a s okrajovými podmienkami (6.3) , (6.4) a funkcia $w(x,t)$ je riešením úlohy:

$$\left.\begin{array}{l} w_t(x,t) \\ w_{tt}(x,t) \end{array}\right\} = c^2 w_{xx}(x,t) + f(x,t) \ , \ 0 < x < a \tag{6.16}$$

s homogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{array}{l} w(x,0) = 0 \\ w(x,0) = 0 \ , \ w_t(x,0) = 0 \end{array}\right\} , \ 0 \le x \le a \tag{6.17}$$

a s okrajovými podmienkami (6.3) a (6.4) . Obe úlohy už vieme riešiť.

Pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií, ktoré sme dostali ako riešenie Helmholtzovej rovnice v časti 4.5, budeme riešiť nasledujúcu nehomogénnu eliptickú OÚ:

$$\Delta u = f(x,y) \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \tag{6.18}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \ , \ 0 < x < a \tag{6.19}$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \ 0 < y < b \tag{6.20}$$

Rovnica (6.18) sa nazýva Poissonova rovnica a jej fyzikálna interpretácia je napr. priehyb obdĺžnikovej membrány, ktorá je upevnená na všetkých okrajoch a na ktorú pôsobí kolmo vonkajšia sila $f(x,y)$. Riešením úlohy:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \ , \ 0 < x < a$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \ 0 < y < b$$

sme dostali vlastné hodnoty

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \ , \ k = 1, 2, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

a vlastné funkcie

$$u_{kn}(x,y) = c_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \ , \ k = 1, 2, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

Riešenie úlohy (6.18) - (6.20) budeme hľadať v tvare

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Funkciu $f(x,y)$ rozvinieme do dvojitého Fourierovho radu podľa vlastných funkcií u_{kn} :

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

kde

$$f_{kn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dxdy$$

Po dosadení oboch vzťahov do rovnice (6.18) a porovnaní koeficientov pri u_{kn} máme:

$$-\lambda_{kn} a_{kn} = f_{kn} \ , \ k = 1, 2, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

odkiaľ

$$a_{kn} = -\frac{f_{kn}}{\lambda_{kn}}$$

a riešenie úlohy dostávame v tvare dvojitého radu

$$u(x,y) = -\frac{4ab}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy}{(k^2 b^2 + n^2 a^2)} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

CVIČENIA 4.6

1. Homogénna struna s dĺžkou a votknutá na koncoch $x = 0$, $x = a$ kmitá pôsobením vonkajšej harmonickej sily dĺžkovej hustoty $F(x,t) = \rho f(t) \sin \omega t$. Nájdite riešenie rovnice kmitania struny ak uvažujeme ľubovoľné začiatočné podmienky. Uvažujte možnosť rezonancie a nájdite riešenie úlohy v tomto prípade. Formulácia úlohy:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x) \sin \omega t \ , \ 0 < x < a$$
$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$$
$$u(x,0) = \Phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \Phi_1(x) \ , \ 0 \le x \le a$$

Riešte začiatočno-okrajové úlohy:

2. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + b \sinh x \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$
$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + bx(x - a) \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$
$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

4. $u_{tt} = u_{xx} + x(x - a)t^2 \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$
$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

5. $u_t = c^2 u_{xx} + A\omega \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \cos \omega t \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$
$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$
$u(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

6. $u_t = u_{xx} + x(a-x)t\ ,\ 0 < x < a\ ,\ t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0\ ,\ t > 0$

$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le a$

Riešte okrajové úlohy:

7. $\Delta u = y(1-y)\sin^3 x\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$

8. $\Delta u = \sin x - \sin^3 x\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 < y < 2$

$u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0$

$u(0,y) = u(\frac{\pi}{2},y) = 0$

9. $\Delta u = -2y\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$

$u(x,0) = u(x,1) = 0$

$u(0,y) = u(1,y) = 0$

10. $\Delta u = x^2 - y^2\ ,\ 0 < x < a\ ,\ 0 < y < a$

$u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0$

$u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.6

1. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{a}\ ,\ \text{kde}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a\Phi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\ ,\ b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^a\Phi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\ ,\ \omega_n = \frac{cn\pi}{a}$$

Rezonancia nastáva v tom prípade, ak frekvencia ω vonkajšej budiacej sily je rovná jednej z vlastných frekvencií

$$\omega = \omega_{n_1} = \frac{cn_1\pi}{a}$$

V tom prípade dostaneme riešenie

$$u(x,t) = \frac{f_{n_1}}{2\omega_{n_1}^2}(\sin\omega_{n_1}t - t\omega_{n_1}t)\sin\frac{n_1\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{f_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{a}\ ,\ \text{kde}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ znamená, že zo sumy vylúčime člen $n = n_1$.

2. $$u(x,t) = \frac{2ba^2\sinh a}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2\pi^2+a^2)}\left[1-\cos\frac{n\pi ct}{a}\right]\sin\frac{n\pi x}{a}$$

3. $$u(x,t) = 8\left(\frac{a}{\pi}\right)^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^2(2n+1)^5}\left[1-\cos\frac{(2n+1)c\pi t}{a}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

4. $$u(x,t) = -\frac{8a^4t^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^5} + \frac{16a^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^7} + \frac{16a^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{a}}{(2n+1)^7}$$

5. $$u(x,t) = \frac{2A\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\pi c)^2 e^{-((n\pi c/a)^2 t} - (n\pi c)^2\cos\omega t - \omega a^2\sin\omega t}{n[(n\pi c)^2 + a^2\omega^2]}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

6. $$u(x,t) = \frac{4a^3}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-((2n+1)\pi/a)^2 t} + t(2n+1)\pi - a}{(2n+1)^5}\sin\frac{2n+1}{a}x$$

7. $$u(x,y) = \frac{3}{\pi^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3(n^2\pi^2+1)}\sin n\pi y\right)\sin x + \frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3(n^2\pi^2+9)}\sin n\pi y\right)\sin 3x$$

8. $$u(x,y) = -\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{36}\sin 3x$$

9. $$u(x,y) = \frac{4}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2k+1)\pi x\sin n\pi y}{(2k+1)^2 n[(2k+1)^2+n^2]}$$

10. $$u(x,y) = 4\left(\frac{a}{\pi}\right)^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4}\cos\frac{k\pi x}{a} - 4\left(\frac{a}{\pi}\right)^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos\frac{n\pi y}{a}$$

LITERATÚRA

[1] Arsenin,V.J.: Matematická fyzika. Bratislava, Alfa 1977.

[2] Barták,J.- Hermann,L.- Lovicar,J.- Vejvoda,O.: Parciální diferenciální rovnice II: Evoluční rovnice. MVŠT XXI. Praha, SNTL 1988.

[3] Bock,I.: Matematická fyzika. Bratislava, ES STU 1987.

[4] Bock,I.- Horniaček,J.: Matematická analýza III. Bratislava, Alfa 1990.

[5] Brabec,J.- Martan,F.- Rozenský,Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.

[6] Brabec,J.- Hrůza,B.: Matematická analýza II. Praha, SNTL 1986.

[7] Galanová,J.- Gatial,J.- Kaprálik,P.: Lineárna algebra. Bratislava, ES STU 1991.

[8] Greguš,M.- Švec,M.-Šeda,W.: Obyčajné diferenciálne rovnice. Bratislava, Alfa-SNTL 1985.

[9] Havel,V.- Holenda,J.: Lineární algebra. Praha, SNTL-Alfa 1984.

[10] Kluvánek,I.- Mišík,L.- Švec,M.: Matematika I, II. Bratislava, Alfa 1963.

[11] Kurzweil,J.: Obyčejné diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1978.

[12] Míka,S.- Kufner,A.: Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. MVŠT XIX. Praha, SNTL 1981.

[13] Míka,S.- Kufner,A.: Parciální diferenciální rovnice I:Stacionární rovnice. MVŠT XX. Praha, SNTL 1983. scientists and engineers. New York, North Holland 1987.

[14] Moravský,L.- Moravčík,J.- Šulka,R.:Matematická analýza II. Bratislava, Alfa 1992.

[15] Nagy,J.: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. MVŠT IX. Praha, SNTL 1978.

[16] Nagy,J.: Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. MVŠT XV. Praha, SNTL 1980.

[17] Putzer,E.J.: Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. Amer. Math. Monthly, 73, Jan.1966, s.2-7.

[18] Šulka,R.- Moravský,L.- Satko,L.: Matematická analýza I. Bratislava, Alfa-SNTL 1986.

[19] Vladimirov, V.S.: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Moskva, Nauka 1981.

OBSAH