Náhodné udalosti a pravdepodobnosť

1 Náhodné udalosti:

- **istá udalosť** Ω – množina všetkých možných výsledkov pokusu.
- $\omega \in \Omega$ sa nazýva **elementárna náhodná udalosť** – ľubovoľný prvok množiny Ω.
- $A \subseteq \Omega$ sa nazýva **náhodná udalosť** – podmnožina množiny Ω.
- $\emptyset$ sa nazýva **nemožná udalosť**.

Výroková logika a náhodné udalosti

- A a súčasne $B <-> A \cap B$.
- A alebo $B <-> A \cup B$
- A neplatí $<-> A^c = \{\omega \in \Omega; \quad \omega \notin A\}$.

Vlastnosti:

1. $(A^c)^c = A$;
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
6. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.
7. ak $A \subseteq B$, tak $B^c \subseteq A^c$.

vskip 1pc

Definícia 1:
Nech Ω je neprázdna množina; Systém podmnožín $\mathcal{S}$ množiny Ω s vlastnosťami:

(s1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$;

(s2) ak $A \in \mathcal{S}$, potom $A^c \in \mathcal{S}$;

(s3) ak $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$, potom $\cup_i A_i \in \mathcal{S}$;

sa nazýva *množinová σ-algebra*.

Definícia 2:
Nech Ω je neprázdna množina a a $\mathcal{S}$ je jej množinová σ-algebra. Potom dvojica $(\Omega, \mathcal{S})$ sa nazýva merateľný priestor.

Tvrdenie 1:
Nech $(\Omega, \mathcal{S})$ je merateľný priestor. Potom pre $\forall A, B \in \mathcal{S}$ platí, že $A \cap B \in \mathcal{S}$.

Dôkaz. Nech $A, B \in \mathcal{S}$. Potom z (s2) vyplýva, že $A^c, B^c \in \mathcal{S}$. Teda z (s3) dostaneme, že $A^c \cup B^c \in \mathcal{S}$. Z (s2) vyplýva, že $(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{S}$. Pretože pre množiny platí $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$, tak $A \cap B \in \mathcal{S}$. •

Príklad 1:
Nech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zistite, ktoré z nasledujúcich systémov podmnožín Ω tvoria σ-algebru:
a) $\mathcal{S}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$;
b) $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$;
c) $\mathcal{S}_3 = \{\Omega, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$;
d) $\mathcal{S}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.

Riešenie pr. 1: a) a d) Systémy podmnožín $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_4$ sú σ-algebry.
b) $\mathcal{S}_2$ nie je σ-algebra, pretože tam chýba Ω.
c) $\mathcal{S}_3$ nie je σ-algebra, pretože chýbajú napríklad množiny $\{1, 3\}, \{1, 4\}$.

Príklad 2:
Nech $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ a $(\Omega, \mathcal{S})$ je merateľný priestor. Ukážte, že ak $\{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4\} \in \mathcal{S}$, potom $\{3,4\} \in \mathcal{S}$.

Riešenie pr. 2: Ak $\{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4\} \in \mathcal{S}$, potom z (s2) vyplýva, že $\{1,2\}, \{5,6\} \in \mathcal{S}$. Z (s3) vyplýva, že, $\{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\} \in \mathcal{S}$. Nakoniec z (s2) dostaneme, že $\{1,2,5,6\}^c = \{3,4\} \in \mathcal{S}$.

Poznámka 1:
Ak Ω je nejaká neprázdna množina, potom symbolom 2^Ω sa označuje systém všetkých podmnožín množiny Ω.

Príklad 3:
Nech $\Omega = \{1,2,3\}$. Napíšte všetky prvky 2^Ω.

Riešenie pr. 3: $2^\Omega = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

2 Pravdepodobnosť

Definícia 3:
Nech $\Omega \neq \emptyset$ a $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny Ω. *Pravdepodobnostná miera* (resp. pravdepodobnosť) sa nazýva funkcia $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ s vlastnosťami:

(p1) $P(\Omega) = 1$;

(p2) ak $A_k \in \mathcal{S}$, $k = 1,2,\ldots$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, potom $P(\cup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$.

Definícia 4:
Nech $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny Ω a P je pravdepodobnosť. Potom trojicu $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazývame *pravdepodobnostný priestor.*

Pre pravdepodobnostnú mieru platí veľa užitočných vlastností. Uvedieme si len niektoré. Skúste dokázať, že platí:

Tvrdenie 2: Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je nejaký pravdepodobnostný priestor. Potom platí:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. pre $\forall A \in \mathcal{S}$ platí $P(A^c) = 1 - P(A)$;
3. ak $A \subseteq B$, potom $P(A) \leq P(B)$;
4. pre $\forall A, B \in \mathcal{S}$ platí $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$;
5. pre $\forall A, B \in \mathcal{S}$ platí $P((A^c \cap B^c)) = 1 - P(A \cup B)$;
6. pre $\forall A, B \in \mathcal{S}$ platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nech B je nejaká množina. Symbolom $|B|$ sa označuje počet prvkov (*kardinalita*) množiny B.

Poznámka 2:
Nech $\Omega \neq \emptyset$, $|\Omega| = n < \infty$ a $\mathcal{S} = 2^\Omega$. Potom funkcia $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ definovaná vzťahom: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ má vlastnosti pravdepodobnostnej miery a $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je pravdepodobnostný priestor. V tomto prípade platí, že $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ pre $\forall \omega \in \Omega$.

Ide o špeciálny prípad pravdepodobnostného priestoru, ktorý sa používa pomerne často.

Príklad 4:
V ročníku je 100 študentov, z toho 10 z nich má krstné meno Jozef a 15-tim z nich sa krstné meno začína na M. Každý z nich má práve jedno krstné meno. Náhodne vyberieme jedného študenta. Vypočítajte:
a1) Aká je pravdepodobnosť, že sa bude volať Jozef?
a2) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta bude Jozef, alebo sa bude začínať na písmeno M?
a3) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a bude sa začínať na písmeno M?
a4) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a nebude sa začínať na písmeno M?

Riešenie pr. 4: Nech Ω je množina všetkých študentov z ročníka, A je množina tých študentov z ročníka, ktorých krstné meno je Jozef a B je množina všetkých študentov z ročníka, ktorých krstné meno sa začína na písmeno M. Vieme, že

$$|\Omega| = 100, \quad |A| = 10, \quad |B| = 15, \quad A \cap B = \emptyset$$

a každý zo študentov má rovnakú pravdepodobnosť, že bude vybraný. To znamená, že $P(\{\omega\} = 0,01$, pre $\forall \omega \in \Omega$ a preto platí:
a1) $P(A) = 10/100 = 0,1$.
a2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,1 + 0,15 = 0,25$;
a3) Pretože $A \cap B = \emptyset$, tak $B \subset A^c$. Teda

$$P(B \cap A^c) = P(B) = 0,15;$$

a4) Pretože $B^c \cap A^c = (A \cup B)^c$, tak

$$P(B^c \cap A^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,75.$$

(Všimnime si, že platí $G(A \cup B) = G(A) + G(B) - 1 = 0,9 + 0,85 - 1 = 0,75$.)

Príklad 5:
Hádžeme hracou kockou, ktorej steny sú označené číslami $1, 2, \cdots, 6$ a výsledok nevidíme. Výsledok oznamujú dvaja asistenti X a Y podľa nasledujúcich pravidiel:
X : A ak padne číslo menšie ako 4, B ak padne číslo väčšie ako 3.
Y : C ak padne párne číslo, a D ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu Ω a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

Riešenie pr. 5: Označme Ω_0 množinu všetkých možných výsledkov na hracej kocke. To znamená, že

$$\Omega_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

a $P_0(\omega) = 1/6$ pre $\forall \omega \in \Omega_0$. Z hľadiska výsledku hodu teda máme pravdepodobnostný priestor $(\Omega_0, 2^{\Omega_0}, P_0)$.

Ak zapíšeme hlásenie asistentov ako usporiadané dvojice (X, Y), potom $\Omega = \{(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)\}$. To znamená, že $|\Omega| = 4$ a

$$\begin{aligned}
P(\{(A, C)\} &= P_0(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\}) = P_0(\{2\}) = \frac{1}{6}, \\
P(\{(A, D)\} &= P_0(\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}) = P_0(\{1, 3\}) = \frac{2}{6}, \\
P(\{(B, C)\} &= P_0(\{4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6\}) = P_0(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}, \\
P(\{(B, D)\} &= P_0(\{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\}) = P_0(\{5\}) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Trojica $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je pravdepodobnostný priestor, kde $|\Omega| = 4$ a ak označíme $\omega_1 = (A, C)$, $\omega_2 = (A, D)$, $\omega_3 = (B, C)$ a $\omega_4 = (B, D)$, potom platí

$$P(\omega_1) = P(\omega_4) = \frac{1}{6}, \quad P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

Príklad 6:
Modifikujme príklad 5 nasledovne: Máme dve kocky a každý z asistentov hlási výsledok na svojej kocke podľa nasledujúcich pravidiel:
X : A ak padne číslo menšie ako 4, B ak padne číslo väčšie ako 3.
Y : C ak padne párne číslo, a D ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu Ω a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

Riešenie pr. 6: Označme Ω_X a Ω_Y množiny všetkých možných výsledkov na hracích kockách. Teda $\Omega_X = \Omega_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a pre každé $\omega_X \in \Omega_X$ a pre každé $\omega_Y \in \Omega_Y$ platí:

$$P_X(\omega_X) = P_Y(\omega_Y) = \frac{1}{6}.$$

Máme dva pravdepodobnostné priestory: $(\Omega_X, 2^{\Omega_X}, P_X)$, $(\Omega_Y, 2^{\Omega_Y}, P_Y)$ a platí

$$P_X(A) = P_X(B) = P_Y(C) = P_Y(D) = \frac{1}{2}.$$

Všetky možné výsledky dvoch hodov sú uvedené v tabuľke 1.

Ω_X/Ω_Y	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Tab. 1: Všetky možné výsledky pri hode dvomi kockami (Pr. 6)

Ak zapíšeme hlásenie asistentov ako usporiadané dvojice (X, Y), potom $\Omega = \{(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)\}$ a $|\Omega| = 4$. V tabuľke 2 sú uvedené všetky možné prípady:

Ω_X/Ω_Y	D	C	D	C	D	C
A	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)
A	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)
A	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)	(A, D)	(A, C)
B	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)
B	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)
B	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)	(B, D)	(B, C)

Tab. 2: Všetky možné hlásenia asistentov (X, Y) (Pr. 6)

Pretože každá z dvojích v tabuľke má rovnakú pravdepodobnosť nastatia, tak

$$P((A, C)) = P((A, D)) = P((B, C)) = P((B, D)) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Trojica $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je pravdepodobnostný priestor, kde $|\Omega| = 4$ a ak označíme $\omega_1 = (A, C)$, $\omega_2 = (A, D)$, $\omega_3 = (B, C)$ a $\omega_4 = (B, D)$, potom platí

$$P(\omega_1) = P(\omega_4) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}.$$

Poznámka 3:
Pre lepšie pochopenie problematiky je dobré si porovnať príklady 5 a 6.

3 Kombinatorická pravdepodobnosť

Kombinatorickou pravdepodobnosťou nazývame pravdepodobnosť, ktorú počítame pomocou kombinatoriky. Najskôr si vysvetlíme základné pojmy.

Definícia 5:
Nech A je množina a $|A| = n$. Potom *permutácia* sa nazýva každá usporiadaná n-tica pozostávajúca z navzájom rôznych prvkov množiny A.

Nech $|A| = n$, $n > 0$. Koľko n-tíc môžeme zostaviť z prvkov množiny A, ak každý prvok smieme použiť práve raz? Máme teda n-prázdnych políčok, na ktoré budeme postupne umiestňovať prvky z množiny A. Hľadáme všetky permutácie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in A$ a pre $\forall i \neq j$ platí $x_i \neq x_j$.

Postup: Ak začneme tvoriť n-tice od prvého políčka, tak na prvé políčko máme n možností, na druhé $n-1$ možností atď., až nakoniec na posledné políčko nám zostane práve jeden prvok. Takže máme $n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1$ rôznych n-tíc. Číslo ktoré dostaneme, označíme $n!$ a voláme *n-faktoriál.* To znamená, že

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1$$

a $0! = 1$.

Príklad 7:
Napíšte všetky trojciferné čisla, ktoré sa dajú zostaviť z čísel $1, 2, 3$ tak, že každé číslo použijeme práve raz.

Riešenie pr. 7: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Definícia 6:
Nech A je množina a $|A| = n$. Potom skupina k-prvkov bez ohľadu na usporiadanie v skupine ($k \leq n$), pričom každý prvok sa môže vyskytovať v skupine len raz, sa volá *kombinácia k-tej triedy z n rôznych prvkov bez opakovania.*

Ak $|A| = n$ a Ω je množina všetkých kombinácií k-tej triedy bez opakovania prvkov z množiny A, potom

$$|\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Číslo $\binom{n}{k}$ voláme *kombinačné číslo.*

Príklad 8:
Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom množina všetkých dvojíc čísel z množiny A, pričom každé číslo môže byť použité najviac jedenkrát, je

$$\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

a

$$|\Omega| = \binom{3}{2} = \frac{3!}{3!\cdot 1!} = 3.$$

Príklad 9:
Máme skupinu piatich študentov

$$A = \{\text{Boris (B), Elena (E), Igor (I), Jana (J), Táňa (T)}\}$$

Zistite, koľko dvojíc a koľko trojíc z nich je možno zostaviť a vypíšte ich.

Riešenie pr. 9: Pretože $|A| = 5$ a $k_1 = 2$ a $k_2 = 3$. Potom počet všetkých dvojíc je

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10.$$

a počet všetkých trojíc je

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10.$$

Označme Ω_1 množinu všetkých možných dvojíc študentov a Ω_2 množinu všetkých možných trojíc študentov. Potom

$$\Omega_1 = \{BE, BI, BJ, BT, EI, EJ, ET, IJ, IT, JT\}$$

a

$$\Omega_2 = \{BEI, BEJ, BET, BIJ, BIT, BJT, EIJ, EIT, EJT, IJT\}.$$

Definícia 7:
Nech A je množina a $|A| = n$. Potom skupina k-prvkov z množiny A bez ohľadu na usporiadanie v skupine, pričom prvky množiny A sa môžu v skupine opakovať, sa volá *kombinácia k-tej triedy z n-rôznych prvkov s opakovaním.*

Ak $|A| = n$ a Ω je množina všetkých kombinácii k-tej triedy s opakovaním prvkov z množiny A, tak

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Príklad 10:
Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom

$$\Omega = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,2\}\{2,3\}, \{3,3\}\}.$$

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2} = 6.$$

Príklad 11:
Máme k dispozícii 10 vzoriek vody označených $v_1 \ldots, v_{10}$. Náhodne vyberieme 3 vzorky. Aká je pravdepodobnosť, že vyberieme $\{v_1, v_3, v_6\}$?

Riešenie pr. 11: Množina $A = \{v_1 \ldots, v_{10}\}$ a množina Ω je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny A tak, že na poradí nezáleží. To znamená, že

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8}{3.2} = 120.$$

Keďže každá z trojíc má rovnakú pravdepodobnosť vytiahnutia, tak

$$P(\{v_1, v_3, v_6\}) = \frac{1}{120}.$$

Príklad 12:
Traja kontrolóri čistiarní odpadových vôd majú urobiť v jeden deň po jednej kontrole. Čistiarní je 10. Každý si náhodne vyberie jednu. Aká je pravdepodobnosť, že všetci budú kontrolovať tú istú čistiareň?

Riešenie pr. 12: Množina $A = \{c_1, \ldots, c_{10}\}$ a množina Ω je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny A tak, že na poradí nezáleží. To znamená, že

$$|\Omega| = \binom{10+3-1}{3} = \frac{12!}{3!.7!} = 220.$$

Počet trojíc typu $\{c_i, c_i, c_i\}$, $i = 1, \ldots, 10$ je 10, teda

$$P(\{\{c_i, c_i, c_i\}; \quad i = 1, \ldots, 10\}) = \frac{10}{220} = 0{,}045\overline{45}.$$

Definícia 8:
Nech A je množina a $|A| = n$. Potom usporiadaná k-tica ($k \leq n$) prvkov množiny A, pričom každý prvok môže byť v k-tici len raz, sa volá *variácia k-tej triedy z n-rôznych prvkov bez opakovania.*

Nech $|A| = n$, $n > 0$. Koľko k-tíc môžeme zostaviť z prvkov množiny A, ak každý prvok smieme použiť práve raz? Máme teda k prázdnych políčok, na ktoré budeme postupne umiestňovať prvky z množiny A. Hľadáme všetky permutácie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, kde $x_i \in A$ a pre $\forall i \neq j$ platí $x_i \neq x_j$.
Postup: Ak začneme tvoriť k-tice od prvého políčka, tak na prvé políčko máme n možností, na druhé $n-1$ možností atď., až nakoniec, pretože sme už použili $k-1$ prvkov na k-té políčko nám zostane $n-(k-1)$ prvkov. Takže máme $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot n-(k-1)$ rôznych k-tíc.

Teda ak označíme Ω množinu všetkých variácií k-tej triedy prvkov z množiny A, tak

$$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot n-(k-1) = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}.$$

Príklad 13:
Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom $\Omega = \{12, 21, 13, 31, 23, 32\}$ a

$$|\Omega| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Definícia 9:
Nech A je množina a $|A| = n$. *Variácia k-tej triedy z n-rôznych prvkov s opakovaním* sa nazýva usporiadaná k-tica prvkov množiny A, pričom prvky množiny A sa môžu v k-tici vyskytovať aj opakovane.

Ak $|A| = n$ a Ω je množina všetkých variácii k-tej triedy s opakovaním prvkov z množiny A, tak

$$|\Omega| = n^k.$$

Príklad 14:
Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom

$$\Omega = \{11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32\}$$

a $|\Omega| = 3^2 = 9$.

Príklad 15:
Kontrolór má urobiť 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom žiadnu nebude kotrolovať viackrát. Náhodne vyberie tri z nich. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať čistiarne odpadových vôd c_2, c_4, c_6 v poradí (c_2, c_6, c_4)?

Riešenie pr. 15: Množina $A = \{c_1 \ldots, c_{10}\}$ a množina Ω je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny A tak, že na poradí záleží. To znamená, že

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

a teda

$$P(\{(c_2, c_6, c_4)\}) = \frac{1}{720}.$$

Príklad 16:
Kontrolór má urobiť počas troch týždňov 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom môže kontrolovať tú istú viackrát. Náhodne vyberie tri. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať 3-krát tú istú čistiareň?

Riešenie pr. 16: Množina $A = \{c_1 \ldots, c_{10}\}$ a množina Ω je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny A tak, že na poradí záleží. To znamená, že

$$|\Omega| = 10^3$$

Počet trojíc typu (c_i, c_i, c_i), $i = 1, \ldots, 10$ je 10, teda

$$P(\{(c_i, c_i, c_i); \quad i = 1, \ldots, 10\}) = \frac{10}{1000} = 0,01.$$

Nech množina A pozostáva z n navzájom rôznych prvkov. V tabuľkách 3 a 4 sú zhrnuté jednotlivé prípady, ktoré riešia otázku:

Koľko k-tíc môžeme vytvoriť z prvkov množiny A, ak $|A| = n$?

Kombinatorika	Kombinácie nezáleží na poradí	Variácie záleží na poradí
Prvky sa nemôžu opakovať, ($k \leq n$)	Definícia 6	Definícia 8
Prvky sa môžu opakovať	Definícia 7	Definícia 9

Tab. 3: Kombinatorika – možnosti

Kombinatorika	Kombinácie nezáleží na poradí	Variácie záleží na poradí
Prvky sa nemôžu opakovať, ($k \leq n$)	$\binom{n}{k}$	$k! \cdot \binom{n}{k}$
Prvky sa môžu opakovať	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Tab. 4: Kombinatoricka – vzorce