

SPOJITOSŤ FUNKCIE

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny A . Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a .

Definícia. Nech $\emptyset \neq M \subset A$. Ak funkcia $f: A \rightarrow R$ je spojitá v každom bode množiny M , tak hovoríme, že f je spojitá na množine M . Ak $M = A$, tak hovoríme, že f je spojitá.

Veta. Nech $f, g: A \rightarrow R$ sú spojité funkcie v bode $a \in A$. Potom aj funkcie $f + g, f \cdot g, |f|: A \rightarrow R$ sú spojité a $a \in A$. Ak $a \in B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$, tak aj $\frac{f}{g}: B \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode a .

Poznámka. Všetky elementárne funkcie sú spojité.

Veta. Nech $f: A \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode $a \in A$, $g: B \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode $b = f(a) \in B$. Potom zložená funkcia $g \circ f: A \rightarrow R$ je spojitá v bode a .

VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCIÍ

Nech $a, b \in R$, $a < b$, $f: A \rightarrow R$, $\langle a, b \rangle \subset A$.

Definícia. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak $f|_{\langle a, b \rangle}$ je spojitá funkcia.

Veta. Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak na $\langle a, b \rangle$ nadobúda minimum a maximum.

Veta. Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$.

Veta. Nech I je interval a f je spojitá funkcia na I . Potom $f(I)$ je buď jednoruková množina alebo interval.

Veta. Nech I, J sú intervaly a $f: I \rightarrow J$ je spojitá bijekcia. Potom $f^{-1}: J \rightarrow I$ je spojitá funkcia.

DERIVÁCIA FUNKCIE

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny A . Ak existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, tak číslo $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode a . Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a .

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $A_1 = \{x \in A : \exists f'(x)\} \neq \emptyset$. Funkcia $f': A_1 \rightarrow R$, ktorá bodu $x \in A_1$ priradí $f'(x)$, sa nazýva derivácia funkcie f , hovoríme, že f je diferencovateľná na množine A_1 . Ak f' je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je spojite diferencovateľná na A_1 .

Veta(Nutná podmienka diferencovateľnosti v bode). Ak funkcia $f: A \rightarrow R$ má deriváciu v bode $a \in A$, tak je v bode a spojitá.

Derivácie elementárnych funkcií

$[c]' = 0$	$x \in R, c \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1}$	$x \in R, n \in N$
$[e^x]' = e^x$	$x \in R$
$[\ln x]' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$[a^x]' = a^x \ln a$	$x \in R, a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, \infty), a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in (0, \infty), \alpha \in R \setminus \{0\}$
$[\sin x]' = \cos x$	$x \in R$
$[\cos x]' = -\sin x$	$x \in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$[\operatorname{arcotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Veta (Derivácia súčtu, súčinu, podielu funkcií). *Nech $f, g: A \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie, nech $c \in R$. Potom $cf, f+g, f \cdot g: A \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie a platí:*

$$\begin{array}{ll}
 (a) & [cf]' = cf' \\
 (b) & [f+g]' = f' + g' \\
 (c) & [f \cdot g]' = f'g + fg'
 \end{array}$$

Ak $\forall x \in A: g(x) \neq 0$ tak funkcia $\frac{f}{g}: A \rightarrow R$ je diferencovateľná a platí:

$$(d) \quad \left[\frac{f}{g} \right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Veta (Derivácia zloženej funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R, g: B \rightarrow R, f(A) \subseteq B$ a nech f, g sú diferencovateľné funkcie. Potom $g \circ f: A \rightarrow R$ je diferencovateľná funkcia a platí:*

$$[g \circ f]' = (g' \circ f)f'.$$

Veta (Derivácia inverznej funkcie). *Nech I, J sú intervaly, $f: I \rightarrow J$ je diferencovateľná bijekcia. Potom inverzná funkcia $f^{-1}: J \rightarrow I$ je diferencovateľná v bodoch $y \in J$: $(f' \circ f^{-1})(y) \neq 0$ a platí:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Veta (Dotyčnica ku grafu funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom dotyčnica ku grafu funkcie v bode $T = (a, f(a))$ je daná rovnicou*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV

$$\begin{array}{llll} \text{Nech} & f^{(0)}: A \rightarrow R & f^{(0)} = f & \\ & f^{(1)}: A_1 \rightarrow R & f^{(1)} = f' & \emptyset \neq A_1 \subseteq A \\ & f^{(2)}: A_2 \rightarrow R & f^{(2)} = f'' & \emptyset \neq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A \\ & \vdots & \vdots & \\ & f^{(n)}: A_n \rightarrow R & f^{(n)} = (f^{(n-1)})' & \emptyset \neq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq A \end{array}$$

Funkcia $f^{(n)}$ sa nazýva derivácia n -tého rádu funkcie f . Hovoríme, že f je n -krát diferencovateľná na A_n . Ak $f^{(n)}$ je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je n -krát spojitě diferencovateľná na A_n .

VLASTNOSTI DIFERENCOVATEĽNÝCH FUNKCIÍ

Rolleova veta. *Nech f má nasledujúce vlastnosti:*

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovateľná na (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$.

Lagrangeova veta (Veta o prírastku funkcie).

Nech f má nasledujúce vlastnosti:

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovateľná na (a, b) .

Potom $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Cauchyho veta. *Nech f, g majú nasledujúce vlastnosti:*

1. sú spojitě na $\langle a, b \rangle$,
2. sú diferencovateľné na (a, b) a $\forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0$.

Potom $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

L'HOSPITALOVE PRAVIDLÁ

Veta " $\left(\frac{0}{0}\right)$ ". Nech $f, g: A \rightarrow R$, $a \in R^*$ je hromadný bod A , nech

(a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,

(b) $\forall x \in A \setminus \{a\}: g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$,

(c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

Veta " $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ ". Nech $f, g: A \rightarrow R$, $a \in R^*$ je hromadný bod A , nech

(a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.