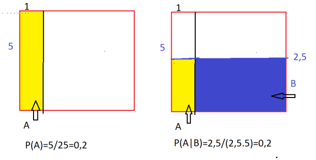
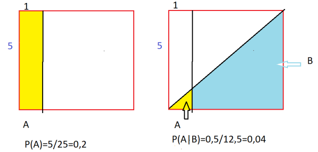
Podmienená pravdepodobnosť

Oľga Nánásiová
ÚIM FEI STU, Bratislava

2023



$$P(A) = 0,2 = P(A|B) = 0,04$$



$$P(A) = 0,2 \neq P(A|B) = 0,04$$

Kolmogorov, Andrey (1950) [1933]. Foundations of the theory of probability. New York, USA: Chelsea Publishing Company.

Definícia

Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor,* $A, B \in \mathcal{S}$. *Ak* $P(A) > 0$, *potom*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

nazývame podmienená pravdepodobnosť náhodnej udalosti B *za podmienky nastatia náhodnej udalosti* A.

Funkcia $P(.|A)$ je pravdepodobnosť a istá udalosťou je A. Ak $A = \Omega$, tak

$$P(.|A) = P(.|\Omega) = P(.).$$

Ak $\mathcal{S}_P = \{E \in \mathcal{S}; P(E) > 0\}$, tak

$$P(.|.) : \mathcal{S} \times \mathcal{S}_p \to [0, 1].$$

(funkcia dvoch premenných)

A. Rényi 1954

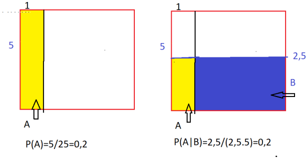
Definícia

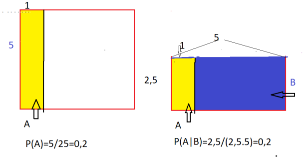
Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor. Potom funkciu* $P(.|.) : \mathcal{S} \times \mathcal{S}_P \to [0,1]$ *s vlastnosťami:*

1. $P(A|A) = 1$ *pre* $\forall A \in \mathcal{S}_P$;
2. $P(\cup_i B_i|A) = \sum_i P(B_i|A)$ *kde* $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $A \in \mathcal{S}_P$;
3. $P(B| \cup_i A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i| \cup_i A_i)$ *kde* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $A_i \in \mathcal{S}_P$ *pre* $\forall i$;

budeme nazývať podmienená pravdepodobnosťou vzhľadom na pravdepodobnosť P.

Obe definície sú ekvivalentné.


1
5
A
P(A)=5/25=0,2
1
5
2,5
B
A
P(A|B)=2,5/(2,5.5)=0,2


1
5
A
P(A)=5/25=0,2
2,5
5
1
B
A
P(A|B)=2,5/(2,5.5)=0,2

$$P(A) = 0,2 = P(A|B)$$

Definícia

Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor a* $A, B \in \mathcal{S}$. *Potom A a B nazývame nezávislé náhodné udalosti vzhľadom na pravdepodobnosť P (nezávislé), ak platí:*

$$P(B|A) = P(B|\Omega) \quad (= P(B)).$$

Tvrdenie

Ak $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor a* $A, B \in \mathcal{S}$, *ak* $P(A), P(A^c) > 0$ *potom platí:*

1. $$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c);$$
2. $$P(A \cap B) = P(A)P(B|A);$$
3. $$P(B|A) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(B^c|A) = P(B^c);$$
4. $$P(B|A) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(B|A^c) = P(B);$$
5. A, B *sú nezávislé práve vtedy, ak* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Dôkaz 1. $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$, ak $P(A), P(A^c) > 0$:

Nech $A, B \in \mathcal{S}$ a $P(A), P(A^c) > 0$. Pretože

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

a navyše

$$(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \emptyset,$$

tak

$$\begin{aligned} P(B) =& P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A)\frac{P(A \cap B)}{P(A)} + P(A^c)\frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\ =& P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c). \end{aligned}$$

Dôkaz 2. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$, ak $P(A) > 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B|A)P(A) = P(A \cap B).$$

Dôkaz 3. $P(B|A) = P(B)$ práve vtedy ak $P(B^c|A) = P(B^c)$, pre $P(A) > 0$:

$$P(A) = \overbrace{P(A \cap B)}^{P(A)P(B)} + P(A \cap B^c) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c)$$

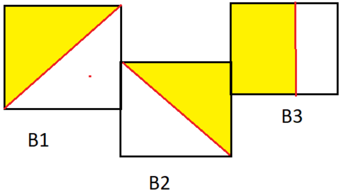
$$P(A) - P(A)P(B) = P(A \cap B^c)$$

$$P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c) = P(A \cap B^c)$$

$$P(A)P(B^c) = P(A \cap B^c) \quad / \cdot 1/P(A)$$

$$P(B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} = P(B^c|A)$$

Dôkaz 4 a 5 je dobrovoľná DÚ



Aká je pravdepodobnosť, že náhodne trafíme žltú časť ?

Vieme:
P(B1)=0,3 P(B2)=0.4
P(B3)=0,3

P(A|B1)=0,5 P(A|B2)=0,5 P(A|B3)=0,7

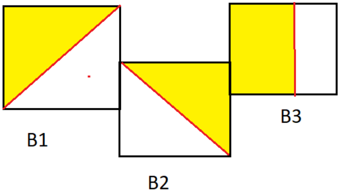
$$P(A) = \underbrace{P(A \cap B1)}_{P(B1)P(A|B1)} + P(A \cap B2) + P(A \cap B3)$$

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,56$$

Veta

(**Veta o úplnej pravdepodobnosti**)
Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}_P$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Ak $\cup_i A_i = \Omega$, potom pre $\forall B \in \mathcal{S}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$



Aká je pravdepodobnosť, že ak trafíme žltú časť, trafili sme B1?
P(B1|A)=?

Vieme:
P(B1)=0,3 P(B2)=0.4
P(B3)=0,3

P(A|B1)=0,5 P(A|B2)=0,5 P(A|B3)=0,7 , potom P(A)=0,56

$$P(B1|A) = \frac{P(A \cap B1)}{P(A)} = \frac{P(A|B1)P(B1)}{P(A)}$$

$$P(B1|A) = \frac{0,5}{0,56} = 0,892857...$$

Bayesova veta

Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor.
Nech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}_P$ s vlastnosťou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ a navyše platí $\cup_i A_i = \Omega$. Potom pre $\forall B \in \mathcal{S}_P$ a $\forall k = 1, 2, \ldots$ platí

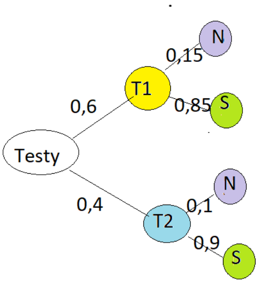
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

Príklad

Máme dva rôzne testy T1 a T2. Každý z nich dá niekedy nespravny výsledok. Pravdepodobnosť, že T1 dá nesprávny výsledok je 15% a druhý 10%. Urobili sme 100 testov v pomere:

$$T1 - 60 \text{ krát} \qquad a \qquad T2 - 40 \text{ krát}.$$

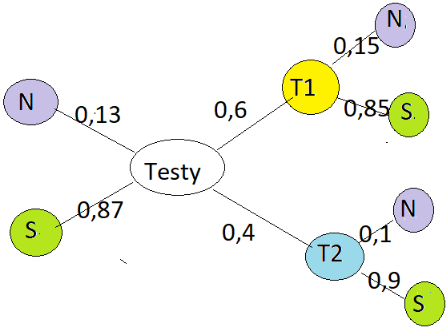
a1) Aká je pravdepodobnosť, že výsledok testu je správny.
a2) Test dopadol nesprávne, aká je pravdepodobnosť, že pokus bol robený testom T1?



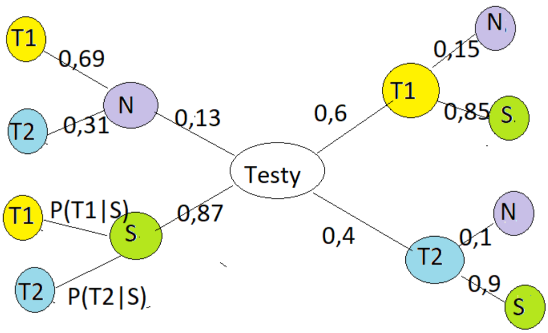
$$P(T1) = 0,6, \quad P(T2) = 0,4.$$

$$P(N|T1) = 0,15 \quad P(N|T2) = 0,1.$$

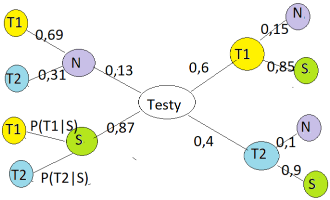
P(N)=0,15.0,6+0,1.0,4=0,13



P(T1|N)=0,15.0,6/0,13=9/13=0,6923



P(T1|N)=0,15.0,6/0,13=9/13=0,6923



$$P(T1|S) = \frac{0,85 \cdot 0,6}{0,6 \cdot 0,85 + 0,4 \cdot 0,9} = \frac{0,51}{0,87} = 0,5862$$

$$P(T2|S) = 1 - P(T1|S) = 0,4138$$

Príklad

Hádžeme kockou a kocka je regulárna. Zaujímajú nás nasledujúce náhodné udalosti:

A: padne číslo medzi 1 a 6 vrátane; *B: padne* 6;

C: padne párne číslo; *D: padne nepárne číslo;*

E: padne číslo menšie ako 5; *H: padne číslo menšie ako* 3.

Zistite, ktoré z nasledujúcich dvojíc náhodných udalostí sú nezávislé:

(a1) A, B; *(a2)* C, D; *(a3)* E, D; *(a4)* E, H.

A: padne číslo medzi 1 a 6 vrátane; B: padne 6;
(a1) A, B:

$$A = \{1, ..., 6\} \qquad \text{a} \qquad B = \{6\}:$$

$$P(A) = P(\{1, ..., 6\}) = 1 \qquad \text{a} \qquad P(A|B) = 1.$$

Teda A a B sú nezávislé ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$).

C: padne párne číslo; D: padne nepárne číslo;

(a2) C, D

$$C = \{2, 4, 6\} \qquad \& \qquad D = \{1, 3, 5\},$$

tak

$$P(C) = P(\{2, 4, 6\} = 0,5$$

a

$$P(C \cap D) = P(\emptyset) = 0 \neq P(C)P(B) = 0,25.$$

Teda C a D nie sú nezávislé

(a3)

D: padne nepárne číslo;
E: padne číslo menšie ako 5;

(a3) D, E

Pretože

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \& \qquad D = \{1, 3, 5\},$$

tak

$$P(E) = 2/3 \qquad \& \qquad P(D) = 1/2$$

$$P(E \cap D) = P(\{1, 3\}) = \frac{1}{3} = P(E)P(D).$$

Teda E a D sú nezávislé.

(a4)

E: padne číslo menšie ako 5;
H: padne číslo menšie ako 3.

(a4) E, H

Pretože

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$H = \{1, 2\},$$

tak

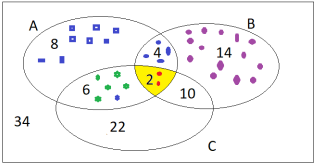
$$H \subset E$$

a

$$P(E|H) = 1 \neq P(E).$$

Teda E a H nie sú nezávislé.

A, B, C sú po dvoch nezávislé, nie sú totálne nezávislé



$|A|=20$ $P(A)=0{,}2$

$|B|=30$ $P(B)=0{,}3$

$|C|=40$ $P(C)=0{,}4$

všetky prvky Ω

$|\Omega|=100$

$$P(A\cap B)=0,06=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=0,08=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=0,12=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=0,02\neq P(A)P(B)P(C)=0,2\cdot 0,3\cdot 0,4=0,024$$