4. PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE

V predchádzajúcich častiach sme riešili niektoré typy obyčajných diferenciálnych rovníc, v ktorých vystupovala neznáma funkcia, alebo funkcie jednej premennej spolu so svojimi deriváciami. V tejto časti sa budeme zaoberať riešením typov *parciálnych diferenciálnych rovníc*. Sú to rovnice, ktoré obsahujú neznámu funkciu viac premenných spolu s jej parciálnymi deriváciami. Všeobecne možno parciálnu diferenciálnu rovnicu napísať v tvare

$$F(t,x,y,\dots,u,u_t,u_x,u_y,\dots u_{tt},u_{xx},u_{xy},\dots) = 0 \qquad (0.1)$$

kde F je daná funkcia viac premenných, u je neznáma funkcia premenných t, x, y, prípadne z a

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\ \dots$$

sú parciálne derivácie funkcie u.

Rovnicu (0.1) uvažujeme v oblasti $D \subset R^n$. Hľadáme funkciu $u := u(t,x,y,\dots)$, ktorá identicky spĺňa danú parciálnu diferenciálnu rovnicu v oblasti D t.j.

$$F(t,x,y,\dots,u(t,x,y),u_t(t,x,y),\dots) = 0$$

$$\text{pre všetky } (t,x,y) \in D$$

Také funkcie nazývame *riešením* parciálnej diferenciálnej rovnice. Zameriame sa len na rovnice druhého rádu, ktoré modelujú široké spektrum rôznych fyzikálnych javov.

4.1 MATEMATICKÉ MODELOVANIE NIEKTORÝCH FYZIKÁLNYCH JAVOV

Rovnica priečneho kmitania struny - hyperbolická rovnica

Uvažujme napnutú strunu dĺžky a upevnenú na svojich dvoch koncoch. Našou úlohou bude nájsť pohybovú rovnicu, ktorá charakterizuje polohu $u(x,t)$ bodu x struny v čase t po určitom začiatočnom impulze. Budeme predpokladať, že

a) struna je ohybná a pružná, t.j. nekladie odpor ohybu a napätie v strune teda pôsobí vždy v smere dotyčnice k existujúcemu tvaru struny,

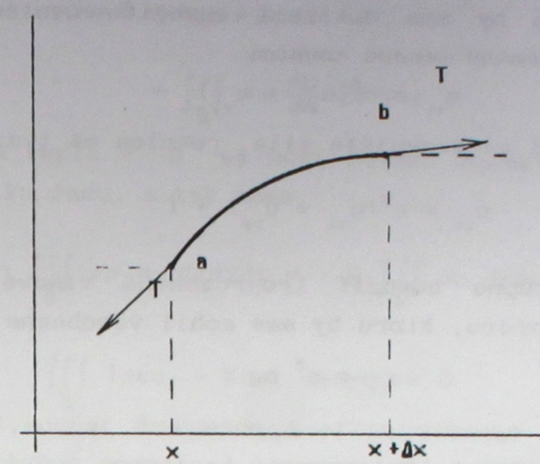
b) struna sa nepredĺži na žiadnom úseku, t.j. podľa Hookovho zákona je napätie v strune rovnaké,

c) priehyby struny sú malé v porovnaní s jej dĺžkou

d) struna kmitá v jednej rovine.

Uvažujme úsek struny od bodu x po bod $x + \Delta x$. Nech T je napätie v koncových bodoch úseku $[x, x + \Delta x]$, ako to vidíme na obr. 21. Sily pôsobiace na element struny vo vertikálnom smere sú

$$T \sin\beta - T \sin\alpha$$



Obr.21

Časť kmitajúcej struny

Podľa Newtonovho druhého pohybového zákona je výsledná sila rovná hmotnosti elementu násobenej zrýchlením. Tak dostávame

$$T \sin\beta - T \sin\alpha = \rho\Delta s\, u_{tt} \qquad (1.1)$$

kde ρ je hustota a Δs je dĺžka oblúka struny. Podľa predpokladu smernica dotyčnice je malá, teda

$$\Delta s \simeq \Delta x$$

a pretože aj uhly α a β sú malé, môžeme nahradiť

$$\sin\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha,\ \sin\beta \simeq \operatorname{tg}\beta$$

Potom rovnica (1.1) prejde na tvar

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho\,\Delta x}{T}\, u_{tt} \qquad (1.2)$$

Na základe geometrickej interpretácie derivácie dostaneme vzťahy

$$\operatorname{tg}\alpha = u_x(x),\ \operatorname{tg}\beta = u_x(x + \Delta x)$$

Rovnica (1.2) sa potom dá napísať v tvare

$$\frac{1}{\Delta x}\,[u_x(x + \Delta x) - u_x(x)] = \frac{\rho}{T}\, u_{tt}$$

odkiaľ limitným prechodom pre $\Delta x \to 0$ dostaneme rovnicu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (1.3)$$

kde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Dostali sme tak *jednorozmernú vlnovú rovnicu* alebo *rovnicu kmitania struny*.

Ak na strunu pôsobí vonkajšia sila F na jednotku dĺžky, potom sa homogénna rovnica (1.3) zmení na nehomogénnu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f\ ,\ f = \frac{F}{\rho} \qquad (1.4)$$

Podobným spôsobom by sme dokázali odvodiť rovnicu *priečneho kmitania membrány*, alebo *dvojrozmernú vlnovú rovnicu*

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1.5}$$

a ak na membránu pôsobí aj vonkajšia sila, rovnica má tvar

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f \tag{1.6}$$

Tak by sa dali postupne odvodiť trojrozmerná vlnová rovnica alebo aj viacrozmerná vlnová rovnica, ktorú by sme mohli všeobecne napísať v tvare

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \tag{1.7}$$

kde Δ je Laplaceov operátor, ktorý môže byť jedno-, dvoj-, troj- alebo viacrozmerný. Dvojrozmerný a trojrozmerný Laplaceov operátor majú tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Vlnová rovnica je dôležitá, pretože takýto typ rovnice sa vyskytuje v mnohých fyzikálnych problémoch napr.: zvukové vlny v priestore, elektrické vibrácie vo vodiči, vlnenie v magnetohydrodynamike, pozdĺžne kmitanie tyče atď.

Rovnice typu (1.6) nazývame aj *hyperbolickými rovnicami*.

Rovnica nestacionárneho vedenia tepla - parabolická rovnica

Iným základným typom parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorý sa tiež veľmi často vyskytuje v rôznych fyzikálnych aplikáciách je *rovnica vedenia tepla*. Uvažujme oblasť $\Omega \subset R^3$ ohraničenú plochou $\partial\Omega$. Nech $u(x,y,z,t)$ je teplota v bode (x,y,z) a v čase t. Ak teplota nie je konštantná, teplo prechádza z bodov s vyššou teplotou do bodov s nižšou teplotou. Podľa Fourierovho zákona je množstvo toku tepla úmerné gradientu teploty. Potom rýchlosť toku tepla v izotropickom telese je

$$\mathbf{v} = - K \operatorname{grad} u \tag{1.8}$$

kde K je konštanta, ktorú nazývame tepelnou vodivosťou prostredia. Nech D je ľubovoľná oblasť ohraničená uzavretou plochou ∂D v oblasti Ω. Potom množstvo tepla, ktoré opúšťa D za jednotku času, je

$$\iint_{\partial D} v_n dS$$

kde $v_n = \mathbf{v}.\mathbf{n}$ je zložka rýclosti $\mathbf{v}$ v smere vonkajšej normály $\mathbf{n}$ k ploche B . Podľa Gaussovej vety o vzťahu objemového a povrchového integrálu ([10], [18]) platí

$$\iint_{\partial D} v_n dS = \iiint_D \operatorname{div}(- K \operatorname{grad} u)dxdydz = - K \iiint_D \Delta u \; dxdydz$$

Súčasne je množstvo tepla v D rovné

$$\iiint_D \sigma\rho u \; dxdydz$$

kde ρ je hustota materiálu telesa a σ je jeho špecifické teplo. Na

základe zameniteľnosti poradia derivovania a integrovania je zmena množstva tepla v D v čase t rovná integrálu

$$- \iiint_D \sigma\rho \frac{\partial u}{\partial t} \; dxdydz$$

Avšak zmena množstva tepla v D sa musí rovnať množstvu tepla ktoré opúšťa oblasť D za jednotku času, a tak máme

$$- \iiint_D \sigma\rho \, u_t \; dxdydz = - K \iiint_D \Delta u \; dxdydz$$

alebo

$$\iiint_D [\rho\sigma u_t - K\Delta u] \; dxdydz = 0 \tag{1.9}$$

pre každú oblasť $D \subseteq \Omega$. Predpokladáme, že uvedený integrand je spojitý. Pretože D je ľubovoľná podoblasť oblasti Ω, je aj integrand v integrále (1.9) rovný nule Ω , a tak dostaneme parci- álnu diferenciálnu rovnicu

$$u_t = c^2 \Delta u \tag{1.10}$$

kde $c = (\frac{K}{\sigma\rho})^{1/2}$.

Ak v telese pôsobia vnútorné zdroje tepla teplotnej hustoty $F(t,x,y,z)$, dostaneme nehomogénnu rovnicu

$$u_t = c^2 \Delta u + f \tag{1.11}$$

kde $f = \frac{F}{c\rho}$.

V prípade nekonštantnej tepelnej vodivosti $K = K(x,y,z)$ má rovnica vedenia tepla tvar

$$u_t = \operatorname{div} [K(x,y,z) \operatorname{grad} u] + f, \; t > 0, \; (x,y,z) \in \Omega \tag{1.12}$$

Rovnica (1.11) alebo (1.12) sa nazýva aj *parabolická rovnica* a opisuje nielen vedenie tepla, ale aj difúzny proces.

Stacionárne vedenie tepla - eliptická rovnica

Ak nedochádza k zmene teploty v čase, prebieha v telese proces stacionárneho vedenia tepla. V tom prípade funkcia teploty u závisí len od priestorových premenných x, y, z. Teda $u_t = 0$ a rovnica stacionárneho vedenia tepla má tvar

$$- \operatorname{div} [K(x,y,z) \operatorname{grad} u] = f \; , \; (x,y,z) \in \Omega \tag{1.13}$$

Rovnicu (1.13), v ktorej

$$K(x,y,z) \geq K_0 > 0 \quad \text{pre všetky body} \quad (x,y,z) \in \Omega$$

nazývame *eliptickou rovnicou*.

Ak $K(x,y,z) = K_0 > 0$, dostaneme eliptickú rovnicu

$$- \Delta u = f \tag{1.14}$$

ktorú nazývame aj *Poissonovou rovnicou*. Ak $f = 0$ v Ω, dostaneme *Laplaceovu rovnicu*

$$\Delta u = 0 \tag{1.15}$$

Všeobecnejší tvar eliptickej rovnice je

$$-\operatorname{div}\,[K(x,y,z)\operatorname{grad}\,u] + q(x,y,z)u = f,\ (x,y,z) \in \Omega$$

$$\text{Ak}\quad K(x,y,z) = 1,\ q(x,y,z) = -k^2,\ k > 0$$

dostaneme rovnicu

$$-\Delta u - k^2 u = g \tag{1.16}$$

ktorá sa nazýva *Helmholtzova rovnica*. Funkcia u vyjadruje amplitúdu vlnovej funkcie $w = u\,e^{i\omega t}$, ak pravá strana vlnovej rovnice (1.6) má tvar $f(t,x,y,z) = g(x,y,z)e^{i\omega t}$, $\omega > 0$.

Priebeh napätia elektrického poľa

Doteraz uvedené parciálne diferenciálne rovnice vyjadrujú rôzne fyzikálne deje, ktoré navzájom vôbec nesúvisia. Ukážeme si napr., že vlnová rovnica vyjadruje súčasne časovo-priestorový priebeh elektrického napätia vo vákuu. Maxwellove rovnice pre vákuum majú tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\,\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\,\mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div}\,\mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot}\,\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.17}$$

pričom $\mathbf{H}$ je napätie magnetického poľa a $\mathbf{E}$ je napätie elektrického poľa. Ak aplikujeme operátor rotácie na prvú rovnicu dostaneme:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\,\mathbf{H} \tag{1.18}$$

Podľa známeho vzťahu z vektorového počtu dostaneme rovnosť

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\,\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}\,.$$

Z Maxwellových rovníc (1.17) vidíme, že $\operatorname{div}\,\mathbf{E} = 0$, a teda

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}$$

Ak tento vzťah dosadíme do (1.18) a použijeme poslednú z rovníc (1.17), dostaneme rovnicu pre $\mathbf{E}$

$$c^2\,\Delta\,\mathbf{E} = \mathbf{E}_{tt}$$

čo je vlastne vlnová rovnica. Podobne by sme mohli ukázať, že aj rovnica stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla sú aj rovnicami iných fyzikálnych javov.

4.2 METÓDA SEPARÁCIE PREMENNÝCH

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením začiatočno-okrajových úloh (ďalej aj ZOU) pre hyperbolické a parabolické PDR a okrajových úloh (OU) pre eliptické PDR metódou separácie premenných. Túto metódu si ukážeme na najjednoduchších úlohách pre kmitanie struny, nestacionárne vedenie tepla v tyči a stacionárne vedenie tepla v obdĺžnikovej doske.

Okrajovou úlohou pre eliptickú PDR rozumieme hľadanie riešenia eliptickej rovnice na oblasti Ω, ktoré spĺňa dodatočné podmienky na jej hranici $\partial\Omega$. Iieto podmienky sa nazývajú *okrajové podmienky*. Okrajových podmienok je viac typov. My sa zameriame na nasledujúce okrajové podmienky (OP) pre rovnice 2. rádu.

a) *Dirichletove* OP: na hranici oblasti sú predpísané hodnoty riešenia u;

b) *Neumannove* OP: na hranici oblasti sú predpísané hodnoty pre $\frac{\partial u}{\partial n}$ – deriváciu v smere vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$; hranici oblasti,

c) *Newtonove* OP: na hranici $\partial\Omega$ sú predpísané hodnoty pre funkcie $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$, kde h je kladná funkcia definovaná na $\partial\Omega$;

d) *Zmiešané* OP : na jednotlivých častiach hranice sú splnené predchádzajúce OP .

Príslušné okrajové úlohy nazývame Dirichletove, Neumannove, Newtonove, zmiešané.

V prípade nestacionárnych rovníc – parabolických a hyperbolických predpisujeme popri okrajových aj *začiatočné podmienky*. Pri parabolickej rovnici, ktorá je 1. rádu vzhľadom na časovú premennú t predpisujeme hodnotu riešenia v začiatočnom okamihu $t_0 = 0$ a pri hypebolickej predpisujeme hodnoty riešenia a prvej derivácie podľa t v čase $t_0 = 0$. Úlohy tohto typu sa nazývajú *začiatočno-okrajové úlohy*.

Rovnica kmitania struny

Skúmajme problém priečneho kmitania struny dĺžky a, ktorá je upevnená na svojich koncoch $x = 0$ a $x = a$. Struna má začiatočný tvar vyjadrený funkciou $f(x)$ a začína kmitať začiatočnou rýchlosťou $g(x)$. Túto fyzikálnu formuláciu prevedieme do matematickej reči takto:

Hľadáme riešenie rovnice

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < a\,,\ t > 0 \tag{2.1}$$

s OP (Dirichletove OP)

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.2}$$

$$u(a,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.3}$$

a so ZP

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < a \tag{2.4}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \le x \le a \tag{2.5}$$

Rovnica (2.1) spolu s OP (2.2), (2.3) a ZP (2.4) a (2.5) tvoria začiatočno-okrajovú úlohu pre rovnicu kmitania struny. Podstata metódy separácie premenných tkvie v tom, že riešenie rovnice (2.1) hľadáme v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.6}$$

Ak dosadíme (2.6) do rovnice (2.1), dostaneme

$$XT'' = c^2X''T$$

a pretože hľadáme riešenie, pre ktoré $XT \neq 0$, máme:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \tag{2.7}$$

Pretože ľavá strana rovnice (2.7) nezávisí od t a pravá strana nazávisí od x, musí platiť:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

kde λ je separačná konštanta. Záporné znamienko pred konštantou volíme z praktických dôvodov, ktoré vyplynú z ďalšieho postupu. Dostávame dve rovnice:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.8}$$

a

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \tag{2.9}$$

Ďalej použijeme Dirichletove OP (2.2), (2.3). Dostaneme vzťahy:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

a

$$u(a,t) = X(a)T(t) = 0$$

Pretože $T(t) \neq 0$, máme okrajové podmienky pre funkciu X:

$$X(0) = 0 \tag{2.10}$$

$$X(a) = 0 \tag{2.11}$$

Keď chceme nájsť funkciu $X(x)$, musíme vyriešiť *úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie*:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(l) &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Podrobnejšie sa úlohou tohto typu budeme zaoberať v nasledujúcej časti. Úloha tkvie v hľadaní takých hodnôt parametra λ, pre ktoré existuje nenulové riešenie okrajovej úlohy (2.12). Obyčajnú diferenciálnu rovnicu v (2.12) vieme riešiť. Rozlišujeme tri prípady: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

a) $\lambda < 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar podľa známych poznatkov z časti 2.2 tvar

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

kde A, B sú ľubovoľné konštanty. Konštanty určíme pomocou okrajových podmienok. Tak dostávame

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pretože determinant sústavy je v prípade (2.13) rôzny od nuly, je $A = 0$ aj $B = 0$ a riešením úlohy (2.12) je

$$X(x) = 0$$

Potom $u(x,t) = 0$ a toto riešenie nám nevyhovuje, pretože my sme hľadali nenulové riešenie.

b) $\lambda = 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar

$$X(x) = A + Bx$$

Použitím okrajových podmienok dostaneme

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A + Ba &= 0 \end{aligned}$$

Teda $A = B = 0$, a opäť dostávame iba nulové riešenie.

c) $\lambda > 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Potom z podmienky $X(0) = 0$ dostávame, že $A = 0$ a z podmienky $X(a) = 0$ dostaneme

$$B\sin\sqrt{\lambda}a = 0$$

V prípade $B = 0$ by sme dostali znovu triviálne riešenie, a preto kladieme:

$$\sin\sqrt{\lambda}a = 0$$

čo je splnené za predpokladu, že

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi \qquad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

t.j.

$$\lambda := \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.14}$$

Čísla λ_n, $n = 1,2,\ldots$ sa nazývajú *vlastné hodnoty* a im zodpovedajúce funkcie

$$\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

vlastné funkcie (úlohy (2.12)).

Riešenia úlohy (2.12) majú potom tvar

$$X_n(x) = B_n\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.15}$$

Pre $\lambda = \lambda_n$ všeobecné riešenie rovnice (2.9) má tvar

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{a}t \tag{2.16}$$

kde C_n a D_n sú ľubovoľné konštanty. Potom funkcie

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

spĺňajú rovnicu (2.1) a OP (2.2), (2.3), pričom sme položili $a_n = B_nC_n$ a $b_n = B_nD_n$.

Pretože rovnica (2.1) je lineárna a homogénna tak aj funkcia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.17}$$

je riešením tejto rovnice za predpokladu, že rad rovnomerne konverguje rovnako, ako aj rad, ktorý vznikne dvojnásobným derivovaním jednotlivých jeho členov podľa t a x. Pretože každý člen radu (2.17) spĺňa OP (2.2) a (2.3), tak ich spĺňa aj funkcia $u(x,t)$. Ostali nám ešte začiatočné podmienky (2.4), (2.5), ktoré musia byť splnené. Dosiahneme to výpočtom konštánt a_n a b_n. Zderivujeme rovnosť (2.17)

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{a}\left(-\,a_n\sin\frac{n\pi c}{a}t + b_n\cos\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.18}$$

Z podmienok (2.4), (2.5) dostaneme

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.19}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{n\pi c}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.20}$$

Na základe viet o konvergencii Fourierových sínusových radov ([4], [6],[10]) rady (2.19), (2.20) rovnomerne konvergujú k funkciám f resp. g na intervale $\langle 0,a\rangle$, ak sú funkcie f, g spojité diferencovateľné a spĺňajú OP $f(0) = f(a) = g(0) = g(a) = 0$. Ak sú uvedené funkcie spojito diferencovateľné a nespĺňajú uvedené OP, vtedy rady konvergujú k f resp. g bodovo na intervale $(0,a)$.

Koeficienty a_n a b_n sú potom dané integrálmi

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{2.21}$$

Teda riešenie ZOU (2.1) - (2.5) je dané radom (2.17), kde koeficienty a_n a b_n sú dané vzťahmi (2.21).

Rovnica vedenia tepla

Uvažujme homogénnu tyč dĺžky a. Predpokladáme, že tyč je dostatočne tenká a teplo sa v danom časovom okamihu šíri rovnomerne cez jej prierez. Predpokladáme ďalej, že tyč je tepelne izolovaná od vonkajšieho prostredia, jej koniec $x = 0$ sa udržiava na nulovej teplote a druhý koniec $x = a$ je izolovaný tak, že v ňom neprebieha výmena tepla s okolím. Ak rozdelenie teploty v tyči v čase $t = 0$ je daná funkciou $f(x)$, potom rozdelenie teploty v

tyči v čase t a bode x je dané riešením začiatočno-okrajovej úlohy

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx},\ 0 < x < a,\ t > 0,\ k > 0\\ &u(0,t) = 0\\ &u_x(a,t) = 0,\ t \ge 0\\ &u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le a \end{aligned} \tag{2.22}$$

Tak ako pri rovnici kmitania struny, vyjadríme riešenie rovnice vedenia tepla v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Podobným postupom ako v predošlej ZOU dostaneme

$$XT' = kX''T$$

čo prepíšeme do tvaru

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

kde $\lambda > 0$ je kladná konštanta. Teda X a T spĺňajú rovnice

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.23}$$

$$T' + \lambda kT = 0 \tag{2.24}$$

Z OP dostaneme

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u_x(a,t) = X'(a)T(t) = 0$$

t.j.

$$X(0) = 0,\ X'(a) = 0$$

pre ľubovoľnú funkciu $T(t)$. Tak funkcia $X(x)$ je riešením úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0,\ X'(a) = 0$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.23) je

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Z podmienky $X(0) = 0$ máme $A = 0$. Z druhej OP potom máme

$$X'(a) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a$$

Pretože hľadáme netriviálne riešenie, musí platiť:

$$\cos\sqrt{\lambda}a = 0$$

odkiaľ

$$\sqrt{\lambda}a = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2,\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

sú vlastné hodnoty a im zodpovedajúce vlastné funkcie majú tvar

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

Riešenie rovnice (2.3) potom dostávame v tvare

$$T(t) = Ce^{-\lambda kt}$$

t.j.

$$T_n(t) = C_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt}$$

Teda netriviálne riešenie rovnice vedenia tepla, ktoré spĺňa OP, je

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

kde $a_n = B_n C_n$ sú ľubovoľné konštanty. Formálne vytvoríme rad

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \tag{2.25}$$

ktorý spĺňa začiatočnú podmienku ak

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

t.j.

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \tag{2.26}$$

Teda funkcionálny rad (2.25) je za predpokladu, že rovnomerne konverguje spolu s radmi ktoré vzniknú derivovaním podľa t a dvojnásobným derivovaním podľa x, riešením ZOU (2.22). Podobne, ako napr. v literatúre [2], [3], možno dokázať, že postačujúcou podmienkou na to je, aby funkcia začiatočnej teploty f bola spojito diferencovateľná na intervale $\langle 0,a \rangle$ a spĺňala okrajové podmienky $f(0) = f'(a) = 0$. Poznamenávame, že formálne je rad riešením danej úlohy aj za slabších predpokladov pre funkciu f. Vtedy hovoríme aj o tzv. *zovšeobecnenom*, alebo *slabom riešení*, ktoré sa zavádza aj pri iných začiatočno-okrajových, alebo okrajových úlohách.

Laplaceova rovnica

Uvažujme stacionárne vedenie tepla v tenkej obdĺžnikovej doske, ktorej dve bočné hrany sú tepelne izolované od okolitého prostredia, jedna hrana je udržiavaná pri nulovej teplote a teplota poslednej hrany je predpísaná funkciou $f(x)$. Pretože ide o stacionárne vedenie tepla, v rovnici nebude vystupovať čas. To znamená, že v dvojrozmernej rovnici vedenia tepla

$$u_t = k\,\Delta u$$

uvažujeme $u_t = 0$, t.j. teplota sa nemení s časom. Matematická formulácia tejto okrajovej úlohy je nasledujúca:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le a \\ &u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a \\ &u_x(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le b \\ &u_x(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b \end{aligned} \tag{2.27}$$

Riešenie opäť hľadáme v tvare $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Po dosadení do Laplaceovej rovnice a separácii premenných, čo je pre nás teraz už iba rutinná záležitosť, dostávame rovnice pre $X(x)$ a $Y(y)$:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Pretože OP sú homogénne na okrajoch $x = 0$ a $x = a$ pre $\lambda \ge 0$, dostaneme netriviálne riešenie úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.28}$$

$$X'(0) = X'(a) = 0 \tag{2.29}$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.28) je za predpokladu $\lambda > 0$ v tvare

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

odkiaľ

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$

Potom použitím okrajových podmienok dostávame

$$0 = X'(0) = B\sqrt{\lambda} \Rightarrow B = 0$$

$$0 = X'(a) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a} ; \; n = 1, 2, 3, \dots$$

a

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \; X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{a} ; \; n = 1, 2, 3, \dots$$

sú odpovedajúce vlastné hodnoty a vlastné funkcie. Na rozdiel od okrajových podmienok v predchádzajúcich úlohách je vlastnou hodnotou aj $\lambda_0 = 0$, ktorej zodpovedá konštantná vlastná funkcia $X_0(x) = A_0$.

Riešenie druhej rovnice

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y = 0, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

má pre $n = 0$ tvar

$$Y_0'' = 0$$

ktorej riešenie môžeme napísať v tvare

$$Y_0 = C_0 y + D_0$$

Pre $n = 1, 2, 3, \dots$ riešenie má tvar

$$Y_n(y) = C_n e^{(n\pi/a)y} + D_n e^{-(n\pi/a)y}$$

Formálne vytvoríme rad

$$u(x,y) = a_0 y + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{(n\pi/a)y} + b_n e^{-(n\pi/a)y}) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

kde $a_n = A_n C_n$ a $b_n = A_n D_n$. Potom z okrajových podmienok

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{a} \quad u(x,b) = 0 \quad \text{pre} \quad 0 \le x \le a$$

máme:

$$f(x) = u(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

a

$$0 = u(x,b) = a_0 b + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{(n\pi/a)b} + b_n e^{-(n\pi/a)b}) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

odkiaľ dostávame Fourierove koeficienty funkcie f:

$$b_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)\, dx; \quad a_n + b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

resp. funkcie 0:

$$a_0 b + b_0 = 0, \text{ alebo } a_0 = -\frac{b_0}{b}$$

$$a_n e^{(n\pi/a)b} + b_n e^{-(n\pi/a)b} = 0; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ak položíme

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tak

$$a_n = \frac{B_n}{(1 - e^{(2n\pi/a)b})}, \quad b_n = -\frac{B_n e^{(2n\pi/a)b}}{(1 - e^{(2n\pi/a)b})}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_0 = \frac{1}{2} B_0$$

a riešenie OU môžeme napísať v tvare

$$u(x,y) = \frac{B_0}{2} \frac{b - y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{e^{(n\pi/a)y} - e^{(n\pi/a)(2b-y)}}{1 - e^{(2n\pi/a)b}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

odkiaľ po jednoduchých úpravách vyjadríme riešenie pomocou funkcie sinh v tvare

$$u(x,y) = \frac{B_0}{2} \frac{b - y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b - y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

Takto sme pomocou separácie premenných formálnym spôsobom vyriešili hyperbolickú a parabolickú ZOU, ako aj eliptickú OU. Formálnym spôsobom preto, že zatiaľ sme predpokladali iba to, aby vytvorený rad rovnomerne konvergoval a mal toľko a takých derivácií, koľko si vyžaduje problém, ktorý riešime. V zmysle klasickej definície riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice by sme mali dokázať, že riešenia všetkých troch úloh existujú a sú jediné. Tieto dôkazy, rovnako ako aj otázky konvergencie predchádzajúcich radov, presahujú rámec tohto skrípta a možno ich nájsť v literatúre [1], [2], [3], [13], [19].

CVIČENIA 4.2

V úlohách 1 - 9 riešte ZOU

1. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = 3 \sin x$, $0 \le x \le \pi$

   $u_t(x,0) = 0$, $0 \le x \le \pi$

2. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = 0$, $0 \le x \le 1$

   $u_t(x,0) = x \sin x$, $0 \le x \le 1$

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

   $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = x + \sin x$, $0 \le x \le \pi$

   $u_t(x,0) = 0$, $0 \le x \le \pi$

4. $u_t = 4 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = x^2(1 - x)$, $0 \le x \le 1$

5. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$

   $u(0,t) = u_x(2,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = x$, $0 \le x \le 2$

6. $u_t = k u_{xx}$, $0 < x < a$, $t > 0$

   $u(0,t) = 0$, $u(a,t) = 0$, $t \ge 0$

   $u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2a}$, $0 \le x \le a$

7. Homogénna struna upevnená na koncoch $x = 0$, $x = a$ má v čase $t = 0$ tvar

$$u(x,0) = \frac{16}{5} h \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right) \right]$$

kde $h > 0$ je dostatočne malé číslo, začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Riešte úlohu o kmitaní struny t.j. riešte ZOU

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad t \ge 0$$

$$u(x,0) = \frac{16}{5} h \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right) \right], \quad 0 \le x \le a$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le a$$

8. Homogénna struna upevnená na koncoch $x = 0$, $x = a$ má v čase $t = 0$ tvar paraboly symetrickej vzhľadom na priamku $x = \frac{1}{2}$ a začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Riešte úlohu o kmitaní struny t.j. riešte ZOU

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{4hx(a - x)}{a^2} \ , \ 0 \leq x \leq a$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \leq x \leq a$$

9. Metódou separácie premenných riešte ZOU pre telegrafnú rovnicu

$$u_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx} \ , \ 0 < x < l \ , \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \leq x \leq l$$

10. Daná je tenká homogénna tyč dĺžky a izolovaná od vonkajšieho prostredia so začiatočnou teplotou

$$f(x) = \frac{cx(a - x)}{a^2}$$

Konce tyče sú udržiavané pri nulovej teplote. Riešte úlohu o vedení tepla v tyči:

$$u_t = ku_{xx} \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \ u(a,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{cx(a - x)}{a^2} \ , \ 0 \leq x \leq a$$

Metódou separácie premenných riešte okrajové úlohy:

11. $\Delta u = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \ , \ 0 < y < \pi$$

$$u(x,\pi) = 0 \ , \ u(x,0) = \sin^2 x \ , \ 0 < x < \pi$$

12. $\Delta u = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ , \ 0 < y < \pi$$

$$u(x,\pi) = 0 \ , \ u(x,0) = x^2 \ , \ 0 < x < \pi$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.2

1. $u(x,t) = 3 \cos ct \sin x$

2. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{c} \frac{2 \sin 1}{n^2\pi^2 - 1} + \frac{4n\pi((-1)^n \cos 1 - 1)}{c(n^2\pi^2 - 1)^2} \right] \sin n\pi ct \sin n\pi x$

3. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{n+1}}{(2n - 1)(2n + 3)} + \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{2n + 3}\right)^2 - \left(\frac{2}{2n - 1}\right)^2\right] \times \right.$

$$\left. \times \cos \frac{2n + 1}{2} ct \sin \frac{2n + 1}{2} x \right]$$

4. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3} [2(-1)^{n+1} - 1] e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$

5. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{(2n + 1)\pi} \right)^2 e^{-((2n+1)\pi/4)^2 t} \sin \frac{2n + 1}{4}\pi x$

6. $u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4n^2 - 1} e^{-(n\pi/a)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{a}$

7. $u(x,t) = \frac{1536ah}{5\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^5} \cos \frac{(2n + 1)\pi ct}{a} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{a}$

8. $u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^3} \cos \frac{(2n + 1)\pi ct}{a} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{a}$, kde

$h = u(\frac{a}{2},0)$.

9. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$, kde $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

a ak označíme

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[a^2 - 4\left(b + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left[4\left(b + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right) - a^2\right]^{1/2}$$

tak

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at/2}\left(\cosh \alpha t + \frac{a}{2\alpha}\sinh \alpha t\right) & \text{pre } \alpha^2 > 0 \\ e^{-at/2}\left(1 + \frac{at}{2}\right) & \text{pre } \alpha^2 = 0 \\ e^{-at/2}\left(\cos \beta t + \frac{a}{2\beta}\sin \beta t\right) & \text{pre } \beta^2 > 0 \end{cases}$$

10. $u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^3} e^{-((2n+1)\pi/a)^2 kt} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{a}$

11. $u(x,y) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh (2n - 1)(\pi - y)}{(4n^2 - 1)(2n - 3) \sinh (2n - 1)\pi} \sin (2n - 1)x$

12. $u(x,y) = \frac{1}{3} \pi(\pi - y) + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh n(\pi - y)}{n^2 \sinh n\pi} \cos nx$.

4.3 STURMOVA-LIOUVILLEOVA ÚLOHA A BESSELOVE FUNKCIE

V predchádzajúcej časti sme hľadali riešenia ZOU a OU metódou separácie premenných. V každej úlohe sme hľadali nenulové riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice $X'' + \lambda X = 0$ spĺňajúce niektoré z okrajových podmienok $X(0) = X(a) = 0$, $X(0) = X'(a) = 0$, $X'(0) = X'(a) = 0$. Vlastnosti riešení uvedených úloh si zachovávajú aj riešenia nasledujúcej všeobecnejšej úlohy

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx} \right) + [\lambda\rho(x) - q(x)]X = 0, \quad 0 < x < a \qquad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha X(0) + \beta X'(0) &= 0 \\ \gamma X(a) + \delta X'(a) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

pričom predpokladáme, že $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ na $\langle 0,a\rangle$. Funkcia p je spojito diferencovateľná a ρ, q sú spojité. Konštanty α, β (γ, δ) nie sú obe rovné nule.

Hodnoty parametra λ, pre ktoré má úloha (3.1), (3.2) netriviálne riešenie, sa nazývajú *vlastné hodnoty* a im zodpovedajúce riešenia sú *vlastné funkcie*. Úloha hľadania vlastných hodnôt a vlastných funkcií sa nazýva Sturmova-Liouvilleova úloha.

Ak $\lambda = q(x) = 0$, potom rovnica (3.1) vyjadruje vedenie tepla v nehomogénnej tyči s funkciou tepelnej vodivosti $p(x)$.

Pri riešení ZOU kmitania struny sme riešili úlohu

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < a \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{gathered}$$

Jej vlastné hodnoty sú

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

a im zodpovedajúce vlastné funkcie

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots .$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že vlastné funkcie $\sin \frac{n\pi x}{a}$ spĺňajú rovnosť

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{ak } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{ak } m = n \end{cases}$$

Hovoríme, že funkcie $\{\sin \frac{n\pi x}{a}\}$ sú *ortogonálne* na intervale $(0,a)$. Pripomeňme si, že Fourierov rad každej integrovateľnej funkcie $f: \langle 0,a\rangle \to R$ podľa systému $\{\sin \frac{n\pi x}{a}\}$ má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx, \ n = 1, 2, \dots$$

Uvedený rad konverguje v strede na $\langle 0,a\rangle$ k funkcii f, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a [f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

Ak funkcia f je na intervale $\langle 0.a\rangle$ spojite diferencovateľná a spĺňa okrajové podmienky $f(0) = f(a) = 0$, vtedy daný Fourierov rad k nej konverguje rovnomerne na $\langle 0,a\rangle$.

Tieto vlastnosti môžeme zovšeobecniť aj na vlastné hodnoty a vlastné funkcie Sturmovej-Liovilleovej úlohy (3.1), (3.2).

Najprv rozšírime vyššie uvedený pojem ortogonality na ortogonalitu vzhľadom na funkciu ρ.

Definícia 4.1

Postupnosť integrovateľných funkcií $X_n: \langle 0,a\rangle \to R$ sa nazýva *ortogonálna s váhou* ρ, ak

$$\int_0^a \rho(x) X_k(x) X_m(x)\, dx \begin{cases} = 0, & \text{pre } k \neq n \\ > 0, & \text{pre } k = n \end{cases}$$

Hodnotu

$$\|X_n\| = \left[\int_0^a \rho(x) X_n^2(x)\, dx \right]^{1/2}$$

nazývame normou funkcie X_n (s váhou $\rho(x)$).

Ak $f: \langle 0,a\rangle \to R$ je integrovateľná funkcia, potom funkcionálny rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x), \quad c_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^a \rho(x) f(x) X_k(x)\, dx$$

sa nazýva *Fourierov rad* funkcie f podľa ortogonálneho systému $\{X_k\}$ s váhou ρ. Hovoríme, že Fourierov rad funkcie f *konverguje v strede* k funkcii f na intervale $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ, ak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \rho(x) [f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0$$

kde

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x)$$

je n-tý čiastočný súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$.

Nasledujúca veta zovšeobecňuje už spomínané vlastnosti vlastných hodnôt a vlastných funkcií z predchádzajúcej časti.

Veta 4.1

a) Existuje postupnosť vlastných hodnôt $\{\lambda_n\}$ úlohy (3.1), (3.2), pre ktoré platí

$$\min_{x\in[0,a]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots; \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

b) Zodpovedajúca postupnosť vlastných funkcií $\{X_n\}$ tvorí ortogonálny systém na intervale $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ.

c) Fourierov rad každej funkcie f podľa ortogonálneho systému $\{X_n\}$ s