Domáca úloha cvičenie 10 - riešenie

DÚ: Vyjadrite explicitne n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takej, že $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$, kde $a_1 = \frac{1}{2}$. Určte hodnotu a_n pre $n = 999$. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Riešenie:

Vyjadrime niekoľko prvých členov postupnosti $\{a\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = a_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = a_2 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$a_4 = a_3 + \frac{1}{20} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15}{20} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$
$$\vdots$$

Z toho: $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ zrejme platí $a_n = \frac{n}{n+1}$, pretože: $a_1 = \frac{1}{2}$. Nech $a_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, ukážeme, že $a_n = \frac{n}{n+1}$:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Hodnota a_n pre $n = 999$ teda bude: $a_{999} = \frac{999}{1000} = 0{,}999$.

Vypočítajme limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$