

Cvičenie 3b – Náhodná veličina – spojitá

Pri spojitaj náhodnej veličine máme nekonečne (nespočítateľne) veľa možných hodnôt (elementárnych udalostí), ktorých pravdepodobnosť je v podstate nulová. Meníme preto uhol pohľadu a budeme skúmať náhodné udalosti, ktoré budú pozostávať z intervalov alebo rozličných kombinácií intervalov. Napr. nebudeme sa pýtať na pravdepodobnosť, že Betka príde na rande presne o 14tej, ale na pravdepodobnosť, že sa dostaví povedzme medzi 13.55 a 14.05.

Miesto tabuliek hodnôt a ich pravdepodobností budeme mať množinu M možných elementárnych udalostí x (najčastejšie interval) a funkciu hustoty f , ktorá im priradí hodnotu $f(x)$. Pozor, jej hodnoty nie sú (!!) pravdepodobnosti tak ako to bolo pri $P(x)$.

Distribučná funkcia $F(x)$ (v distribútnom prípade kumulatívna suma hodnôt $P(x)$) bude integrálom z $f(x)$ od počiatku po x . Podobne jednotlivé charakteristiky budeme počítať cez integrály. Predpokladá sa, že integrovať viete ...

X :

$x \in M,$	kde M je napr. $[a, b]$ alebo $(-\infty, b]$ a pod.
$f(x)$	– funkcia hustoty
$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt$	– distribučná funkcia

Musí platiť $\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx = 1$ (prečo?)

Pri integrovaní môžeme znaky $-\infty, \infty$ nahradiť hranicami intervalu, v ktorom je f nenulová.

Stredná hodnota

$$E(X) = \int_{(-\infty, \infty)} t \cdot f(t) dt$$

Rozptyl (disperzia, variancia)

$$\begin{aligned} D(X) &= \text{var}(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} t^2 \cdot f(t) dt - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Koeficient šikmosti

$$\gamma_1 = E((X - E(X))^3) / (D(X))^{3/2} = \int_{(-\infty, \infty)} (x - E(X))^3 \cdot f(x) dx / (D(X))^{3/2}$$

Koeficient špicatosti

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= E((X - E(X))^4) / (D(X))^2 - 3 \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} (x - E(X))^4 \cdot f(x) dx / (D(X))^2 - 3 \end{aligned}$$

Riešené príklady

Príklad 1:

Je daná náhodná veličina X s funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2 & \text{na } [0, 2] \\ 0 & \text{na } \mathbb{R} \setminus [0, 2] \end{cases}$$

táto vetva sa často nepíše, ale implicitne tam je vždy

- Určte hodnotu k .
- Nájdite $F(x)$
- Nakreslite graf f a F a vyznačte v nich $P(0.5 < x < 1.5)$
- Vypočítajte $E(X)$, $D(X)$ a prípadne ďalšie charakteristiky.
- Nájdite kvantilovú funkciu. Vypočítajte medián a 0.83-kvantil.
- Nájdite modus.

Riešenie:

Na začiatok nájdeme primitívnu funkciu $k f$.

$$\int f(x) dx = \int k \cdot x^2 dx = k \cdot \int x^2 dx = k \cdot x^3 / 3$$

a) Vieme, že musí platiť $\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx = \int_{[0, 2]} f(x) dx = 1$.

$$\text{Konkrétne teda } k \cdot [x^3 / 3]_{[0, 2]} = 1,$$

$$k \cdot 8 / 3 = 1$$

odkiaľ dostávame $k = 3/8$

b) Výpočet:

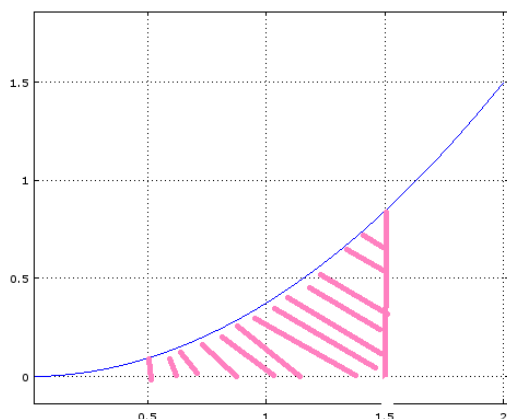
$$F(x) = \int_{[0, x]} f(t) dt = 3/8 \cdot x^3 / 3 = x^3 / 8$$

Odpoveď

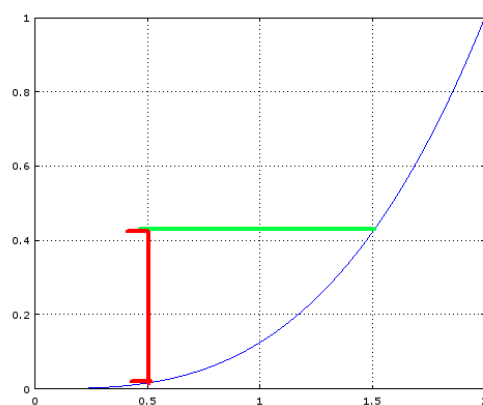
$$F(x) = \begin{cases} x^3 / 8 & \text{na } [0, 2] \\ 0 & \text{na } (-\infty, 0) \\ 1 & \text{na } (2, \infty) \end{cases}$$

2. a 3. vetva sa často nepíšu, ale implicitne tam sú vždy

c) f :



F :



Zobrazenie pravdepodobnosti $P(0.5 < x < 1.5)$ v grafe funkcie f vychádza zo vzorca

$$P(0.5 < x < 1.5) = \int_{(0.5, 1.5)} f(x) dx$$

a je to teda plocha pod krivkou. Zobrazenie v grafe F sa opiera o vzorec

$$P(0.5 < x < 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = 13/32$$

a je to rozdiel príslušných funkčných hodnôt (červenou).

d) $E(X) = \int_{[0, 2]} f(x) \cdot x dx = 3/8 \int_{[0, 2]} x^3 dx = 3/2$

$$D(X) = 3/8 \int_{[0, 2]} x^4 dx - (3/2)^2 = 3/20$$

Ďalšie charakteristiky sa v tomto príklade počítajú síce ľahko, ale dosť zdĺhavo.

e) Kvantilová funkcia je inverzná k F :

$$\begin{aligned} F: & y = x^3/8 \\ F^{-1}: & x = 2 y^{1/3} \end{aligned}$$

Medián: $q_{0.5} = F^{-1}(0.5) = 1.5874$

0.83- kvantil: $q_{0.83} = F^{-1}(0.83) = 1.87956$

f) Vidíme, že f je rastúca, najvyššiu hodnotu nadobúda v krajnom bode 2. Takže 2 je modus.

Príklad 2:

Je daná náhodná veličina s distribučnou funkciou

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x^2) & \text{na } [-d, 0] \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{na } [0, d] \end{cases}$$

- Doplňte do kompletnej definície F chýbajúce vetvy.
- Nájdite d, f(x), F^{-1} . Nájdite medián a 0.6-kvantil.
- Nakreslite graf f a F a vyznačte v nich $P(-0.5 < x < 0.5)$
- Vypočítajte E(X), D(X) a prípadne ďalšie charakteristiky.
- Určte modus.

Riešenie:

- b) Musí platiť $F(d) - F(-d) = 1$, to znamená $\frac{1}{2}(d^2 + d^2) = d^2 = 1$.
Odtiaľ máme $d=1$ (možnosť -1 nie je v súlade so zadaním).

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} -x & \text{na } [-1, 0] \\ x & \text{na } [0, 1] \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Kvantilová funkcia – inverznú funkciu k F hľadáme osobitne pre $[-1, 0]$ a $[0, 1]$.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} -(1-2y)^{1/2} & \text{na } [0, 0.5] \\ (-1+2y)^{1/2} & \text{na } [0.5, 1] \end{cases}$$

Medián (počítaný z ktorejkoľvek vetvy) je 0.
0.6-kvantil rátame z druhej vetvy 0.4472135955.

- c) Jednoduché.

- d)

$$E(X) = \int_{[-1, 1]} f(x) \cdot x \, dx = \int_{[-1, 0)} (-x) \cdot x \, dx + \int_{[0, 1]} x \cdot x \, dx = 0$$

$$D(X) = \int_{[-1, 0)} (-x) \cdot x^2 \, dx + \int_{[0, 1]} x \cdot x^2 \, dx = 1/2$$

$$\gamma_1 = \int_{[-1, 0)} (-x) \cdot x^3 \, dx + \int_{[0, 1]} x \cdot x^3 \, dx / (D(X))^{3/2} = 0$$

$$\gamma_2 = \int_{[-1, 0)} (-x) \cdot x^4 \, dx + \int_{[0, 1]} x \cdot x^4 \, dx / (D(X))^2 - 3 = (1/3) / (1/2)^2 - 3 = -1.6667$$

O čom hovorí dosť veľká záporná hodnota γ_2 ?

- e) Modus je dvojvrcholový, $x = -1$ a $x = 1$.

Neriešené príklady

1. Náhodná veličina je daná funkciou hustoty $f(x) = 2/(x+1)$ na $[0, d]$

- Nájdite d, F, F^{-1} ($\exp(1/2)-1, 2\ln(x+1), \exp(y/2)-1$)
- Nakreslite grafy f a F a vyznačte v nich pravdepodobnosť $P(0.2 < x < 0.5)$ (...)
- Vypočítajte $E(X), D(X)$ ($0.29744, 0.035$)
- Vypočítajte medián a oba kvartily, nájdite modus.

2. Náhodná veličina je daná distribučnou funkciou $F(x) = x^2/4$ na $[0, d]$

- Nájdite d, f, F^{-1} ($2; x/2; 2\sqrt{y}$)
- Nakreslite grafy f a F a vyznačte v nich pravdepodobnosť $P(0.6 < x < 1.4)$
- Vypočítajte $E(X), D(X)$ ($4/3; 2/9$)
- Vypočítajte medián a oba kvartily, nájdite modus.

3. Náhodná veličina je daná funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{na } [-d, 0] \\ 1-x & \text{na } [0, d], \end{cases} \quad \text{inde } 0.$$

- Nájdite d, F a F^{-1} . ($1; x \pm x^2/2 + 1/2; \sqrt{(2y)-1} \parallel 1 - \sqrt{(2-2y)}$)
- Nakreslite grafy f, F . Vypočítajte $P(-0.5 < x < 0.5)$ a znázornite ju v grafoch.
- Vypočítajte $E(X), D(X), \gamma_1, \gamma_2$. ($0; 1/6; 0; -0.6$)
- Vypočítajte medián a oba kvartily, nájdite modus.

4. Náhodná veličina je daná distribučnou funkciou

$$F(x) = \begin{cases} 3kx & \text{na } [0, 1] \\ 2kx+a & \text{na } [1, 2] \\ kx+b & \text{na } [2, 3] \end{cases}$$

- Zistite hodnoty k, a, b . ($1/6, 1/6, 1/2$)
- Nájdite f, F^{-1} ($3/6 \mid 2/6 \mid 1/6, 2y \mid 3y-1/2 \mid 6y-3$)
- Nakreslite grafy f a F a vyznačte v nich pravdepodobnosť $P(0.5 < x < 2.5)$ (...)
- Vypočítajte $E(X), D(X), \gamma_1, \gamma_2$. ($7/6, \dots$)
- Vypočítajte medián a oba kvartily, nájdite modus.