funkcií majú tvar

$$\int_0^a x J_\nu^2 \left(\frac{\mu_n^{(\nu)}}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(\mu_n^{(\nu)}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_n^{(\nu)}) \quad (2.30)$$

$$\nu \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pri riešení niektorých úloh pre parciálne rovnice sú dôležité aj modifikované Besselove funkcie, ktoré sú riešením modifikovanej Besselovej rovnice

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (2.31)$$

Ak funkcia w je riešením Besselovej rovnice, potom funkcia \hat{w} definovaná vzťahom $\hat{w}(x) = w(ix)$ je riešením modifikovanej Besselovej rovnice (2.31). Teda aj funkcia \hat{J}_ν definovaná predpisom

$$\hat{J}_\nu(x) = J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

je riešením rovnice (2.31). Aby riešenie bolo reálne, vynásobíme predchádzajúcu funkciu komplexnou konštantou $i^{-\nu}$ a dostaneme modifikovanú Besselovu funkciu $I_\nu : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad (2.32)$$

V prípade rovnice

$$x^2 y'' + xy' - (c^2 x^2 + \nu^2) y = 0$$

je riešením funkcia $x \rightarrow I_\nu(cx)$, $x \in (0, \infty)$.

2.3 Legendrove¹⁶ polynómy a združené Legendrove funkcie

Pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc pomocou sférických súradníc sa môžeme stretnúť s diferenciálnou rovnicou

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.33)$$

ktorá sa nazýva Legendrova rovnica. Medzi jej riešenia patrí aj polynóm P_n daný predpisom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

pričom kladieme $P_0(x) \equiv 1$. Presvedčíme sa o tom $(n+1)$ -násobným derivovaním identity

¹⁶) LEGENDRE Adrien Marie (1752-1833), francúzsky matematik. Zaoberal sa matematickou analýzou a teóriou čísel. Zaviedol Legendrove polynómy, riešil eliptické integrály a zostavil tabuľky ich hodnôt. Sformuloval zákon rozdelenia prvých čísel.

$$(x^2 - 1)Q_n'(x) - 2nx Q_n(x) = 0, \quad Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$$

Použitím vzťahov

$$\begin{aligned} [(x^2 - 1)Q_n'(x)]^{(n+1)} &= \\ &= (x^2 - 1)[Q_n'(x)]^{(n+1)} + 2(n+1)x[Q_n'(x)]^{(n)} + (n+1)[Q_n(x)]^{(n-1)} \\ [2nx Q_n(x)]^{(n+1)} &= 2nx Q_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1) Q_n^{(n)}(x) \end{aligned}$$

dostaneme, že polynóm $Q_n^{(n)}$ a teda aj $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$ je riešením rovnice (2.33).

Polynómy P_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ sa nazývajú Legendrove polynómy.

Legendrova rovnica môže byť vyjadrená aj v tvare

$$-[(1 - x^2)y']' - n(n+1)y = 0, \quad x \in (-1, 1) \quad (2.35)$$

Ak pridáme k rovnici (2.35) podmienky ohraničenosti v okoliach bodov $-1, 1$ vidíme, že Legendrove polynómy sú vlastné funkcie zodpovedajúce vlastným hodnotám $\lambda_n = n(n+1)$ pre Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$-[(1 - x^2)y']' - \lambda y = 0, \quad |y(x)| \leq C, \quad x \in (-1, 1) \quad (2.36)$$

Podmienka ohraničenosti nahrádza okrajové podmienky v krajných bodoch, pretože funkcia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = 1 - x^2$; je v nich nulová.

Na základe všeobecnej teórie vlastných funkcií Sturmovej-Liouvilleovej úlohy platí

Veta 2.3. Legendrove polynómy $\{P_n\}$ tvoria úplný ortogonálny v priestore $L_2(-1, 1)$ systém vlastných funkcií zodpovedajúcich vlastným hodnotám $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ úlohy (2.36), pričom pre ich normy platia vzťahy

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

Podobne ako pri Besselových funkciách platia aj pre Legendrove polynómy rekurentné vzťahy ([1], 12.1.4)

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (2.38)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)] \quad (2.39)$$

Uvažujme teraz rovnicu tvaru

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad x \in (-1,1) \quad (2.40)$$

Rovnica je totožná s Legendrovou rovnicou (2.33), ak $k = 0$. Ak k je prirodzené číslo, hľadáme riešenie v tvare

$$y(x) = (1-x^2)^{k/2} z(x), \quad x \in (-1,1)$$

Dosadením do (2.40) zistíme, že funkcia z je riešením diferenciálnej rovnice, ktorá vznikne k -násobným derivovaním pôvodnej Legendrovej rovnice. Teda

$$z(x) = \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad x \in (-1,1)$$

Funkcie $P_n^k : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definované vzťahmi

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

sa nazývajú združené Legendrove funkcie.

Vidíme, že pre párne k sú funkcie P_n^k polynómy k -teho stupňa. Opäť na základe všeobecnej teórie Sturmvej-Liouvilleovej úlohy platí

Veta 2.5. Združené Legendrove funkcie $\{P_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ tvoria úplný ortogonálny v priestore $L_2(-1,1)$ systém riešení rovnice (2.40), pričom pre ich normy platia vzťahy

$$\|P_n^k\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n^k(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \quad (2.42)$$

$$n = k, k+1, k+2, \dots$$

2.4 Úlohy

1. Riešte Sturmovu-Liouvillovu úlohu

$$-y'' - \lambda y = 0, \quad x \in (0,a)$$

$$\alpha y(0) - \beta y'(0) = \gamma y(a) + \delta y'(a) = 0, \quad \text{ak}$$

a) $\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = \delta = 0$

b) $\alpha = \gamma = 0, \quad \beta = \delta = 1$

c) $\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0$

d) $\alpha = \delta = 0, \quad \beta = \gamma = 1$

e) $\alpha = \gamma = \delta = 1, \quad \beta = 0$

f) $\alpha = \beta = \delta = 1, \quad \gamma = 0$

g) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$

2. Dokážte, že pre Besselove funkcie $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ platia vzťahy

$$x^n J_{n-1}(x) = [x^n J_n(x)]' \quad (2.43)$$

$$x^{n+2} J_{n-1}(x) = [2n x^{n+1} J_{n+1}(x) - x^{n+2} J_{n+2}(x)]' \quad (2.44)$$

Návod: Použite rekurentné vzorce (2.27), (2.28).

3. Vyjadrite funkciu f v tvare súčtu ortogonálneho radu v $L_{2,x}(0,a)$ podľa systému $\left\{ J_0\left(\frac{\mu_n}{a}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$, $J_0(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

a) $f(x) = 1, \quad b) f(x) = x^2$

Návod: Použite vzorce (2.43), (2.44).

4. Dokážte, že Legendrove polynómy nadobúdajú hodnoty:

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad (2.45)$$

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

$$P_{2k+1}(0) = 0 \quad (2.47)$$

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \quad (2.48)$$

Návod: Použite vyjadrenie (2.34) na dôkaz vzťahov (2.45) - (2.47) a rekurentný vzorec (2.38) na dôkaz vzťahu (2.48).

5. Vyjadrite funkciu f v tvare súčtu ortogonálneho radu v $L_2(-1,1)$ podľa systému $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$.

a) $f(x) = 1, \quad b) f(x) = x$

Návod: Použite vzťahy (2.39), (2.45), (2.46) a v prípade b) aj metódu integrovania per partes.

II. Stacionárne rovnice

V tejto kapitole sa budeme zaoberať parciálnymi diferenciálnymi rovnicami 2. rádu, v ktorých ako neznáme vystupuje funkcia m priestorových premenných x_1, \dots, x_m . Tieto rovnice sa nazývajú stacionárne, pretože ich riešenia vyjadrujú stacionárne - od času nezávislé deje. Rovnice vystupujúce v tejto kapitole sa nazývajú na základe vlastností ich koeficientov aj eliptické. Mnohé výsledky z teórie eliptických rovníc sa používajú aj pri riešení iných typov rovníc. Pri riešení budeme používať najmä metódy matematickej analýzy založené na vyjadrení riešenia v tvare ortogonálneho radu, alebo pomocou parametrického integrálu. Takéto metódy sa nazývajú aj klasické. Budeme sa zaoberať aj modernými metódami založenými na poznatkoch z funkcionálnej analýzy.

§1. NIEKTORÉ FYZIKÁLNE DEJE VYJADRENÉ STACIONÁRNymi ROVNICAMI

Podstatnú úlohu pri odvodení stacionárnych parciálnych rovníc hrá Gaussova-Ostrogradského formula a metóda integrácie per partes pre funkcie viac premenných.

1.1 Stacionárne vedenie tepla a difúzia

Uvažujme teleso zaberajúce ohraničenú oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, v ktorom sú spojite rozložené tepelné zdroje vyjadrené spojitou funkciou $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcia f vyjadruje hustotu rozloženia tepelných zdrojov v telese. Celkové množstvo tepla vyprodukované zdrojmi v ľubovoľnej časti D telesa je potom rovné

$$Q_1 = \iiint_D f(x) dx, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.1)$$

Podľa Fourierovho zákona pre tok tepla cez povrch telesa je množstvo tepla, ktoré prejde cez povrch ∂D oblasti D v smere jednotkového vektora \bar{n} vonkajšej normály, rovné

$$Q_2 = - \iint_{\partial D} k(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (1.2)$$

kde $k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia vyjadrujúca premenný koeficient tepelnej vodivosti a $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je (neznáma) funkcia popisujúca rozloženie teploty v telese Ω . Znamienko mínus v (1.2) vyjadruje tú skutočnosť, že teplo prúdi v smere klesajúcej teploty.

Podľa zákona zachovania tepla je množstvo tepla vyprodukovaného tepelnými zdrojmi v ľubovoľnej časti D telesa rovné toku tepla cez povrch ∂D , t.j. musí platiť

$$Q_1 = Q_2$$

Úpravou integrálu (1.2) pomocou Gaussovej-Ostrogradského formuly dostaneme rovnosť

$$\iiint_D [\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) + f(x)] dx = 0, \quad (1.3)$$

ktorá platí pre ľubovoľnú podoblasť D oblasti Ω . Ak predpokladáme, že celá funkcia za integrálom je spojitá na Ω , potom zo vzťahu (1.3) platného pre ľubovoľnú oblasť $D \subset \Omega$ dostaneme rovnicu

$$\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(x)) + f(x) = 0 \quad \text{pre každé } x \in \Omega$$

Poslednú rovnicu prepíšeme do tvaru

$$-\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1.4)$$

Rovnica (1.4) je rovnica stacionárneho vedenia tepla.

Ak teleso je z homogénneho materiálu, potom $k(x) \equiv k > 0$ pre všetky x a rovnica (1.4) má tvar

$$-\Delta u = \frac{f(x)}{k}, \quad x \in \Omega \quad (1.5)$$

Rovnica (1.4) vyjadruje aj difúziu látky cez pórovité prostredie. V tomto prípade neznáma funkcia u vyjadruje koncentráciu difundujúcej látky (plynu, kvapaliny) a k je koeficient difúzie.

Podobný tvar ako (1.4) má aj rovnica pre transport neutrónov v oblasti Ω :

$$-\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + (\sigma - \sigma_f)u = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1.6)$$

Funkcia u vyjadruje hustotu neutrónového toku. Funkcie p , σ , σ_f sú materiálové veličiny, funkcia f vyjadruje štiepenie, ktoré produkuje neutróny v Ω .

1.2 Ohyb membrány

Odvodíme si rovnicu pre ohyb membrány na základe princípu minimálnej energie.

Predpokladajme, že membrána má tvar ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a leží na pružnom podklade, ktorého odpor pri pohybe je charakterizovaný funkciou $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. Ďalej predpokladáme, že membrána má tuhosť $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) \geq T_0 > 0$, $x \in \Omega$; pôsobí na ňu kolmá vonkajšia sila hustoty $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Budeme uvažovať len malé priehyby membrány, ktoré sú vyjadrené funkciami $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pričom predpokladáme, že okraj membrány je pevný a teda

$$v(s) = 0 \text{ pre každé } s \in \partial\Omega \quad (1.7)$$

Celková potenciálna energia membrány je potom ([13], 10.2)

$$U(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [T(x)|\text{grad } v|^2 + q(x)v(x)^2 - 2f(x)v(x)] dx \quad (1.8)$$

Podľa princípu minimálnej potenciálnej energie zaujme membrána takú rovnovážnu polohu popísanú funkciou $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, že

$$U(u) \leq U(v) \text{ pre všetky } v \in C^1(\bar{\Omega}), v(s) = 0, s \in \partial\Omega \quad (1.9)$$

Ak položíme $v = u + tw$, kde $t \in \mathbb{R}$, $w \in C^1(\bar{\Omega})$, $w(s) = 0$, $s \in \partial\Omega$, dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} U(v) &= U(u + tw) = \\ &= U(u) + t \iint_{\Omega} (T \text{ grad } u \cdot \text{grad } w + quw - fw) dx + t^2 \iint_{\Omega} (T|\text{grad } w|^2 + \\ &\quad + qw^2) dx \end{aligned}$$

Funkcia $t \rightarrow U(u + tw)$ nadobúda podľa (1.9) minimum v bode $t = 0$ a teda

$$\frac{d}{dt} U(u + tw) \Big|_{t=0} = 0$$

Po vykonaní derivovania dostaneme integrálnu identitu

$$\iint_{\Omega} (T \text{ grad } u \cdot \text{grad } w + quw - fw) dx = 0 \quad (1.10)$$

pre všetky $w \in C^1(\bar{\Omega})$, $w = 0$ na $\partial\Omega$

a použitím metódy integrovania per partes pre možné integrály (Dôsledok I.1.2) dostaneme identitu

$$\iint_{\Omega} [-\text{div}(T \text{ grad } u) + qu - f] w dx = 0 \quad (1.11)$$

pre všetky $w \in C^1(\bar{\Omega})$, $w = 0$ na $\partial\Omega$

Medzi funkcie w spĺňajúce identitu (1.11) patria aj všetky funkcie z množiny $C_0^\infty(\Omega)$. Potom na základe dôsledku I.1.1 platí rovnica

$$-\text{div}(T(x)\text{grad } u) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega; \quad (1.12)$$

ktorej riešenie $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vyjadruje v každom bode $x \in \Omega$ veľkosť ohybu membrány.

Ak $T(x) \equiv T$, dostaneme rovnicu v tvare

$$-\Delta u + \frac{q}{T} u = \frac{f(x)}{T}, x \in \Omega \quad (1.13)$$

Poznámka 1.1. Metóda odvodenia rovnice (1.12) má aj všeobecnejší charakter a je základom variačných metód riešenia stacionárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, pri ktorých sa úloha riešenia rovnice nahradí úlohou o minime funkcionálu (funkcie definovanej na množine funkcií).