

Cvičenie 6 – Dvojrozmerné náhodné veličiny

Kovariancia

$$\text{cov}(X,Y) = E(X*Y) - E(X)*E(Y)$$

Korelačný koeficient

$$\rho(X,Y) = \text{cov}(X,Y) / (D(X)*D(Y))^{1/2}$$

Veľmi povrchno povedané, kovariancia je polotovar na ďalšie výpočty.

Korelačný koeficient je miera lineárnej závislosti (pre začiatok) dvoch veličín.

Čím bližšie k 1, tým viac priama úmernosť,
čím bližšie k -1, tým viac nepriama úmernosť,
čím bližšie k 0, tým menej lineárne (!) závislé.

Niekoľko užitočných vzorcov, pomocou ktorých sa dá pracovať s disperziou a kovarianciou.

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{cov}(X,X) = D(X)$$

$$\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$$

$$\text{cov}(aX+b, Y) = a \text{cov}(X,Y)$$

$$\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Z)$$

$$D(X+Y) = D(X) + 2\text{cov}(X,Y) + D(Y)$$

Riešené príklady

Príklad 1:

V krabici je 10 myší, 7 samíc a 3 samce. Náhodne vyberieme 5 jedincov. Počet samcov vo výbere označíme m , počet samíc f . Príslušné náhodné veličiny nazveme M a F .

- Aké hodnoty nadobúdajú veličiny M a F ?
- Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre M a F osobitne.
- Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre jednotlivé dvojice hodnôt $[m, f]$.
- Vypočítajte kovarianciu a korelačný koeficient.

Riešenie:

a) M nadobúda hodnoty m v rozsahu 0 až 3. F nadobúda hodnoty f v rozsahu 2 až 5. Menej ako 2 sa nedá, lebo do počtu 5 sa to aspoň dvoma samicami musí doplniť.

b) Pravdepodobnosti budú mať v menovateli $C(10,5) = 252$.

0 samcov vo výbere = 5 samíc, vieme ich vybrať $C(7,5) = 21$ spôsobmi

1 samec vo výbere = aj 4 samice, vieme ich vybrať $C(3,1) \cdot C(7,4) = 105$ spôsobmi

2 samce vo výbere = aj 3 samice, vieme ich vybrať $C(3,2) \cdot C(7,3) = 105$ spôsobmi

3 samce vo výbere = aj 2 samice, vieme ich vybrať $C(3,3) \cdot C(7,2) = 21$ spôsobmi

M	0	1	2	3	spolu
P_M	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	1

Hodnoty v tabuľke pre F nemusíme počítat, už ich máme (ako, kde a prečo?) :

F	2	3	4	5	spolu
P_F	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	1

Prečo musia byť pravdepodobnosti v oboch tabuľkách rovnaké? Lebo M a F sú v tomto príklade navzájom úplne závislé. Ak poznáme hodnotu m , vieme presne určiť f a naopak – $m+f=5$.

c) Čistá závislosť sa prejaví aj v tabuľke združenej pravdepodobnostnej funkcie.

$F \setminus M$	0	1	2	3
2	0	0	0	$\frac{1}{12}$
3	0	0	$\frac{5}{12}$	0
4	0	$\frac{5}{12}$	0	0
5	$\frac{1}{12}$	0	0	0

d) Hádajme/počítajme postupne: $E(M) = 1.5$, $E(F) = 3.5$ (uhádnuté vďaka symetrii)

$$D(M) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1) / 12 - 1.5^2 = 7/12$$

$$D(F) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1) / 12 - 3.5^2 = 7/12$$

(pre M a F rovnaké hodnoty!)

$$\text{cov}(M, F) = (2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \cdot 1) / 12 - 1.5 \cdot 3.5 = -7/12$$

$$\rho(M, F) = -1$$

(čistá nepriama úmernosť)

Výsledok -1 sa dal očakávať.

Príklad 2:

V krabici je 8 myší, 4 čierne, 3 biele a 1 strakatá. Náhodne vyberieme 4 jedince. Počet čiernych vo výbere označíme **č**, počet bielych **b** a počet strakatých **s**. Príslušné náhodné veličiny nazveme Č, B a S.

- a) Aké hodnoty nadobúdajú veličiny Č, B a S?
 b) Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre Č, B a S osobitne.
 c) Zostavte pravdepodobnostné tabuľky pre jednotlivé dvojice hodnôt [č,b], [č,s], [b,s].

Riešenie:

- a) Č: č = 0,1,2,3,4
 B: b = 0,1,2,3
 S: s = 0,1

- b) Všetkých možností je spolu $C(8,4) = 70$.

0 čiernych vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať jediným spôsobom (všetky nečierne)

1 čierna vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $C(4,1) \cdot C(4,3) = 16$ spôsobmi

2 čierne vo výbere = aj 2 iné, vieme ich vybrať $C(4,2) \cdot C(4,2) = 36$ spôsobmi

3 čierne vo výbere = aj 1 iná, vieme ich vybrať $C(4,3) \cdot C(4,1) = 16$ spôsobmi

4 čierne vo výbere = žiadne iné, vieme ich vybrať $C(4,4) =$ jediným spôsobom

Č	0	1	2	3	4	spolu
P _č	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 bielych vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať $C(5,4) = 5$ spôsobmi

1 biela vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $C(3,1) \cdot C(5,3) = 30$ spôsobmi

2 biele vo výbere = aj 2 iné, vieme ich vybrať $C(3,2) \cdot C(5,2) = 30$ spôsobmi

3 biele vo výbere = aj 1 iná, vieme ich vybrať $C(3,3) \cdot C(5,1) = 5$ spôsobmi

B	0	1	2	3	spolu
P _b	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$	1

0 strakatých vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať $C(7,4) = 35$ spôsobmi

1 strakatá vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $1 \cdot C(7,3) = 35$ spôsobmi

S	0	1	spolu
P _s	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

c) Vzťah Č a B:

Potrebuje vyplniť tabuľku 5×4 . Začnime políčkami, kde bude nula, teda nemožné kombinácie.

Predovšetkým, ak ťaháme 4 myši, nie je možné aby počet bielych a čiernych vo výbere presiahol v súčte hodnotu 4. Do takých políčok vpišeme nulu.

Podobne, ak je strakatá iba 1, vo výbere 4 ks musia byť aspoň tri biele alebo čierne. Súčet $\check{c}+b$ musí byť preto nutne aspoň 3.

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0			
1	0	0			0	
2	0			0	0	
3			0	0	0	
spolu						

Ostalo nám vyplniť 8 políčok. Vieme, že v menovateli bude stále 70. Vyčíslime čitatele:

4 čierne a 0 bielych:	$C(4,4) = 1$
3 čierne a 0 bielych, doplnené 1 strakatou	$C(4,3) = 4$
3 čierne a 1 biela:	$C(4,3) * C(3,1) = 12$
2 čierne a 1 biela, doplnené 1 strakatou	$C(4,2) * C(3,1) = 18$
2 čierne a 2 biele:	$C(4,2) * C(3,2) = 18$
1 čierna a 2 biele, doplnené 1 strakatou	$C(4,1) * C(3,2) = 12$
1 čierna a 3 biele:	$C(4,1) * C(3,3) = 4$
0 čiernych a 3 biele, doplnené 1 strakatou	$C(4,0) * C(3,3) = 1$

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	
spolu						

Nakoniec urobíme kontrolné súčty po riadkoch a stĺpcoch.

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	$\frac{30}{70}$
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Výsledné (tzv. marginálne) súčty sú presne tie hodnoty, ktoré sme mali v tabuľkách v časti b). To samozrejme neprekvapuje. Ide zároveň o dobrú rýchlu kontrolu správnosti výpočtu. Pri troche skúseností môžeme do tabuľky vopred vyplniť marginálne súčty a ušetriť si počítanie.

Ukážeme si to na ďalšej tabuľke.

Vzťah S a Č:

Doplníme to tabuľky nuly – súčet č+s nesmie byť viac ako 4, ale zároveň nesmie byť 0 (lebo sú len 3 biele na doplnenie do 4). Ošáva 8 políčok na počítanie.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0					
1					0	
spolu						

Doplníme marginálne hodnoty.

Zároveň bez osobitného počítania vieme doplniť do tabuľky dve hodnoty.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0				$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$				0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 strakatých a 1 čierna, doplníme 3 biele: $C(4,1) \cdot C(3,3) = 4$

Napíšeme do tabuľky a hneď vieme doplniť aj hodnotu pod tým.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	$\frac{4}{70}$			$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$	$\frac{11}{70}$			0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 strakatých a 2 čierne, doplníme 2 biele: $C(4,2) \cdot C(3,2) = 18$

Napíšeme do tabuľky a hneď vieme doplniť aj hodnotu pod tým. Zároveň však už vieme vyplniť aj stĺpec vpravo.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Stačilo teda vyrátať 2 hodnoty z 8 a ostatné sa už len podopíňali.

Vzťah B a S:

Radi by sme doplnili do tabuľky nuly, ale také políčka tu aktuálne nie sú. Tak aspoň nahodíme marginálne súčty.

B \ S	0	1	spolu
0			$\frac{5}{70}$
1			$\frac{30}{70}$
2			$\frac{30}{70}$
3			$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

Budeme musieť vyrátať 3 hodnoty, ostatné sa budú dať doplniť.

Biele	Strakaté	Čierne	Možnosti:
0	0	4	$C(3,0) \cdot C(4,4) = 1$
1	0	3	$C(3,1) \cdot C(4,3) = 12$
2	0	2	$C(3,2) \cdot C(4,2) = 18$

B \ S	0	1	spolu
0	$\frac{1}{70}$		$\frac{5}{70}$
1	$\frac{12}{70}$		$\frac{30}{70}$
2	$\frac{18}{70}$		$\frac{30}{70}$
3			$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

Zvyšných 5 už vieme doplniť:

B \ S	0	1	spolu
0	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{30}{70}$
2	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

A je to.

Príklad 3

Pre dvojice B a S, B a Č nájdite kovarianciu a korelačný koeficient.

Riešenie:

Iba dosadíme do známych vzorcov.

Č	0	1	2	3	4	spolu
P _č	$1/70$	$16/70$	$36/70$	$16/70$	$1/70$	1

$$E(\check{C}) = 2$$

$$D(\check{C}) = (0*1 + 1*16 + 4*36 + 9*16 + 16*1) / 70 - 4 = 32/7 - 4 = 4/7$$

B	0	1	2	3	spolu
P _č	$5/70$	$30/70$	$30/70$	$5/70$	1

$$E(B) = 1.5$$

$$D(B) = (0*5 + 1*30 + 4*30 + 9*5) / 70 - 2.25 = 32/7 - 4 = 15/28$$

S	0	1	spolu
P _č	$35/70$	$35/70$	1

$$E(S) = 0.5$$

$$D(S) = (0*35 + 1*35) / 70 - 0.25 = 1/4$$

Dvojica B a S

Kovarianciu počítame z tabuľky združenej pravdepodobnostnej funkcie pre B a S.

B \ S	0	1	spolu
0	$1/70$	$4/70$	$5/70$
1	$12/70$	$18/70$	$30/70$
2	$18/70$	$12/70$	$30/70$
3	$4/70$	$1/70$	$5/70$
spolu	$35/70$	$35/70$	1

$$\text{cov}(B,S) = (0*0*1+0*1*12+0*2*18+0*3*4+1*0*4+1*1*18+1*2*12+1*3*1)/70 - 0.5*1.5 = -3/28$$

$$\rho(B,\check{C}) = \text{cov}(B,S) / (D(B)*D(S))^{1/2} = -3/(105)^{1/2} = -0.29$$

Korelačný koeficient hovorí o slabšej (úroveň 0.29 z max. 1) nepriamej úmernosti. V tabuľke je naznačená farebne.

Dvojica B a Č

Kovarianciu počítame z tabuľky združenej pravdepodobnostnej funkcie pre B a Č.

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	$\frac{30}{70}$
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Prejdeme sa po všetkých políčkach s nenulovou pravdepodobnosťou a tiež vynecháme prvý riadok a prvý stĺpec, v ktorých sa takisto násobí nulou.

$$E(B \cdot \check{C}) = (1 \cdot 2 \cdot 18 + 1 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 2 \cdot 18 + 3 \cdot 1 \cdot 4) / 70 = 18/7$$

$$\text{cov}(B, \check{C}) = E(B \cdot \check{C}) - E(B) \cdot E(\check{C}) = -3/7$$

Korelačný koeficient

$$\rho(B, \check{C}) = \text{cov}(B, \check{C}) / (D(B) \cdot D(\check{C}))^{1/2} = -(3/5)^{1/2} = -0.7746$$

Korelačný koeficient hovorí o nepriamej úmernosti, lineárna väzba má silu 0.77 z 1, zvyšných 0.23 je “šum”.

Príklad 4

Náhodná veličina (X,Y) je daná združenou funkciou hustoty nasledovne:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x+y & \text{na } [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Nájdite funkcie $f(x)$, $f(y)$ – analógie k marginálnym súčtom.

Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu samostatne pre X , Y .

Vypočítajte kovarianciu a korelačný koeficient pre dvojicu X a Y .

Riešenie:

Združená funkcia hustoty $f(x,y)$ je analógiou tabuľky združenej pravdepodobnostnej funkcie.

Funkcie hustoty pre samostatné veličiny X , Y musíme nájsť integrovaním ako analógiou k marginálnym súčtom.

$$f(x) = \int_{(0,1)} f(x,y) dy = \int_{(0,1)} 1-x+y dy = [(1-x)y + y^2/2]_0^1 = 3/2 - x$$

$$f(y) = \int_{(0,1)} f(x,y) dx = \int_{(0,1)} 1-x+y dx = [(1+y)x - x^2/2]_0^1 = 1/2 + y$$

$$E(X) = \int_{(0,1)} x \cdot f(x) dx = \int_{(0,1)} x \cdot (3/2 - x) dx = [0.75x^2 - x^3/3]_0^1 = 5/12$$

$$E(Y) = \int_{(0,1)} y \cdot f(y) dy = \int_{(0,1)} y \cdot (1/2 + y) dy = [0.25y^2 + y^3/3]_0^1 = 7/12$$

$$D(X) = \int_{(0,1)} x^2 \cdot f(x) dx - (5/12)^2 = 11/144$$

$$D(Y) = \int_{(0,1)} y^2 \cdot f(y) dy - (7/12)^2 = 11/144$$

$$\text{cov}(X,Y) = \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} xy(1-x+y) dx dy - 5/12 \cdot 7/12 = (36-35)/144 = 1/144$$

$$\rho(X,Y) = (1/144) / (11/144 \cdot 11/144)^{1/2} = 1/11 = 0.090909...$$

Vo vzťahu veličín X , Y môžeme konštatovať iba zanedbateľné stopy lineárnej závislosti – priamej úmernosti.

Príklad 5

- a) Dokážte, že platí $D(aX) = a^2 D(X)$
 $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$
- b) Dokážte, že platí $\text{cov}(X, U+V) = \text{cov}(X, U) + \text{cov}(X, V)$
- b) Zjednodušte $\text{cov}(aX+bY, cU+dV)$

Riešenie:

Postupujeme podľa vzorcov. Uvádzame detailný rozpis krokov, po porozumení princípu však bude zrejmé, že ide o samozrejmosti, ktoré nie je nutné takto otrocky vypisovať. Cieľom je, aby ste tomu rozumeli a zbytočne nevypisovali...

- a) $D(aX) = \text{cov}(aX, aX) = a \text{cov}(X, aX) = a \text{cov}(aX, X) = a^2 D(X)$
 $\text{cov}(aX, bY) = a \text{cov}(X, bY) = a \text{cov}(bY, X) = ab \text{cov}(Y, X) = ab \text{cov}(X, Y)$
- b) $\text{cov}(X, U+V) = \text{cov}(U+V, X) = \text{cov}(U, X) + \text{cov}(V, X) = \text{cov}(X, U) + \text{cov}(X, V)$
- c) $\text{cov}(aX+bY, cU+dV) = \text{cov}(aX, cU+dV) + \text{cov}(bY, cU+dV) =$
 $= \text{cov}(aX, cU) + \text{cov}(aX, dV) + \text{cov}(bY, cU) + \text{cov}(bY, dV) =$
 $= ac \text{cov}(X, U) + ad \text{cov}(X, V) + bc \text{cov}(Y, U) + bd \text{cov}(Y, V)$

Na zapamätanie si všetkých pravidiel stačí, ak si predstavíte cov ako násobenie a D ako druhú mocninu. Všetky úpravy majú rovnaký charakter ako tradičné roznásobovanie a umocňovanie.

Príklad 6

Je daná dvojica náhodných veličín X, Y. Vieme, že

$$D(X)=1.21, \quad D(Y)=0.96, \quad \text{cov}(X, Y) = 1$$

Vypočítajte, čomu sa rovná

- a) $D(2X-Y)$
- b) $\text{cov}(2X+Y, X-2Y)$

Riešenie:

- a) $D(2X-Y) = \text{cov}(2X-Y, 2X-Y) = 4D(X) - 4\text{cov}(X, Y) + D(Y) = 4.84 - 4 + 0.96 = 1.8$
- b) $\text{cov}(2X+Y, X-2Y) = 2D(X) - 3\text{cov}(X, Y) - 2D(Y) = 2.42 - 3 \cdot 1 - 1.92 = -2.5$

Ak treba, napíšte si postup úprav po menších krokoch.

Neriešené príklady

1. Vo vrecku sú (na hmat zhodné) kocky – 5 bielych, 3 zelené a 2 modré. Naslepo ťaháme 4 kocky. Sledovanými veličinami sú

B – počet bielych kociek,

Z – počet zelených kociek

M – počet modrých kociek vo výbere.

a) Aké hodnoty nadobúdajú B, Z, M ? Napíšte ich pravdepodobnostné tabuľky.

b) Zostavte tabuľky pravdepodobností pre $B \times Z$, $B \times M$, $Z \times M$.

b*) Kto sa príliš nudí, môže aj 3D-tabuľku pre $B \times Z \times M$:)

c) Vypočítajte charakteristiky veličín B, Z, M a po dvojiciach ich vzájomnú kovarianciu / korelačný koeficient.

2. Hádzeme dvojicou hracích kociek (zelená a modrá). Sledujeme náhodné veličiny $M = \text{maximum z oboch čísel}$ a $S = \text{súčet oboch čísel}$.

a) Aké hodnoty nadobúdajú M a S ? Napíšte ich pravdepodobnostné tabuľky.

b) Zostavte tabuľku pravdepodobností pre $M \times S$.

c) Vypočítajte charakteristiky veličín B, S a ich vzájomnú kovarianciu / korelačný koeficient.

3. Je daná dvojica náhodných veličín X, Y.

Vieme, že

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 & D(X) &= 4 \\ E(Y) &= 2 & D(Y) &= 9 \\ \text{cov}(X, Y) &= 3 \end{aligned}$$

Vypočítajte, čomu sa rovná

$$\begin{aligned} D(2X+3Y) \\ D(7Y-2X) \\ \text{cov}(2X-3Y, 3X+2Y) \end{aligned}$$

4. Je daná trojica náhodných veličín X, Y, Z. Vieme, že

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 & D(X) &= 4 \\ E(Y) &= 2 & D(Y) &= 9 \\ E(Z) &= 4 & D(Z) &= 12 \\ \text{cov}(X, Y) &= 3 \\ \text{cov}(X, Z) &= 5 \\ \text{cov}(Y, Z) &= 8 \end{aligned}$$

Vypočítajte, čomu sa rovná

$$\begin{aligned} D(X+Y+Z) \\ D(2X-3Y-Z) \\ \text{cov}(2X-3Y, Y+3Z) \\ \text{cov}(X+2Z, 3X+Y-2Z) \\ \text{cov}(3X-2Y-Z, -X+3Y+4Z) \end{aligned}$$