váhou ρ konverguje v strede k f na $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ.

d) Ak funkcia f je spojito diferencovateľná a spĺňa okrajové podmienky (3.2), potom uvedený rad absolútne a rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0,a\rangle$.

Vetu nebudeme dokazovať, jej dôkaz vyžaduje hlbšie matematické znalosti. Dôkaz možno nájsť napr v knihách [1], [19].

Príklad 4.1

Nájdite rozdelenie teploty v tyči dĺžky a, ktorej povrch je tepelne izolovaný od okolitého prostredia, koniec $x = 0$ sa udržiava pri nulovej teplote a druhý koniec $x = a$ vyžaruje teplo voľne do okolitého prostredia s nulovou teplotou. Začiatočné rozdelenie teploty v tyči je dané funkciou $f(x)$.

R i e š e n i e. Rozdelenie teploty u je riešením ZOU

$$u_t = k\,u_{xx}\ ,\quad 0 < x < a\ ,\quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\quad 0 \le x \le a$$

$$u(0,t) = 0\ ,\quad t > 0$$

$$hu(a,t) + u_x(a,t) = 0\ ,\quad t > 0,\ h > 0$$

Riešenie $u(x,t)$ vyjadríme najprv v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Obvyklým spôsobom dostaneme rovnice

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T' + \lambda k T = 0$$

kde $\lambda > 0$ je separačná konštanta. Rovnica

$$X'' + \lambda X = 0$$

s podmienkami

$$X(0) = 0\ ,\quad hX(a) + X'(a) = 0$$

je Sturmovým-Liouvilleovým systémom, ktorý má podľa vety 4.1 spočítateľne mnoho vlastných hodnôt λ_n a im zodpovedajúce vlastné funkcie $X_n(x)$. Riešením tejto úlohy s podmienkou

$$X(0) = 0$$

je funkcia

$$X(x) = B \sin \sqrt{\lambda}x$$

kde B je konštanta. Ak dosadíme toto riešenie do druhej podmienky, dostaneme rovnosť

$$h \sin \sqrt{\lambda}a + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a = 0 \quad \text{ak} \quad B \ne 0$$

ktorú môžeme prepísať do tvaru

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda}a = - \sqrt{\lambda}/h$$

Ak zavedieme substitúciu $\eta = \sqrt{\lambda}a$ dostaneme rovnicu

$$\operatorname{tg} \eta = - \alpha\eta\ ,$$

kde $\alpha = \dfrac{1}{ha}$. Táto rovnica má postupnosť koreňov $\{\eta_n\}$, ktoré sú x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií $\operatorname{tg} \eta$, $-\alpha\eta$. Každému koreňu η_n zodpovedá vlastná hodnota

$$\lambda_n = \frac{\eta_n^2}{a^2}\ ,\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Teda existuje spočítateľne mnoho vlastných hodnôt

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

pričom

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Zodpovedajúce vlastné funkcie sú

$$X_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n}x$$

Riešenie druhej rovnice dostaneme v tvare

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n kt}$$

Konečné riešenie budeme hľadať v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n kt} \sin \sqrt{\lambda_n}x$$

Podľa vety 4.1 vlastné funkcie $\sin \sqrt{\lambda_n}x$ tvoria ortogonálny systém na intervale $\langle 0,a\rangle$ (s váhou $\rho = 1$). Koeficienty a_n určíme zo začiatočnej podmienky

$$u(x,0) = f(x)$$

Ak predpokladáme, že funkcia f je integrovateľná na $\langle 0,a\rangle$, potom ju možno rozvinúť do radu podľa vlastných funkcií :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \sqrt{\lambda_n}x$$

odkiaľ

$$a_n = \frac{\int_0^a f(x) \sin \sqrt{\lambda_n}x\ dx}{\int_0^a \sin^2 \sqrt{\lambda_n}x\ dx}$$

Besselova rovnica a Besselove funkcie

Pri riešení ZOU alebo OU s radiálnou alebo cylindrickou symetriou metódou separácie premenných sa často stretávame s úlohou, keď treba riešiť Besselovu rovnicu:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,\ x > 0 \tag{3.3}$$

kde ν je nezáporné reálne číslo. Ohraničené v okolí bodu 0 riešenie rovnice (3.3) možno nájsť v tvare zovšeobecneného mocninového radu

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{s+n} \tag{3.4}$$

Ak dosadíme rad (3.4) do rovnice (3.3) a porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách premennej x, dostaneme systém rekurentných vzťahov, z ktorých máme:

$$s = \pm \nu \,,\ a_{2k-1} = 0 \,,\ k = 1, 2, 3, \dots$$

Po zvolení $s = \nu$ dostávame

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)} a_0 \,,\ k = 1, 2, \dots$$

kde $\Gamma : (0,\infty) \to R$ je *gama funkcia* definovaná parametrickým integrálom ([1], [10])

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Ak ν je prirodzené číslo potom platí:

$$\Gamma(n + 1) = n! \,,\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0! = 1$$

Obvykle sa volí

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

a zodpovedajúce riešenie sa nazýva *Besselova funkcia prvého druhu rádu* ν a označuje $J_\nu(x)$, pričom na základe rekurentných vzťahov pre koeficienty platí

$$J_\nu(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

Uvedieme (bez dôkazu) niekoľko jednoduchých rekurentných vzťahov, ktoré spĺňajú Besselove funkcie

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$x J'_\nu(x) = x J_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)$$

$$x J'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)$$

Z ďalších vlastností Besselových funkcií uvedieme pre nás dôležitú vlastnosť rozloženia ich koreňov.

Tvrdenie 4.1 ([1], [19]).

Každá Besselova funkcia má nekonečne mnoho nulových bodov, ktoré sú jednoduché okrem bodu $x = 0$, ktorý môže byť aj viacnásobným nulovým bodom.

Podobne, ako sme formulovali Sturmovu-Liovilleovu úlohu pre rovnicu (3.1), sformulujeme túto úlohu aj pre (zovšeobecnenú) Besselovu rovnicu s parametrom

$$\lambda\, x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0, \ x > 0 \tag{3.5}$$

ktorú možno vyjadriť aj v tvare

$$(xy')' + \lambda xy - \frac{\nu^2}{x} y = 0, \ x > 0$$

Poznámka 4.1

Tvrdenia vety 4.1 platia za určitých predpokladov aj pre Sturmove-Liouvilleove úlohy na neohraničených intervaloch, alebo s funkciou $p(x)$ rovnou nule v jednom alebo v oboch krajných bodoch intervalu $\langle 0,a \rangle$. Okrajové podmienky v takýchto bodoch sa nahrádzajú podmienkami ohraničenosti v ich okolí.

Uvažujme Sturmovu-Liouvilleovu úlohu pre Besselovu rovnicu

$$(xy')' + \lambda xy - \frac{\nu^2}{x} y = 0 \,,\ 0 < x < a \tag{3.6}$$

s podmienkami

$$y(x) \text{ je ohraničená pre } x \to 0^+ \tag{3.7}$$

$$y(a) = 0 \tag{3.8}$$

Porovnaním rovníc (3.6), (3.5) s pôvodnou Besselovou rovnicou (3.1) vidíme, že vlastné funkcie tejto úlohy majú tvar

$$y(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda} x)$$

Podmienka (3.8) implikuje, že hľadané riešenie musí vyhovovať rovnici

$$J_\nu(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

Ak μ_n^ν sú korene rovnice

$$J_\nu(\mu_n^\nu) = 0 \,,\ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.9}$$

potom

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^\nu}{a} \right)^2 \,,\ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.10}$$

sú vlastné hodnoty a

$$y_n(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) \,,\ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.11}$$

im zodpovedajúce vlastné funkcie úlohy (3.6), (3.7), (3.8).

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom vlastností ortogonality a úplnosti systému vlastných funkcií z vety 4.1.

Tvrdenie 4.2

Nech $\nu \ge 0$ je ľubovoľné. Ak μ_n^ν, $n = 1, 2, \dots$; sú riešenia rovnice

$$J_\nu(\mu_n^\nu) = 0$$

potom

$$\int_0^a x J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) J_\nu\left(\frac{\mu_m^\nu}{a} x \right) dx = 0 \quad \text{pre} \quad m \ne n$$

t.j. funkcie $\{J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x)\}$ sú ortogonálne s váhou x .

Ak $n = m$, vtedy

$$\left\| J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) \right\|^2 = \int_0^a x \left[J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) \right]^2 dx =$$

$$= \frac{a^2}{2}\,[J'_\nu(\mu_n^\nu)]^2 = \frac{a^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\mu_n^\nu)]^2$$

Fourierov rad každej integrovateľnej funkcie $f: \langle 0,a\rangle \rightarrow R$ podľa ortogonálneho systému $\{J_\nu(\sqrt{\lambda_n}\,x)\}$ konverguje v strede s váhou x na intervale $(0,a)$ k funkcii f.

CVIČENIA 4.3

V úlohách 1 - 4 nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie nasledujúcich Sturmových-Liouvilleových úloh:

1. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$
2. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X'(1) = 0$
3. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$
4. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(1) + X'(1) = 0$
5. Nájdite rozvoj funkcie $1 - x^2$ na intervale $0 < x < 1$ podľa vlastných funkcií $J_0(\sqrt{\lambda_k^0}\,x)$ Sturmovej-Liouvilleovej úlohy

$$(xy')' + \lambda x u = 0 \ , \ 0 < x < 1$$
$$u(1) = 0 \ , \ u \ \text{je ohraničená}$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.3

1. $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \sin nx$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$
2. $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2$, $X_n(x) = \sin \frac{2n-1}{2}\pi x$, $n = 1, 2, 3, \dots$
3. $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \cos nx$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$
4. $\lambda_n = \mu_n^2$, $X_n(x) = \sin \mu_n x$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$, pričom μ_n sú riešenia rovnice $\operatorname{tg} \mu_n = -\mu_n$.
5. $1 - x^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_2(\sqrt{\lambda_k^0})\, J_0(\sqrt{\lambda_k^0}\,x)}{\lambda_k^0\, J_1^2(\sqrt{\lambda_k^0})}$.

Návod: použite vzťah $\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x)$ a integráciu per partes.

4.4 ÚLOHY NA KRUHU

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením úloh s Laplaceovým operátorom na kruhu alebo jeho časti.

Laplaceov operátor v kartézskych súradniciach má tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a ak zavedieme polárne súradnice

$$x = r \cos \varphi \ , \ y = r \sin \varphi$$

môžeme ho vyjadriť v tvare

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Riešme Dirichletovu okrajovú úlohu na kruhu s polomerom a :

$$\Delta u = 0 \ , \ x^2 + y^2 < a^2 \qquad (4.1)$$

$$u(x,y) = f(x,y) \ , \ x^2 + y^2 = a^2 \qquad (4.2)$$

Po prenásobení Laplaceovho operátora v polárnych súradniciach funkciou r^2, má OÚ (4.1), (4.2) tvar

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \ , \ 0 \le r < a, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (4.3)$$

$$u(a,\varphi) = f(\varphi) \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (4.4)$$

$$u(r,0) = u(r,2\pi) \ , \ 0 < r < a \qquad (4.5)$$

Podmienka (4.5) vyjadruje spojitosť riešenia, rovnako predpokladáme aj spojitosť funkcie f na jeho hranici, a teda aj splnenie vzťahu $f(0) = f(2\pi)$.

Hľadajme riešenie rovnice (4.3) v tvare $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Metódou separácie premenných dostaneme

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

odkiaľ

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \qquad (4.6)$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \qquad (4.7)$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad (4.8)$$

Riešme najprv úlohu (4.7), (4.8). Aby existovalo jej <u>nenulové</u> riešenie, musí byť $\lambda \ge 0$. Ak $\lambda = 0$, riešením potom je ľubovoľná konštanta

$$\Phi_0(\varphi) = A_0$$

Ak $\lambda > 0$, všeobecné riešenie rovnice (4.7) má tvar

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

a z podmienky (4.8) dostávame

$$\sqrt{\lambda} = n \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

Dosadením hodnôt $\lambda := \lambda_n = n^2$ do rovnice (4.6) dostaneme rovnice

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0 \tag{4.9}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všeobecné riešenie rovníc (4.8) má tvar

$$R_0(r) = C + D\ln r \ , \ r > 0 \tag{4.10}$$

$$R_n(r) = Cr^n + Dr^{-n} \ , \ r > 0 \ , \ n = 1, 2, \dots \tag{4.11}$$

(Rovnica (4.9) je typ Eulerovej rovnice a substitúciou $r = e^t$ ju možno transformovať na ODR 2. rádu s konštantnými koeficientmi) ([10], [18]).

Aby riešenie pôvodnej Laplaceovej rovnice bolo ohraničené v kruhu polomeru a, musí mať riešenie rovnice (4.8) vlastnú limitu pre $r \to 0+$, a teda v (4.10) a (4.11) kladieme $D = 0$.

Potom riešenia rovnice (4.3) dostávame v tvare

$$u_n(r,\varphi) = Cr^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Riešenie okrajovej úlohy (4.3), (4.4), (4.5) vyjadríme v tvare radu

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \tag{4.12}$$

Z okrajovej podmienky (4.4) dostaneme vzťahy

$$f(\varphi) = u(a,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$

odkiaľ z teórie Fourierových trigonometrických radov

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \ , \ b_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$$

Riešenie danej úlohy má potom tvar

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi +$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[\left(\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\right)\cos n\varphi + \left(\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\right)\sin n\varphi\right]$$

Druhá úloha, ktorou sa budeme zaoberať, je úloha o priečnom kmitaní tenkej kruhovej elastickej membrány s polomerom a, keď uvažujeme iba osovo-symetrický ohyb. Laplaceov operátor nezávisí v tomto prípade od premennej φ, to znamená, že jeho tvar je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Ak predpokladáme, že membrána v čase $t = 0$ má tvar, ktorý je daný funkciou $f(r)$, začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou a na okraji $r = a$ je pevná, potom ZOÚ pre jej pohyb môžeme sformulovať takto:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \ , \ r < a \ , \ t > 0 \\ u(r,0) &= f(r) \ , \ 0 \le r \le a \\ u_t(r,0) &= 0 \ , \ 0 \le r \le a \\ u(a,t) &= 0 \ , \ t \ge 0 \\ \lim_{r\to 0+} u(r,t) &< \infty \end{aligned} \tag{4.13}$$

Posledná podmienka znamená, že vyžadujeme, aby riešenie bolo v bode $r = 0$ ohraničené. Riešenie opäť vyjadríme najprv v tvare

$$u(r,t) = R(r)T(t)$$

Po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme:

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

a ďalej

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{4.14}$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \tag{4.15}$$

Rovnica (4.14) môže byť vyjadrená v tvare

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \lambda rR = 0 \tag{4.16}$$

a spolu s podmienkami

$$R(a) = 0 \tag{4.17}$$

$$\lim_{r\to 0} R(r) < \infty \tag{4.18}$$

dostaneme Sturmovu-Liovilleovu úlohu pre Besselovu rovnicu nultého rádu. Z predchádzajúcej časti vieme, že jej riešením je postupnosť vlastných hodnôt

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2 \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.19}$$

a vlastných funkcií

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a}r\right) \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.20}$$

kde J_0 je Besselova funkcia rádu 0 a

$$J_0(\mu_n^0) = 0 \ , \ n = 1, 2, 3, \dots$$

pričom

$$0 < \mu_1^0 < \mu_2^0 < \mu_3^0 < \dots$$

Dosadením $\lambda = \lambda_n$ do (4.15) dostaneme rovnice

$$T_n'' + \lambda_n c^2 T_n = 0 \,, \ \lambda_n > 0, \ n = 1,\ 2,\ \dots \tag{4.21}$$

Všeobecné riešenie rovnice (4.21) je potom vzhľadom na (4.19)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct$$

a riešenie ZOÚ (4.13) má tvar radu

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)\left(A_n \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct\right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

za predpokladu, že rad konverguje. Derivovaním radu (4.22) podľa t dostaneme:

$$u_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)\left(-A_n \frac{\mu_n^0}{a} \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \frac{\mu_n^0}{a} \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct\right)$$

Z podmienky $u_t(r,0) = 0$ vyplýva $B_n = 0$. Riešenie má potom tvar

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct \tag{4.23}$$

Koeficienty A_n určíme zo začiatočnej podmienky

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)$$

odkiaľ

$$A_n = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) dr}{\int_0^a r \left[J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) \right]^2 dr} = \frac{2\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) dr}{a^2 \, [J_1(\mu_n^0)]^2} \tag{4.24}$$

Potom riešenie úlohy (4.13) je dané radom (4.23) s koeficientmi (4.24).

Integrály vo formule pre koeficienty A_n možno vyjadriť analyticky len pre niektoré špeciálne typy funkcií f , vo všeobecnosti treba pri výpočte použiť niektorú numerickú metódu. Hodnoty Besselovej funkcie J_0 možno nájsť v tabuľkách Besselových funkcií.

CVIČENIA 4.4

1. Metódou separácie premenných nájdite riešenie ZOÚ pre rovnicu kmitania kruhovej membrány s polomerom R , ktorá je upevnená na okraji , v čase $t = 0$ má tvar rotačného paraboloidu a začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_{tt} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \ r < R \,, \ t > 0$$

$$u(r,0) = A\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \ 0 \le r \le R$$

$$u_t(r,0) = 0 \,, \ 0 \le r \le R$$

$$u(R,t) = 0 \,, \ t \ge 0$$

$$\lim_{r \to 0+} u(r,t) < \infty$$

2. Metódou separácie premenných nájdite riešenie ZOÚ pre rovnicu kmitania kruhovej membrány s polomerom R , upevnenej na okraji a kmitajúcej v prostredí, odpor ktorého je úmerný jej rýchlosti. Začiatočný tvar membrány je daný funkciou $\varphi(r)$ a začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_{tt} + 2hu_t = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1\partial u}{r\partial r} \right), \ r < R \,, \ t > 0 \quad \text{(h je malé číslo)}$$

$u(0,t)$ je konečná , $u(R,t) = 0$

$$u(r,0) = \varphi(r) \,, \ 0 \le r \le R$$

$$u_t(r,0) = 0 \,, \ 0 \le r \le R$$

3. Nájdite rozdelenie teploty vo vnútri nekonečného kruhového valca s polomerom R , keď začiatočná teplota valca je rovná $u(r,0) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ a bočná plocha valca sa udržiava pri nulovej teplote.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_t = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \ 0 < r < R \,, \ t > 0$$

$u(r,t)$ ohraničená, $u(R,t) = 0$

$$u(r,0) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \ 0 \le r \le R$$

4. Nájdite riešenie Laplaceovej rovnice vnútri kruhového výseku $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le \alpha$, ktoré spĺňa OP

$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0 \,, \ u(R,\varphi) = A\varphi$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.4

1. $u(r,t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \dfrac{\mu_n}{R} ct$, kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$

2. $u(r,t) = \dfrac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht}\left(\cos \alpha_n t + \dfrac{h}{\alpha_n} \sin \alpha_n t\right) \dfrac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R s\varphi(s) J_0\left(\dfrac{\mu_n s}{R}\right) ds$

kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$ a $\alpha_n = \left(\dfrac{c^2\mu_n^2}{R^2} - h^2\right)^{1/2}$

3. $u(r,t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-(\mu_n c/R)^2 t}$, kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$.

4. $u(r,\varphi) = \dfrac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\dfrac{r}{R}\right)^{n\pi/\alpha} \dfrac{\sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n}$. Návod: zaveďte polárne súradnice.

4.5 ÚLOHY NA OBDĹŽNIKU

Už v predchádzajúcej časti 4.4 sme skúmali eliptickú úlohu s dvoma priestorovými premennými a hyperbolickú úlohu s dvoma priestorovými a jednou časovou premennou. V prípadoch prvej úlohy sme nemali žiadne ťažkosti so separáciou dvoch premenných, potrebovali sme iba vyriešiť trochu odlišnú úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie. V druhom prípade nám situáciu zjednodušilo to, že sme sa obmedzili iba na osovosymetrickú úlohu, a tak sme vlastne zredukovali dve priestorové premenné na jednu - polomer kruhu. V tejto časti budeme riešiť obdobu Sturmovej-Liouvilleovej úlohy na obdĺžniku, a nie na intervale ako doteraz. Táto úloha je dôležitá pri riešení ZOÚ hyperbolického a parabolického typu s dvoma priestorovými premennými a jednou časovou premennou na obdĺžnikových oblastiach.

Skúmajme teda úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie pre Laplaceov operátor na obdĺžniku $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle$.

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \qquad (5.1)$$

pričom $\lambda > 0$ s podmienkami:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 \ , \ 0 \le y \le b \\ u(a,y) &= 0 \ , \ 0 \le y \le b \end{aligned} \qquad (5.2)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \ , \ 0 \le x \le a \\ u(x,b) &= 0 \ , \ 0 \le x \le a \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Rovnica (5.1) sa nazýva (homogénna) Helmholtzova rovnica. Úlohu (5.1)-(5.3) budeme riešiť metódou separácie premenných. Riešenie hľadáme v tvare

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

a po dosadení do rovnice (5.1) dostaneme:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

kde $\mu > 0$. Teda musíme vyriešiť Sturmovu-Liovilleovu úlohu

$$X'' + \mu X = 0$$

s podmienkami

$$X(0) = 0 \ , \ X(a) = 0$$

Jej riešením je množina vlastných hodnôt

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 , \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

a im zodpovedajúcich vlastných funkcií

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

Ostáva nám ešte vyriešiť druhú rovnicu

$$\frac{Y''}{Y} = -(\lambda - \mu_k)$$

Nech $\gamma = \lambda - \mu_k > 0$. Riešime teda Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$Y'' + \gamma Y = 0$$

$$Y(0) = 0 \ , \ Y(b) = 0$$

ktorej riešením je množina vlastných hodnôt:

$$\gamma_n = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

a im zodpovedajúcich vlastných funkcií

$$Y_n(y) = B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Tak dostávame, že

$$\lambda = \lambda_{kn} = \mu_k + \gamma_n = \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

t.j.

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] , \ k = 1, 2, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

sú vlastné hodnoty a

$$u_{kn}(x,y) = c_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} , \ k = 1, 2, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

($c_{kn} = A_k B_n$) zodpovedajúce vlastné funkcie.

Druhý problém, ktorý budeme riešiť, je dvojrozmerný problém vedenia tepla v tenkej obdĺžnikovej doske. Uvažujme obdĺžnikovú dosku so stranami dĺžky a , b , ktorá je tepelne izolovaná od svojho okolia na stranách $x = 0$ a $x = a$. Ostatné dve strany sa udržiavajú pri nulovej teplote. Nech začiatočné rozdelenie teploty v doske je dané funkciou $f(x,y)$. Hľadáme riešenie ZOÚ:

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0 \tag{5.4}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) \ , \ 0 \le x \le a \ , \ 0 \le y \le b \tag{5.5}$$

$$u_x(0,y,t) = 0 \tag{5.6}$$

$$u_x(a,y,t) = 0 \tag{5.7}$$

$$u(x,0,t) = 0 \tag{5.8}$$

$$u(x,b,t) = 0 \tag{5.9}$$

Danú úlohu budeme riešiť metódou separácie premenných. Pretože hľadaná funkcia $u(x,y,t)$ je funkciou dvoch priestorových a jednej časovej premennej, riešenie budeme hľadať v tvare

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t)$$

Po dosadení do rovnice (p.4) dostaneme

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{T'}{KT} = -\lambda$$

kde $\lambda > 0$. Odkiaľ dostaneme dve rovnice

$$T' + \lambda KT = 0 \tag{5.10}$$

$$\Delta U + \lambda U = 0 \tag{5.11}$$

Úloha (5.11) s podmienkami:

$$U_x(0,y) = 0 \ , \ U_x(a,y) = 0$$

$$U(x,0) = 0 \ , \ U(x,b) = 0$$

je podobná s predchádzajúcou úlohou, túto úlohu nebudeme podrobne riešiť, čitateľ sa môže podobným spôsobom ako v predchádzajúcej úlohe presvedčiť, že

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] , \ k = 0, 1, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

sú vlastné hodnoty a

$$u_{kn}(x,y) = a_{kn} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} , \ k = 0, 1, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

sú zodpovedajúce vlastné funkcie. Dosadením $\lambda = \lambda_{kn}$ do (5.10) dostávame riešenie rovnice (5.10) v tvare

$$T_{kn}(t) = C\, e^{-[(k/a)^2 + (n/b)^2]\pi^2 Kt}$$

Potom riešenie rovnice vedenia tepla na obdĺžniku, ktoré spĺňa okrajové podmienky (5.5) - (5.9), môžeme napísať v tvare

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} e^{-[(k/a)^2 + (n/b)^2]\pi^2 Kt} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.12}$$

(5.12) je dvojitý Fourierov rad, ktorého koeficienty sú:

$$a_{0n} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, dxdy \tag{5.13}$$

a pre $k \ge 1$

$$a_{0n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dxdy \tag{5.14}$$

Teda riešenie rovnice vedenia tepla v obdĺžniku je dané vzťahom (5.12) s koeficientmi (5.13) a (5.14).

CVIČENIA 4.5

1. Metódou separácie premenných riešte ZOÚ kmitania štvorcovej membrány, votknutej po svojom obvode, ktorá v čase $t = 0$ má tvar $Axy(b - x)(b - y)$ a začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Matematická formulácia tohto problému je takáto:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \ , \ 0 < x < b \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0$$

$$u(0,y,t) = u(b,y,t) = 0 \ , \ 0 \le y \le b \ , \ t > 0$$

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \le x \le b \ , \ t > 0$$

$$u(x,y,0) = Axy(b - x)(b - y)$$
$$u_t(x,y,0) = 0$$

2. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie OÚ:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < l \ , \ 0 < y < h$$
$$u(0,y) = u(l,y) = 0 \ , \ 0 \le y \le h$$
$$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,h) - \alpha u_y(x,h) = 0 \ , \ 0 \le x \le l \ , \ \alpha = \text{const}$$

3. Riešte ZOÚ:

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \ , \ 0 \le y \le b$$
$$u(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$$
$$u(x,y,0) = x(a-x)y$$

4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie úlohy:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \ 0 \le y \le b$$
$$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,b) + u_y(x,b) = 0 \ , \ 0 \le x \le b$$

5. Riešte ZOÚ

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0$$
$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \ , \ 0 \le y \le b \ , \ t > 0$$
$$u_y(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \le x \le b \ , \ t > 0$$
$$u(x,y,0) = x(a - x)(b - y)^2$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.5

1. $$u(x,y,t) = \frac{64Ab^4}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{b}\pi x \sin \frac{2n+1}{b}\pi y}{(2k+1)^3(2n+1)^3} \times$$
$$\times \cos \sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}\, \frac{c\pi t}{b}$$

2. $$\lambda_{kn} = \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{h}\right)^2 \ , \ k \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$u_{kn}(x,y) = \sin \frac{k\pi}{l}x \sin \frac{\mu_n}{h}y$, kde μ_n sú korene rovnice $\operatorname{tg}\mu_n = \frac{\alpha}{h}\mu_n$.

3. $u(x,y,t) =$

$$= \frac{64a^2b}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{b}\pi x \sin \frac{2n+1}{2b}\pi y}{(2k+1)^3(2n+1)^2} e^{-((2k+1)\pi/a)^2 + ((2n+1)\pi/2b)^2)Kt}$$

4. $\lambda_{kn} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{b}\right)^2$, $k, n = 1, 2, 3, \ldots$ a μ_n sú korene rovnice

$\operatorname{tg} \mu_n = -\frac{b}{\mu_n}$ a $u_{kn}(x,y) = \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\mu_n y}{b}$.

5. $$u(x,y,t) = -\frac{32a^2b^2}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2k+1)^3(2n+1)^3} \times$$
$$\times e^{-[((2k+1)\pi/a)^2 + ((2n+1)\pi/2b)^2]Kt}.$$

4.6 NEHOMOGÉNNE ÚLOHY

Riešenie nehomogénnych parciálnych diferenciálnych rovníc budeme demonštrovať na najjednoduchších ZOÚ pre parabolickú a hyperbolickú rovnicu. Uvažujme nehomogénnu rovnicu vedenia tepla a nehomogénnu rovnicu kmitania struny, t.j. hľadaná funkcia u bude závisieť iba od jednej priestorovej premennej

$$\left.\begin{matrix} u_t(x,t) \\ u_{tt}(x,t) \end{matrix}\right\} = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{6.1}$$

Funkcia $f(x,t)$ vyjadruje vnútorné zdroje tepla v prípade parabolickej rovnice vedenia tepla a kolmý tlak na strunu v prípade hyperbolickej rovnice kmitania struny.

Najprv uvažujme rovnice (6.1) s homogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix} u(x,0) = 0 \\ u(x,0) = 0 \;,\; u_t(x,0) = 0 \end{matrix}\right\} ,\; 0 \le x \le a \tag{6.2}$$

a s okrajovými podmienkami

$$\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0 \;,\; t \ge 0 \tag{6.3}$$

$$\gamma u(a,t) + \delta u_x(a,t) = 0 \;,\; t \ge 0 \tag{6.4}$$

Riešenie na základe vety 4.1 môžeme rozvinúť do Fourierovho radu podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií $\{X_n\}$ Sturmovej - Liouvilleovej úlohy

$$X'' + \lambda X = 0 \;,\; 0 < x < a$$

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0$$

$$\gamma X(a) + \delta X'(a) = 0$$

ktorú dostaneme metódou separácie premenných z homogénnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Teda riešenie hľadáme v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)\, X_n(x) \tag{6.5}$$

kde

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a u(x,t)\, X_n(x)\, dx \tag{6.6}$$

Funkciu $f(x,t)$ rozvinieme do Fourierovho radu podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií $\{X_n\}$ a označíme:

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a f(x,t)\, X_n(x)\, dx \tag{6.7}$$

Vzťahy (6.5) a (6.7) dosadíme do rovnice (6.1) a dostaneme rovnosť dvoch Fourierových radov. Porovnaním koeficientov pri členoch funkciách $X_n(x)$

dostávame systém rovníc:

$$\left.\begin{matrix} \Psi_n'(t) \\ \Psi_n''(t) \end{matrix}\right\} = -\lambda_n \Psi_n(t) + f_n(t) \tag{6.8}$$

s doplňujúcimi podmienkami pre parabolickú rovnicu:

$$\Psi_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a u(x,0)\, X_n(x)\, dx = 0$$

a pre hyperbolickú rovnicu

$$\Psi_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a u(x,0)\, X_n(x)\, dx = 0$$

$$\Psi_n'(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a u_t(x,0)\, X_n(x)\, dx = 0$$

Tak dostávame nehomogénne lineárne obyčajné diferenciálne rovnice, ktoré už vieme riešiť . V prípade parabolickej rovnice máme

$$\Psi_n(t) = \int_0^t f_n(s)\, e^{-\lambda_n (t-s)} ds \tag{6.9}$$

a v prípade hyperbolickej rovnice riešenie je

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t - s)\, ds \tag{6.10}$$

Teda riešením ZOÚ pre parabolickú resp. hyperbolickú nehomogénnu rovnicu je rad (6.5) s funkciami $\Psi_n(t)$ definovanými vzťahom (6.9) pre parabolickú a vzťahom (6.10) pre hyperbolickú rovnicu.

ZOÚ pre parabolickú alebo hyperbolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\left.\begin{matrix} u_t(x,t) \\ u_{tt}(x,t) \end{matrix}\right\} = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \;,\; 0 < x < a \tag{6.11}$$

s nehomogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix} u(x,0) = \Phi(x) \\ u(x,0) = \Phi(x) \;,\; u_t(x,0) = \Phi_1(x) \end{matrix}\right\} ,\; 0 \le x \le a \tag{6.12}$$

a s okrajovými podmienkami (6.3) a (6.4) riešime tak, že riešenie hľadáme v tvare súčtu dvoch funkcií

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{6.13}$$

pričom funkcia $v(x,t)$ je riešením úlohy

$$\left.\begin{matrix} v_t(x,t) \\ v_{tt}(x,t) \end{matrix}\right\} = c^2 v_{xx}(x,t) \;,\; 0 < x < a \tag{6.14}$$

so začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix} v(x,0) = \Phi(x) \\ v(x,0) = \Phi(x) \;,\; v_t(x,0) = \Phi_1(x) \end{matrix}\right\} ,\; 0 \le x \le a \tag{6.15}$$