Matematická štatistika

Cvičenie 2 – Podmienená pravdepodobnosť

Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť udalosti A za predpokladu, že nastane udalosť B:

$$\mathbf{P(A|B)} = P_B(A) = P(A/B) = \quad P(A \cap B) / P(B) \quad = |A \cap B| / |B|$$

viacero spôsobov zápisu, preferujeme prvý

s mohutnosťami – pre konečné množiny

Bayesova veta – súvislosť medzi P(A|B) a P(B|A):

$$P(A|B) = P(B|A) \,.\, P(A) / P(B)$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech náhodné javy H1, H2, ..., Hn tvoria úplný systém javov, tj.

$$P(H1 \vee H2 \vee \ldots \vee Hn) = 1$$
$$P(Hi \wedge Hj) = 0 \text{ pre všetky } i, j, \quad i \neq j$$

a nech P (Hi) > 0, i = 1, 2, ..., n.

Potom pre náhodný jav A platí

$$P(A) = \sum_{i=1,2,\ldots,n} P(A|Hi) \,.\, P(Hi)$$

Nezávislosť náhodných udalostí

Náhodné udalosti A, B sú navzájom nezávislé, ak sa pravdepodobnosť A nezmení po tom, ako nastala udalosť B a pravdepodobnosť B sa nezmení po tom, ako nastala udalosť A.

To znamená, že $P(A) = P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ a teda

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Riešené príklady

<u>Príklad 1</u> (podmienená pravdepodobnosť)

Hádžeme naraz 2 kockami (červená a modrá). Budeme pozorovať nasledujúce udalosti:

A: na oboch kockách padne rovnaké číslo
B: na modrej dostaneme párne číslo
C: na červenej padne výsledok 5 alebo 6
D: súčet hodnôt z oboch kociek je najviac 6

Vypočítajte pravdepodobnosti udalostí A, B, C, D. Pre každú dvojicu udalostí zistite príslušnú podmienenú pravdepodobnosť.

Riešenie:
Čísla, s ktorými budeme pracovať, sú konečné.
Pri dvoch kockách máme spolu **36** možných výsledkov. Každá dvojica čísel predstavuje elementárnu udalosť s rovnakou pravdepodobnosťou **1/36**.
Každá zo sledovaných udalosti A,B,C,D je zložená z niekoľkých (označme ten počet *k*) elementárnych udalostí a jej pravdepodobnosť je k/36.

Udalosť A: nastane pri dvojiciach 11, 22, 33, 44, 55, 66.
P(A) = **6/36**.

Udalosť B: nastane pri dvojiciach x2, x4, x6, kde x je ľubovoľné číslo od 1 do 6.
To je spolu 18 možných dvojíc. P(B) = **18/36**.

Udalosť C: nastane pri dvojiciach 5x, 6x, x =1, ..., 6.
P(C) = **12/36**.

Udalosť D: nastane pri dvojiciach
15,14,13,12,11,
24,23,22,21,
33,32,31,
42,41,
51
P(D) = **15/36**.

Podmienené pravdepodobnosti:

P(X|X) = **1**, kde X=A,B,C,D.

P(B|A) =	|B∩A| / |A|	= |{22,44,66}| / 6	= **3/6**	
P(C|A) =	|C∩A| / |A|	= |{55,66}| / 6	= **2/6**	
P(D|A) =	|D∩A| / |A|	= |{11,22,33}| / 6	= **3/6**	
P(A|B) =	|A∩B| / |B|	=	= **3/18**	*
P(C|B) =	|C∩B| / |B|	= |{52,54,56, 62,64,66}| / 18	= **6/18**	
P(D|B) =	|D∩B| / |B|	= |{14,12,24,22,32,42}| / 18	= **6/18**	
P(A|C) =	|A∩C| / |C|	=	= **2/12**	*
P(B|C) =	|B∩C| / |C|	=	= **6/12**	*
P(D|C) =	|D∩C| / |C|	= |{15}| / 12	= **1/12**	
P(A|D) =	|A∩D| / |D|	=	= **3/15**	*
P(B|D) =	|B∩D| / |D|	=	= **6/15**	*
P(C|D) =	|C∩D| / |D|	=	= **1/15**	*

* Prečo sme v polovici prípadov mohli vynechať jeden krok v postupe počítania?
Overte platnosť Bayesovej vety dosadením dvojíc hodnôt P(B|A), P(A|B) a ďalších dvojíc.

<u>Príklad 2</u> (závislosť/nezávislosť)

Hádžeme naraz 2 kockami (červená a modrá). Budeme pozorovať nasledujúce udalosti:

A: číslo na červenej je 1,2 alebo 3.
B: väčšie z oboch čísel (ak sa rovnajú, tak ktorékoľvek z nich) je 4,5 alebo 6
C: číslo na červenej je párne

i) Zistite, ktoré dvojice udalostí sú navzájom nezávislé.
ii) Zistite, ktoré dvojice udalostí sú za predpokladu tej tretej navzájom nezávislé.

Riešenie:
Udalosti A, B, C si pre lepšiu názornosť vyznačíme graficky:

A

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

B

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

C

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

i) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(C) = 1/2$.

$P(A \cap B) = 1/4 \quad \neq \quad P(A)*P(B) = 3/8$
$P(A \cap C) = 1/6 \quad \neq \quad P(A)*P(C) = 1/4$
$P(B \cap C) = 5/12 \quad \neq \quad P(B)*P(C) = 3/8$

Žiadne dve udalosti z A,B,C nie sú nezávislé.

ii) $P(A \cap B|C) = 1/6 \quad \neq \quad P(A|C)*P(B|C) = 1/3*5/6 = 5/18$
$P(A \cap C|B) = 1/9 \quad \neq \quad P(A|B)*P(C|B) = 1/3*5/9$
$P(B \cap C|A) = 1/6 \quad = \quad P(B|A)*P(C|A) = 1/2*1/3 = 1/6$

Za predpokladu A sú udalosti B a C nezávislé.

<u>Príklad 3</u> (úplná pravdepodobnosť)

Z internetového obchodu si objednáme vianočný darček. Ten má byť doručený niektorou dopravnou spoločnosťou do balíkoboxu.
Dopravnú spoločnosť si podľa situácie vyberá predajca (z pohľadu zákazníka náhodným výberom), k dispozícii má možnost A,B,C,D. Ich podiel na trhu (a teda pravdepodobnosť, že budú zvolené) je uvedený v tabuľke spolu s ich priemernou úspešnosťou doručenia balíka do správneho boxu.

Dopr. spol.	Podiel na trhu	Úspešnosť
A	0.2	0.95
B	0.3	0.97
C	0.4	0.99
D	0.1	0.93

Aká je pravdepodobnosť udalosti U, že objednaný balík si bez komplikácií nájdeme v určenom boxe?

Riešenie:
Ide o prvoplánový príklad na použitie vzorca o úplnej pravdepodobnosti.
Celá realita doručovania sa delí na 4 časti H1, ..., H4 podľa toho, ktorá dopravná spoločnosť balík doručuje. Každá zo spoločností má svoju vlastnú mieru úspešnosti.

$$P(U) = 0.2*0.95 + 0.3*0.97 + 0.4*0.99 + 0.1*0.93 = 0.97$$

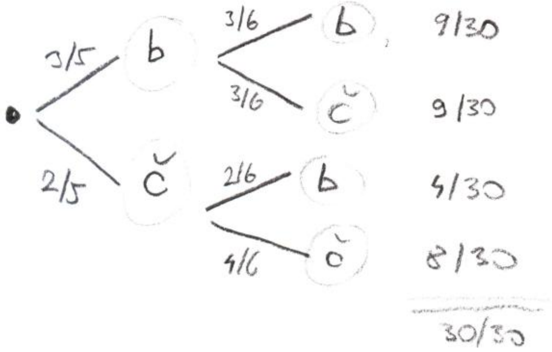
Príklad 4a (úplná pravdepodobnosť, mapa možných scenárov)

Máme dve nepriehľadné vrecká. V prvom sú 3 biele a 2 čierne žetóny, v druhom 2 biele a 3 čierne. Vytiahneme z prvého vrecka žetón a hodíme do druhého. Zamiešame, necháme vychladnúť, a potom vytiahneme jeden žetón z druhého vrecka.

3b 2č	→	2b 3č	→

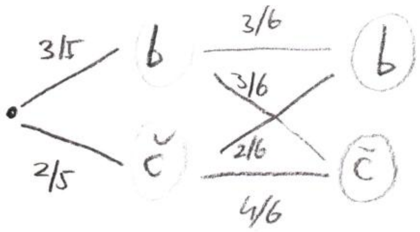
a) Aká je pravdepodobnosť, že druhý vytiahnutý žetón bude biely?
b) Aká je pravdepodobnosť, že prvý aj druhý vytiahnutý žetón budú mať rovnakú farbu?

Riešenie:
Opísaný experiment môže prebehnúť niekoľkými spôsobmi, ktoré si vypíšeme v prehľadnom diagrame (mape udalostí):



Pri prvom ťahu máme 3/5 šancu vytiahnuť biely žetón. Po jeho vhodení do druhého vrecka dostaneme 3 biele a 3 čierne žetóny, takže biela aj čierna majú po 3/6 pravdepodobnosť. Podobne to bude vyzerať v prípade, že najprv vytiahneme čierny žetón (2/5 šanca).

Mapa sa dá zakresliť aj úspornejšie, čo oceníme zvlášť pri väčšom počte udalostí. Nevýhodou však je menšia prehľadnosť (nemáme „na tácke" všetky možné výstupy).



a) Druhý žetón bude biely, ak v diagrame skončíme na písmenku **b**. Tam sa evidentne dá dostať dvoma cestami, ich pravdepodobnosti sú 9/30 a 4/30, teda spolu je to 13/30 pravdepodobnosť.
V princípe ide o rozdelenie reality na dve časti, H1 a H2 podľa toho, aký žetón sa vytiahol v prvom kroku. Pravdepodobnosť vytiahnutia bieleho žetónu v druhom kroku sme rátali (aj keď sme to výslovne nespomenuli) podľa vety o úplnej pravdepodobnosti.

b) Oba žetóny rovnakej farby môžu byť biely+biely, čo je podľa mapy 9/30 pravdepodobnosť, alebo čierny+čierny, čo je 8/30. Celková pavdepodobnosť, na ktorú sa pýtame, je 17/30.

Dodatok (podmienená pravdepodobnosť)

Pozrime sa na celý experiment odzadu, tj. spravíme spätnú rekonštrukciu.
<u>Prvé vetvenie:</u> v druhom (poslednom ťahu) sme mohli vytiahnuť biely alebo čierny žetón.
Pravdepodobnosti sú (podľa obrázkov vyššie):

(9+4)/30 pre bielu farbu
(9+8)/30 pre čiernu farbu

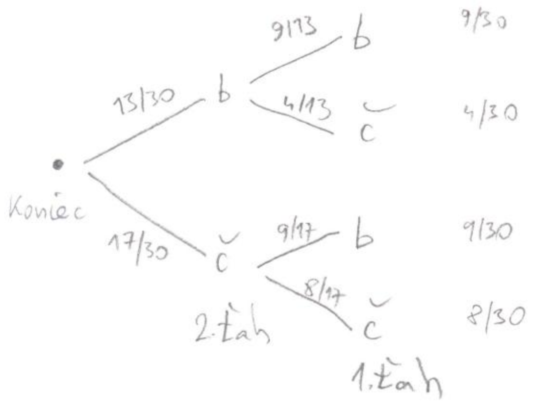
<u>Druhé vetvenie:</u>
Ak sme ako druhý vytiahli biely žetón, s akou pravdepodobnosťou bol ten prvý biely alebo čierny?
Výpočet podľa vzorca podmienej pravdepodobnosti:

P(prvý aj druhý biely)/P(druhý biely) = (9/30) / (13/30) = 9/13
P(prvý čierny a druhý biely)/P(druhý biely) = (4/30) / (13/30) = 4/13

Ak sme ako druhý vytiahli čierny žetón, s akou pravdepodobnosťou bol ten prvý biely alebo čierny?

P(prvý biely a druhý čierny)/P(druhý čierny) = (9/30) / (17/30) = 9/17
P(prvý čierny a druhý čierny)/P(druhý čierny) = (8/30) / (17/30) = 8/17

Zakreslíme výsledky do "inverznej mapy":



Príklad 4b (úplná pravdepodobnosť, mapa možných scenárov)

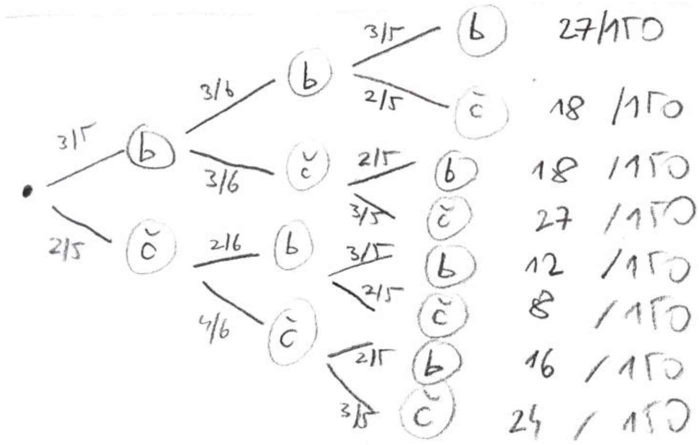
Máme tri nepriehľadné vrecká. V prvom sú 3 biele a 2 čierne žetóny, v druhom 2 biele a 3 čierne, v treťom 2 biele a 2 čierne. Vytiahneme z prvého vrecka žetón a hodíme do druhého. Zamiešame, necháme vychladnúť, a potom vytiahneme jeden žetón z druhého vrecka a vhodíme do tretieho vrecka. Nakoniec ťaháme žetón z tretieho vrecka.

$\boxed{\begin{matrix}3b\\2č\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}2b\\3č\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}2b\\2č\end{matrix}} \longrightarrow$

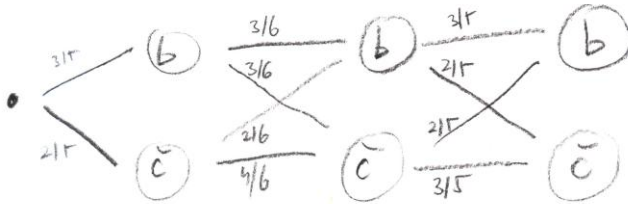
a) Aká je pravdepodobnosť, že tretí vytiahnutý žetón bude biely?
b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky 3 vytiahnuté žetóny budú mať rovnakú farbu?

Riešenie:

Mapa:



Stručnejšie:



a) (27+18+12+16) / 150 = 73/150

b) (27+24)/150 = 51/150

Príklad 5:

Študenta istej nemenovanej univerzity čaká test, ktorý pozostáva z jedinej otázky a 7 možných odpovedí (treba trafiť správnu). Napriek plnému úsiliu učivo ovláda na 70%. Ak mu „sadne“ otázka, odpovie správne (tj. omyly z nepozornosti a nedorozumenia vylúčime). Ak mu otázka nesadne (je mimo toho, čo sa učil), bude naslepo tipovať.

a) Aká je pravdepodobnosť, že test úspešne zvládne?
b) Ak študent správne odpovedal v teste, aká je pravdepodobnosť, že to naozaj aj vedel?

Riešenie:

a) Mapa (zhora dole):

otázka
/ \
0.7 0.3
vie nevie
/ \ / \
1 0 1/7 6/7
správne odpovie zle odpovie správne odpovie zle odpovie

správnu odpoveď dá s pravdepodobnosťou 0.7*1, ak to vie, a 0.3*1/7, ak to nevie. Spolu to je cca. 0.743 .

b) Skúsme si nakresliť „inverznú mapu“. Na riešenie tohto príkladu to síce nie je nutné, ale zíde sa nám to precvičiť.

odpoveď
/ \
0.74286 0.25714 (=0.3*6/7=1-0.0.74286)
správna nesprávna
/ \ / \
0.7 / 0.74286 = 0.9423 0.3*1/7 / 0.74286 = 0.057692 0 1
vedel hádal vedel hádal

Ak študent odpovedal správne, sme v ľavej vetve. Vidíme z mapy, že možnosť „vedel“ má potom pravdepodobnosť 0.9423 .

Príklad 6

Janko a Marienka bývajú vo svojich chalúpkach na lazoch, vizuálne ich však oddeľuje kopec. Keďže v tých končinách nie je signál ani iné moderné možnosti komunikácie, dohovárajú sa tradičnými dymovými signálmi s použitím morzeovky (krátky obláčik •, dlhý obláčik — , medzera ¶). Komunikáciu žiaľ často narúša vietor (zdeformuje tvar oblaku alebo odfúkne oblak skôr, než sa dostane nad kopec), horár na starom tereňáku bez filtra pevných častíc (falošné signály) či strýko Fero, ktorý do pece prikladá vlhké lístie.

Pozorovanie komunikácie dymovými signálmi v smere od Marienky k Jankovi ukazuje, že prevládajú krátke znaky (0.5 z odoslaného), nasledujú dlhé znaky (0.3 z odoslaného) a najmenej je medzier (0.2). Každý odoslaný znak v dôsledku spomenutých rušivých vplyvov môže byť zachytený správne alebo aj ako iný znak. Pravdepodobnosti sú nasledujúce:

```
                                Marienka
                  /                 |                  \
                 0.5               0.3                 0.2
odoslané          •                 —                   ¶
             /    |    \       /    |    \        /     |      \
            0.6  0.2   0.2    0.2  0.7   0.1     0.2    0        0.8
prijaté      •    —     ¶      •    —     ¶       •     —        ¶
```

a) S akou pravdepodobnosťou (podielom na celku) budú k Jankovi prichádzať jednotlivé znaky?

b) Aká je pravdepodobnosť, že Janko zachytí rovnaký znak, ako bol odoslaný?

c) Ak Janko prijal dlhý znak, aká je pravdepodobnosť, že ten znak bol aj odoslaný? To isté riešte pre ostatné znaky.

Riešenie:

a) Mapa už je nakreslená, treba len vypočítať príslušné pravdepodobnosti.

P(•) = 0.5*0.6 + 0.3*0.2 + 0.2*0.2 = 0.4
P(—) = 0.5*0.2 + 0.3*0.7 + 0.2*0 = 0.31
P(¶) = 0.5*0.2 + 0.3*0.1 + 0.2*0.8 = 0.29

b) P(odoslané = prijaté) = 0.5*0.6+0.3*0.7+0.2*0.8 = 0.67

c) Inverzná mapa:

```
                              Janko
                   /            |             \
                  0.4          0.31           0.29
prijaté            •            —              ¶
              /    |    \    /  |   \      /    |    \
           0.75  0.15  0.1  0.32 0.68  0   0.345 0.1  0.55
odoslané    •     —     ¶    •    —    ¶     •    —     ¶
```

Odkiaľ sú tie čísla?

0.5*0.6/0.4 = 0.75 P(odoslaný • , prijatý •) / P(prijatý •)

0.3*0.2/0.4 = 0.15 P(odoslaný — , prijatý •) / P(prijatý •)

0.2*0.2/0.4 = 0.1 P(odoslaný ¶, prijatý •) / P(prijatý •)

0.5*0.2/0.31 = 0.32 P(odoslaný •, prijatý —) / P(prijatý —)

0.3*0.7/0.31 = 0.68 P(odoslaný —, prijatý —) / P(prijatý —)

0.2*0/0.31 = 0.0 P(odoslaný ¶, prijatý —) / P(prijatý —)

0.5*0.2/0.29 = 0.34 P(odoslaný •, prijatý ¶) / P(prijatý ¶)

0.3*0.1/0.29 = 0.1 P(odoslaný —, prijatý ¶) / P(prijatý ¶)

0.2*0.8/0.29 = 0.55 P(odoslaný ¶, prijatý ¶) / P(prijatý ¶)

Odpoveď na otázky: Ak bol prijatý dlhý znak, je 0.68 pravdepodobnosť, že bol aj odoslaný. Pri krátkom je to 0.75 a pri medzere 0.55.

Príklad 7

Hádžeme hracou kockou a sčitujeme výsledky. Ak sa nám podarí dostať presne súčet x, víťazíme, inak máme smolu. Aká je pravdepodobnosť víťazstva pre x= 3, 4, 5, 6 ?

Riešenie:

V záujme prehľadnosti budeme kresliť len čiastočnú mapu – obmedzíme sa na tie vývojové línie, ktoré vedú k úspechu. Každá z nakreslených vetiev má pravdepodobnosť 1/6 (nebudeme zapisovať).

x=3:

```
                           0
                     /     |     \
1.hod               3      2      1
                           |    /   \
2.hod                      1   2     1
                                     |
3.hod                                1
```

Pravdepodobnosť úspechu je 1/6 + 1/6^2 + 1/6^2 + 1/6^3 = 0.227

x=4:

```
                              0
              /        /      |      \
1.hod        4        3       2       1
                      |    /    \   /  |  \
2.hod                 1   2     1  3   2   1
                                |      |   / \
3.hod                           1      1  2   1
                                              |
4.hod                                         1
```

Pravdepodobnosť úspechu je 1/6 + 3*1/6^2 + 3*1/6^3 + 1/6^4 = 0.2646

Príklad 8 (Bayesov vzorec, úplná pravdepodobnosť)

Na gymnáziu v istom škótskom meste študuje 45% chlapcov (Ch) a 55% dievčat (D).
30% dievčat nosí sukne (S) a 70% nosí nohavice (N).
60% chlapcov nosí kilt (S) a 40% nosí nohavice (N).
Z diaľky matne vidíme na školskom dvore osobu v nohaviciach. Aká je pravdepodobnosť, že ide o dievča?

(disclaimer: všetky čísla sú vymyslené, akákoľvek podobnosť s realitou je čisto náhodná)

Riešenie:

Na výpočet použijeme Bayesov vzorec.
Hľadáme hodnotu P(D|N) a využijeme, že hodnotu P(N|D) poznáme.

$$P(D|N) = P(N|D) * P(D) / P(N)$$

Pravdepodobnosť, že dievča má nohavice je	$P(N|D) = 0.7$
Pravdepodobnosť, že žiak/žiačka gymnázia je dievča je	$P(D) = 0.55$

Pravdepodobnosť P(N), že žiak/žiačka gymnázia má nohavice, musíme vypočítať s využitím vety o úplnej pravdepodobnosti, kde realitu rozdelíme na dve časti: H1 = Ch, H2 = D.

$$P(N) = P(Ch)*P(N|Ch) + P(D)*P(N|D) = 0.45*0.4 + 0.55*0.7 = 0.565$$

Teraz už máme prichystané všetky parametre potrebné na dosadenie do vzorca:

$$P(D|N) = 0.7 * 0.55 / 0.565 \approx 0.68$$

Pravdepodobnosť, že matne pozorovaná osoba v nohaviciach je dievča, je približne 68%.

Príklad 9 (Bayesov vzorec, úplná pravdepodobnosť)

Dopravná polícia sa rozhodla sústrediť svoju pozornosť na šoférov jazdiacich pod vplyvom alkoholu, ktorých je dlhodobo 0.5% a nedarí sa zatiaľ ich počet znížiť.
Nakúpili sa testery od firmy Y, ktoré majú deklarovanú senzitivitu aj špecifickosť 99%, a spustila sa akcia „Norton" spojená s masovým zastavovaním a testovaním šoférov na prítomnosť alkoholu v dychu.

a) Aká je pravdepodobnosť, že šofér s negatívnym testom bol naozaj triezvy?
b) Aká je pravdepodobnosť, že šofér s pozitívnym testom bol naozaj pod vplyvom alkoholu?

Riešenie:

Zadanie príkladu sa môže na prvý pohľad zdať ťažko uchopiteľné, ale netreba sa dať odradiť – stačí prehľadným spôsobom zhrnúť a označiť dáta, ktoré sú k dispozícii, a situácia sa rýchlo sprehľadní.

Podiel šoférov pod vplyvom (V) alkoholu
= pravdepodobnosť, že náhodný šofér bude „pod vplyvom" $P(V) = 0.005$
Podiel triezvych (T) šoférov
= pravdepodobnosť, že náhodný šofér bude triezvy $P(T) = 0.995$
Senzitivita testu
= pravdepodobnosť, že šofér pod vplyvom bude mať pozitívny (p) test $P(p|V) = 0.99$
Špecifickosť testu
= pravdepodobnosť, že triezvy šofér bude mať negatívny (n) test $P(n|T) = 0.99$

Platí tiež $P(n|V) = 1 - P(p|V) = 0.01$ a $P(p|T) = 1 - P(n|T) = 0.01$

a) Pravdepodobnosť, že šofér s negatívnym testom bol naozaj triezvy, je $P(T|n)$.
Podľa Bayesovho vzorca

$$P(T|n) = P(n|T) * P(T) / P(n)$$

$P(n|T)$ a $P(T)$ poznáme, potrebujeme ešte vyčísliť $P(n)$. Využijeme vetu o úplnej pravdepodobnosti:

$$P(n) = P(T)*P(n|T) + P(V)*P(n|V) = 0.995*0.99 + 0.005*0.01 = 0.9851$$

Dosadíme:

$$P(T|n) = 0.99 * 0.995 / 0.9851 = 0.99994924373$$

Negatívny výsledok testu je vysoko dôveryhodný.

b) Pravdepodobnosť, že šofér s pozitívnym testom bol naozaj „pod vplyvom", je $P(V|p)$.
Podľa Bayesovho vzorca

$$P(V|p) = P(p|V) * P(V) / P(p)$$

Vyčíslime menovateľa: $P(p) = P(V)*P(p|V) + P(T)*P(p|T) = 0.005*0.99 + 0.995*0.01 = 0.0149$

Dosadíme: $P(V|p) = 0.99 * 0.005 / 0.0149 \approx 0.33$

Výsledok je šokujúci. Len tretina pozitívne testovaných šoférov je naozaj „pod vplyvom" a až v dvoch tretinách z týchto prípadov sú obvinení neprávom.
Matematickou príčinou tejto nepríjemnosti je nízke číslo $P(V)$. Keby bolo vyššie, výsledok by pôsobil prijateľnejšie. Avšak na toto číslo sa nedá vyhovárať, najmä ak cieľom policajnej akcie bolo ho znížiť – preto nie je iná možnosť, ako testery vymeniť za rádovo presnejšie zariadenia.

Neriešené príklady

1. Máme 5 vrecúšok s nasledujúcim obsahom:

1., 3., 5. vrecko = 2 biele + 1 čierny žetón

2., 4. vrecko = 1 biely + 2 čierne žetóny

Postupne pre i=1,2,3,4 budeme ťahať z i-teho vrecka žetón a hádzať ho do (i+1)-ého vrecka. Nakoniec z posledného vrecka vytiahneme žetón.

a) Nakreslite pravdepodobnostný diagram možných priebehov experimentu. (Optimalizujte, alebo si zoberte veľký papier.)

b) Aká je pravdepodobnosť, že posledný vytiahnutý žetón bude čierny? (307 / 768)

c) Aká je pravdepodobnosť, že farby ťahaných žetónov sa budú dôsledne striedať? (11 / 256)

d) Posledný vytiahnutý žetón vhodíme späť do prvého vrecka. Aká je pravdepodobnosť, že obsah VŠETKÝCH vrecúšok bude nakoniec rovnaký, aký bol na začiatku? (9 / 64)

2.* V riešenom príklade 4b. nakreslite „inverznú mapu“ a vypočítajte pravdepodobnosti na jednotlivých vetvách.

3. Dokončite príklad 7 (riešený) pre x=5, 6, a skúste pokračovať aj s vyššími hodnotami. Dalo by sa k výsledkom dopracovať aj bez kreslenia mapy? Dá sa využiť (do akej miery?) Pascalov trojuholník? (0.30877 pre x=5, 0.36 pre x=6, 0.253 pre x=7)

4. Podla prognózy štatistického úradu v krajine *xyz* sa zo 100 000 detí narodených v roku *abcd* dožije veku 45 rokov 96 123 a veku 65 rokov sa dožije 82 951. Určte pravdepodobnosť, že človek, ktorý sa dožije veku 45 rokov, sa dožije aj veku 65 rokov. (0.863)

5. Pravdepodobnosť narodenia chlapca alebo dievčaťa v rodine XY nech je 48:52.

a) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich je chlapec. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci? (triviálne)

b) V rodine sú dve deti a vieme, že jedno z nich je chlapec. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci? (0.3156)

c) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich / jedno z nich je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že druhé z detí je dievča? (analogické ako vyššie)

6. Globálny výrobca gumových medvedíkov má výrobné prevádzky v 5 krajinách. V prvej sa vyprodukuje 30%, v druhej 25%, v tretej 20%, vo štvrtej 15% a v piatej 10%. Pravdepodobnosť, že v sáčku s medvedíkmi sa vyskytne omylom kyslá žížala je v závislosti od krajiny (v danom poradí) 4%, 5%, 3%, 2%, 3%.

Aká je pravdepodobnosť, že v jednom náhodne vybranom balení z celoročnej produkcie bude žížala? (0.0365)

7.* V televíznej šou súťažiaceho postavia pred tri rovnaké škatule. Dve sú prázdne, v jednej je hodnotný darček. Súťažiaci ukáže na jednu z krabíc a očakáva, že moderátor ju otvorí a v prípade šťastnej voľby bude darček jeho. Avšak moderátor zdramatizuje situáciu a otvorí inú škatuľu, ktorá je prázdna – toto spraví bez ohľadu na to, aká bola voľba súťažiaceho, a oznámi mu toto pravidlo. Ostali tak dve škatule a súťažiaci má opäť hádať, kde sa nachádza darček. Čo by ste mu poradili v záujme zvýšenia šance na výhru – má ostať pri pôvodnej voľbe alebo zmeniť svoju voľbu? (Návod: Na riešenie príkladu stačí tá výbava, ktorú sme využívali na aktuálnom cvičení. Prípadne skúste pogúgliť heslo Monty-Hall problem).