

Pravdepodobnosť

Riešené príklady

Pripomeňte si základné pojmy (a vzorce) z kombinatoriky:

permutácie, permutácie s opakovaním
variácie, variácie s opakovaním,
kombinácie, kombinácie s opakovaním

kombinačné číslo

$$\binom{n}{k}$$

$$= C(n,k) = n! / (n-k)! / k!$$

Z praktických dôvodov sa v týchto textoch uprednostňuje zápis $C(n,k)$.

Príklad 1:

V triede je 21 žiakov, z toho 16 chlapcov a 5 dievčat.
Treba zostaviť 4-členný tím na súťaž v jedení palacinek.

Otázky a riešenie:

a) Koľko rozličných 4-členných tímov je možné zostaviť?

Otázka sa dá preformulovať: „koľkými spôsobmi vieme vybrať štyri kusy z 21, pričom poradie nás nezaujíma?“ Je zrejmé, že ide o tzv. kombinácie. Odpoveďou je kombinačné číslo

$$C(21,4) = 21! / (21-4)! / 4! = 5985$$

b) Pri triednej porade prevaha chlapcov a predsudky, že vraj dievčatá príliš dbajú o líniu a nebudú mať preto dostatok ochoty pchať sa palacinkami do prasknutia, viedli k rozhodnutiu zostaviť čisto chlapčenský tím. Koľko možností majú?

$$\text{Odpoveď je jednoduchá} - C(16,4) = 16! / (16-4)! / 4! = 1820$$

c) Vyššie uvedené triedne úvahy neostali v utajení a vedenie školy sa rozhodlo v záujme rovnosti šancí stanoviť kvótu „povinne aspoň jedno dievča v tíme“. Trieda sa preto uzniesla, že teda jedno dievča zaradia - ale ani o jedno viac. Koľko je možností na zostavenie tímu?

Vyberáme 1 dievča z 5 a 3 chlapcov zo 16. Sú to dva nezávislé výbery, výsledky sa teda budú násobiť:

$$C(5,1) * C(16,3) = 5 * 560 = 2800$$

d) Počas prípravného sústreďovania ostali mnohí účastníci v šoku pri zistení, že niektoré dámy svojou schopnosťou šrotovať (osobitne nutelové) palacinky priam hanebne prekonal aj tých najväčších šampiónovov spomedzi chlapcov. Výsledkom bolo akceptovanie kvót v pôvodnom znení „aspoň dievča v tíme“, teda 1 až 4. Koľkými spôsobmi sa dá takto zostaviť tím?

Postupujme úsporne. „Aspoň jedno dievča v tíme“ je negáciou predikátu „čisto chlapčenský tím“. Potrebné čísla už máme. Od všetkých možností odrátame počet čisto chlapčenských štvoríc,

$$5985 - 1820 = 4165.$$

e) Keď jednotlivé triedy zostavili svoje tímy, vedenie školy muselo zasiahnuť proti diskriminácii a pridalo podmienku „aspoň jeden chlapec v tíme“. Koľko takých tímov možno zostaviť?

Opäť úsporne. Platia podmienky „aspoň jedno dievča a aspoň jeden chlapec v tíme“. To je negáciou predikátu „čisto chlapčenský alebo čisto dievčenský tím“.

$$C(21,4) - C(16,4) - C(5,4) = 4160$$

Využili sme a v nasledujúcich príkladoch budeme využívať taktiku

„ak je vstup hlavným vchodom príliš zložitý, skúsme to zozadu cez kuchyňu“.

Tj. sk na priamy výpočet pravdepodobnosti javu A treba vyčísliť pravdepodobnosti veľkého počtu situácií, môže byť rýchlejšie vyrátať pravdepodobnosť negácie A a tú odrátať od 1 (od sto percent)

Základná definícia pravdepodobnosti:

Pomer počtu priaznivých (z hľadiska sledovaného javu) prípadov ku počtu všetkých prípadov.

Prípad = elementárna udalosť. Všetky elementárne udalosti musia mať rovnakú pravdepodobnosť.

Táto definícia platí, ak pracujeme s konečnými číslami. Ak čísla nie sú konečné, namiesto počtu pracujeme s vhodne zvolenou mierou

Príklad 2:

V košíku sa nachádza 5 červených a 3 zelené jablká (hmatom sa farba nedá zistiť).

a) Naslepo (náhodne) vyberiem 1 jablko. Aká je pravdepodobnosť, že bude červené / zelené?

b) Náhodne vyberiem 2 jablká. Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem 1 červené a 1 zelené?

Riešenie:

a) V košíku je spolu 8 jablák. Pre každé jablko je $1/8$ šanca, že ho vytiahneme. Vytiahnutie 1 jablka tu predstavuje elementárnu udalosť, experiment môžeme rozobrať na 8 elementárnych udalostí.

Červených jablák je 5. Pravdepodobnosť vytiahnutia červeného jablka je pomer počtu priaznivých (5) ku počtu všetkých (8) možností. Číselne je to $5/8 = 0.625 = 62.5 \%$.

Analogicky šanca na zelenú voľbu je $3/8 = 0.375 = 37.5 \%$.

b) Všetkých element. udalostí, teda všetkých možných dvojíc jablák, ktoré sa dajú vytiahnuť, je $C(8,2) = 28$. Priaznivé udalosti sú tie, kde je jedno jablko červené (5 možností) a jedno zelené (3 možnosti). Každé červené viem spárovať s ľubovoľným zeleným, to je $5 \cdot 3 = 15$ možností.

Odpoveď teda znie $15/28 \approx 0.536 = 53.6 \%$

Zápis v percentách je určený pre komunikáciu s verejnosťou, zápis v zlomku alebo desatinnom tvare je na použitie vo výpočtoch a na internú komunikáciu.

Príklad 3:

Máme 2 jedoeurové mince, minca A bude z Chorvátska a minca B z Talianska (pre ľahšie vzájomné odlíšenie mincí, ale výsledok to neovplyvní, aj keby boli obe zo Slovenska).

Ak na minci padne 1€, výsledok je 1, ak padne zadná strana, výsledok je 0. Oba výsledky považujeme za rovnako pravdepodobné.

Experiment spočíva v hádzaní oboch mincí na stôl, výstupom je súčet hodnôt z oboch mincí.

Aká je pravdepodobnosť, že padne výsledok 2?

Otázky a riešenie:

Možné výstupy sú 0, 1 a 2. Preto sa na prvý pohľad zdá, že pravdepodobnosť by mohla byť $1/3$. To však nie je správny výsledok. Dôvodom je, že výsledok 1 nie je elementárna udalosť.

Elementárnymi udalosťami sú dvojice hodnôt (ešte pred sčítaním), každá s pravdepodobnosťou $1/4$:

Minca A	Minca B	Súčet
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

Výsledok 2 získame v jednej priaznivej (zo 4 všetkých) možnosti, pravdepodobnosť je teda $1/4$.

Príklad 4:

Máme tri kocky z hry „Človeče, nehnevaj sa“ (orig. *Mensch ärgere Dich nicht*), červenú, modrú a zelenú. Farebné rozlíšenie je z matematického hľadiska nepodstatné, slúži len ako pomôcka na prehľadnejšie čítanie výsledkov pokusu. Kocky sú poctivé, tj. každé z čísel 1 až 6 padá s rovnakou pravdepodobnosťou $1/6$. Hodíme naraz všetky tri kocky a prečítame si hodnoty na vrchu kociek v tomto poradí (!) – červená, modrá, zelená.

Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že padnú tri jednotky? (Tento výsledok zapíšeme 111)

Na každej kocke je 6 možností, kocky sú tri. Všetkých možných kombinácií je preto $216 (= 6^3)$. Tri jednotky sú práve jednou z týchto možností. Pravdepodobnosť je preto $1/216$.

b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla z pokusu budú rovnaké?

Tri rovnaké čísla sa dajú získať 6 spôsobmi: 111, ..., 666. Pravdepodobnosť je $6/216$.

6/216 sa dá vykrátiť na 1/36, ale v kontexte jedného príkladu s viacerými otázkami má svoj význam nekrátiť zlomky, aby sa dali výsledky medzi sebou rýchlo a pohodlne porovnávať.

c) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla budú navzájom rôzne?

Na červenej kocke je 6 možností. Na modrej musí padnúť iné číslo ako na červenej, to je 5 možností. Na zelenej musí padnúť iné číslo než na červenej aj modrej, to sú 4 možnosti. Spolu je to $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ možností. Pravdepodobnosť je teda $120/216$.

d) Aká je pravdepodobnosť, že vo výsledku budú aspoň dve čísla rovnaké?

Aspoň dve rovnaké čísla znamená, že sú buď tri rovnaké, alebo dve rovnaké a jedna iná. Rozpísať všetky tieto možnosti je zdĺhavé, hoci vďaka symetrii vieme ušetriť veľa práce. Skúsme však šetriť ešte viac.

Všimnime si, že výrok (predikát) určujúci svojou pravdivosťou množinu priaznivých výsledkov v d) je negáciou výroku v c). Pravdepodobnosť v d) teda vieme vyčísliť ako 1 mínus pravdepodobnosť v c)

$$1 - 120/216 = 96/216$$

e) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla budú nepárne (párne)?

Na každej z kociek môže mať nepárny výsledok hodnotu 1, 3 alebo 5 (párny výsledok 2, 4, 6), teda tri možnosti. Tri kocky a na každej tri priaznivé možnosti, to je spolu $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ možných kombinácií. Hľadaná pravdepodobnosť je $27 / 216$.

f) Aká je pravdepodobnosť, že práve dve čísla budú párne (nepárne)?

Práve dve párne znamená, že na dvoch kockách je párne číslo a na jednej nepárne. Sú tri možnosti, ako na kocke vybrať párne číslo, tri možnosti, ako vybrať nepárne číslo, a sú tri možnosti, na ktorej z 3 kociek to nepárne číslo bude. Spolu je to $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ možností.

g) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dve čísla budú párne?

Aspoň dve párne čísla znamená práve dve alebo tri. Tieto pravdepodobnosti sme už vyčísľili, stačí ich sčítať.

$$(81 + 27) / 216 = 108/216 = 50\%$$

h) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ troch čísel bude práve 10?

Možností, ako získať súčet 10, nie je veľa, takže miesto špekulácií si ich rýchlo vypíšeme.

$10 = 6+3+1$ (6 permutácií: 631, 613, 316, 361, 136, 163)	6
$10 = 6+2+2$ (permutácie s opakovaním, 3 možnosti: 622, 262, 226)	3
$10 = 5+4+1$ (6 permutácií)	6
$10 = 5+3+2$ (6 permutácií)	6
$10 = 4+4+2$ (3 permutácie s opak.)	3
$10 = 4+3+3$ (3 permutácie s opak.)	3

Spolu je to 27 možností, hľadaná pravdepodobnosť je $27/216$.

i) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ troch čísel bude aspoň 10?

Všetkým nadšencom možno len odporučiť, aby si spravili podrobný rozbor a prehľad priaznivých možností. Na tomto mieste uvidíme len stručnejší spôsob výpočtu.

Pre lepšiu názornosť si pripomeňme, že na normatívnej hracej kocke sú čísla vždy rozložené tak, aby súčet hodnôt na protiľahlých stenách bol 7. Oproti 6 je vždy 1, oproti 5 je 2, oproti 4 je 3 (táto skutočnosť nie je podstatná pre správnosť výsledku!).

Kocky budeme hádzať na sklenený stôl, pod ktorým bude ležať (triezvy!) asistent experimentu a bude nám hlásiť svoj pohľad na padnuté výsledky – ak zhora uvidíme x, y, z a súčet $x+y+z$, kolega zdola uvidí $7-x, 7-y, 7-z$ a súčet $21-x-y-z$.

Potrebuje si uvedomiť nasledujúcu symetriu:

Súčet 3 získame ako $1+1+1$ (jedna možnosť), a presne rovnako (stačí pohľad spod stola) získame jediným spôsobom súčet 18 ($6+6+6$).

Súčet 4 získame ako $2+1+1$ a ak uložíme na stôl všetky 3 permutácie týchto hodnôt, kolega pod stolom uvidí všetky permutácie čísel 5,6,6, ktoré dávajú súčet 17.

Podobne bude rovnaký počet možností, ako získať súčty

5 a 16, 6 a 15, 7 a 14, 8 a 13, 9 a 12, 10 a 11.

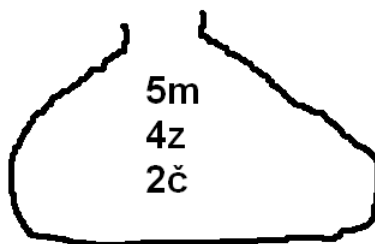
Všetky permutácie súčtu S sa spod stola budú javiť ako všetky permutácie súčtu $21-S$.

Z toho vyplýva, že presne polovica všetkých 216 trojíc má súčet najviac 10 a presne polovica má súčet aspoň 11.

Vráťme sa k zadaniu. Priaznivé možnosti pre súčet „aspoň 10“ sa dajú vyskladať ako možnosti, kde je „súčet presne 10“ + možnosti, kde je „súčet aspoň 11“. Všetky tieto počty už poznáme, je to 27 (z časti f)) a 108 z poslednej úvahy. Dokopy je to $(27+108) = 135$, hľadaná pravdepodobnosť je teda $135/216$.

Príklad 5

V nepriehľadnom vrečku je 11 gumených medvedíkov. 5 je modrých, 4 sú zelené a 2 červené. Hmatom sa farby odlíšiť nedajú. Náhodne z vrečka vyberieme **3** medvedíkov.



Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 3 navzájom rôznymi farbami?

Koľkými spôsobmi (bez ohľadu na farby) sa dá vybrať trojica gumkáčov z počtu 11?
Odpoveď neprekvapí, je to $C(11,3) = 165$.

Koľkými spôsobmi vieme vybrať trojfarebnú partiu? Modrého ide vybrať 5 spôsobmi, zeleného 4 a červeného 2, odpoveď je teda $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$

Hľadaná pravdepodobnosť je teda $40/165$.

b) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem troch medvedíkov rovnakej farby?

Jednofarebná partia nemôže byť červená. (Prečo?)

Modrá partia sa dá zostaviť $C(5,3) = 10$ spôsobmi.

Zelená trojica podobne $C(4,3) = 4$ spôsobmi.

Spolu je to 14. Hľadaná pravdepodobnosť je $14/165$.

c) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem 3 medvedíkov s 2 rôznymi farbami?

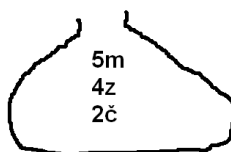
Šetríme čas a sily. Negáciou predikátu „3 medvedíkov s 2 rôznymi farbami“ je „3 medvedíkov rovnakej farby alebo 3 medvedíkov 3 rôznych farieb“. Pravdepodobnosti týchto javov sme už vyčíslili.

Hľadaná pravdepodobnosť teda je

$$1 - 40/165 - 14/165 = 111/165$$

Príklad 6

V nepriehľadnom vrečku je 11 gumených medvedíkov. 5 je modrých, 4 sú zelené a 2 červené. Hmatom sa farby odlíšiť nedajú. Náhodne z vrečka vyberieme **5** medvedíkov.



Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 3 navzájom rôznymi farbami?

Koľkými spôsobmi (bez ohľadu na farby) sa dá vybrať päťka gumkáčov z počtu 11? Odpoveď neprekvapí, je to $C(11,5) = 462$.

Trojfarebný výber sa dá urobiť mnohými spôsobmi, aby sme sa v tom nestratili, urobíme si podrobný prehľad možností:

m	z	č	P
3	1	1	$C(5,3)*C(4,1)*C(2,1) = 80$
2	1	2	$C(5,2)*C(4,1)*C(2,2) = 40$
2	2	1	$C(5,2)*C(4,2)*C(2,1) = 120$
1	2	2	$C(5,1)*C(4,2)*C(2,2) = 30$
1	3	1	$C(5,1)*C(4,3)*C(2,1) = 40$
			310

Hľadaná pravdepodobnosť je $310/462$.

b) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem 5 medvedíkov rovnakej farby?

Jednofarebná partia nemôže byť červená ani zelená. (Prečo?)

Modrá päťka sa dá zostaviť jediným spôsobom. Odpoveď je $1/462$.

c) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 2 navzájom rôznymi farbami?

Hľadaná pravdepodobnosť je $151/462$. Prečo?

Príklad 7

Autobus z Dolných Hájov jazdí do centra mesta v pravidelných 20 minútových intervaloch. Na cestu do práce ho využíva aj študent Emerald, ktorý sa však počas augusta rozhodol vyskúšať si slobodu od diktátu času. Prestal nosiť hodinky a nezapína si žiadne zariadenie, ktoré by mu prezradilo čas. Na autobus chodí okľukou, aby sa nemohol pozrieť na hodiny na kostolnej veži. Na zastávku teda prichádza v čase úplne náhodnom.

Aká je pravdepodobnosť, že po príchode na zastávku bude čakať najviac 7 minút?

Riešenie:

Príklad je jednoduchý, slúži iba ako vstup do sveta geometrickej pravdepodobnosti. Priestorom udalostí je reálna časová os, ktorú si môžeme obmedziť na úsečku predstavujúcu 20 minút medzi dvoma spojmi. Namiesto „počtu všetkých udalostí“ budeme hovoriť o dĺžke (tj. miere) intervalu. Príchod Emeralda na zastávku sa môže uskutočniť v ktoromkoľvek bode 20-minútovej úsečky (pre jednoduchosť predpokladáme, že nikdy na autobus nedobieha). Najviac 7 minút bude čakať, ak príde niekedy medzi 13tou a 20tou minútou. Týchto 7 minút je dĺžka (mera) intervalu „priaznivých“ udalostí.

Skúmaná pravdepodobnosť je teda $7/20$.

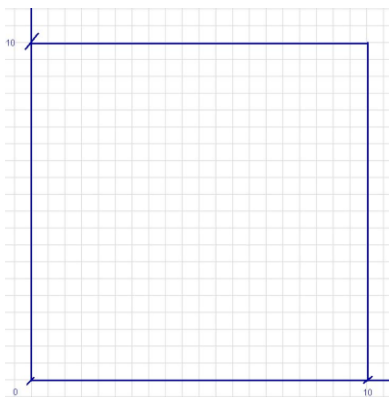
Príklad 8

V rovine máme štvorec so stranou 10 cm. Generátor náhodných čísel generuje s rovnomernou pravdepodobnosťou dvojice čísel z intervalu $<0,10>$, ktoré predstavujú body daného štvorca. Aká je pravdepodobnosť, že výstupom generátora bude bod $[x,y]$, s vlastnosťami $x+y \leq 12$ a $|x-y| \leq 2$?

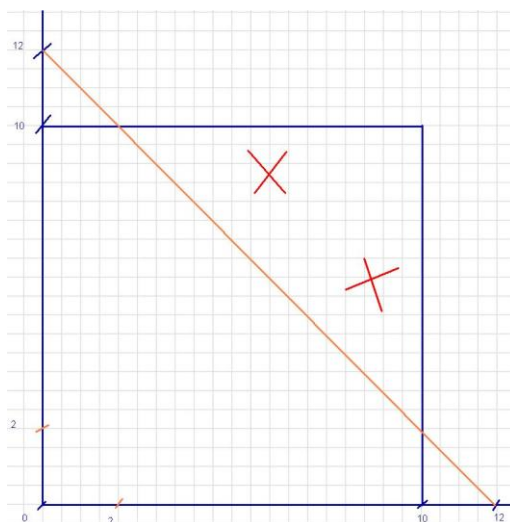
Riešenie:

Riešenie príkladu si vyžaduje nákres.

Štvorec – všetky možné výsledky:

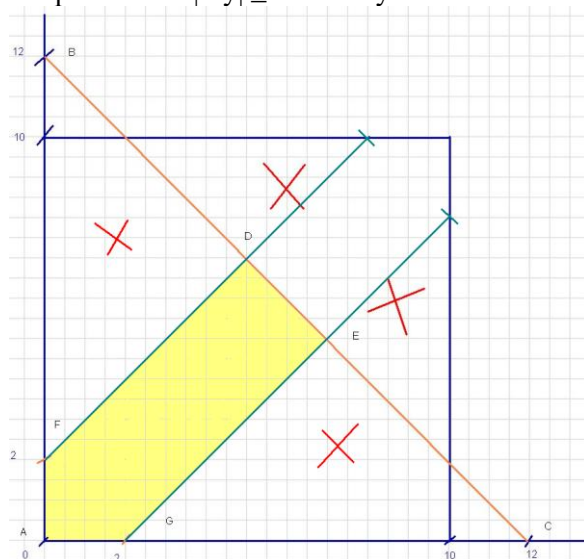


S podmienkou $x+y \leq 12$ si poradíme na základe skúseností z MAT1. Narysujeme si priamku, ktorá zodpovedá rovnosti $x+y = 12$ a po dosadení napr. $[0,0]$ do nerovnosti usúdime, že podmienke vyhovuje prienik štvorca a polroviny pod priamkou (stačí, ak overíme jeden bod polroviny, bude to platiť pre všetky)



Podmienku $|x-y| \leq 2$ si rozdelíme na dve časti: $x-y \leq 2$ pre $x \geq y$
 $y-x \leq 2$ pre $y \geq x$

Narysujeme si priamky zodpovedajúce príslušným rovnostiam, tj. $y=x-2$ a $y=x+2$. Bod $[0,0]$ obom nerovnostiam vyhovuje a teda podmienke $|x-y| \leq 2$ bude vyhovovať oblasť medzi oboma priamkami.



Ostáva už len vypočítať obsah žltó vyznačenej oblasti. To je úloha z oblasti hravých geometrických zadaní na voľné chvíle. Postupovať môžeme viacerými spôsobmi, uvedieme jeden z nich.

Začneme pravouhlým trojuholníkom ABC, ktorého obsah je $12 \cdot 12 / 2 = 72$.

Odpočítame od neho obsah trojuholníkov BDF a CEG. Ide o pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s preponou 10 a teda odvesnami $10/\sqrt{2}$ – obsah každého je teda $(10/\sqrt{2})^2 / 2 = 25$.

$$72 - 2 \cdot 25 = 22$$

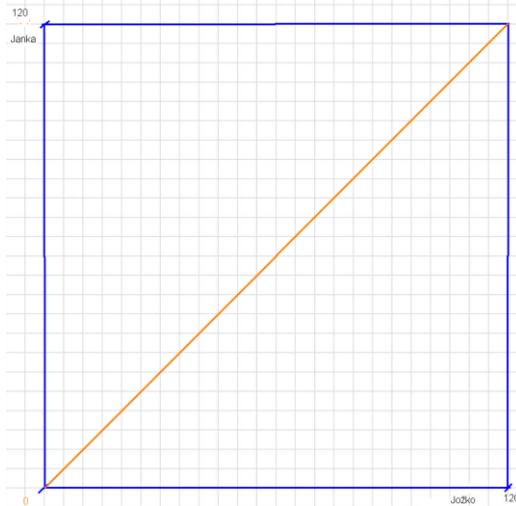
Pravdepodobnosť, na ktorú sme sa pýtali v zadaní, je potom $22/100 = 0.22 = 22\%$

Príklad 9

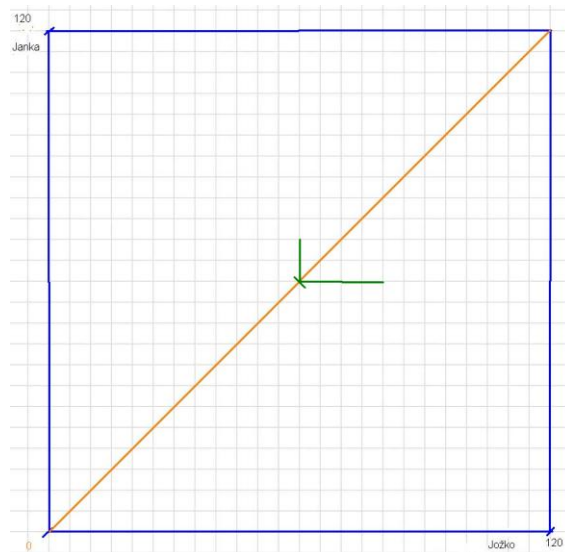
Zamestnanecká jedáleň vydáva obedy v čase 12.00-14.00 (jesť sa smie aj po 14tej). Jožko a Janka prichádzajú do jedálne v náhodných časoch s rovnomerným rozdelením (tj. každý čas daného intervalu je rovnako pravdepodobný). Jožko svoj obed vybaví za 10 minút. Janke obed trvá 20 minút. Aká je pravdepodobnosť, že sa obaja v jedálni stretnú?

Riešenie:

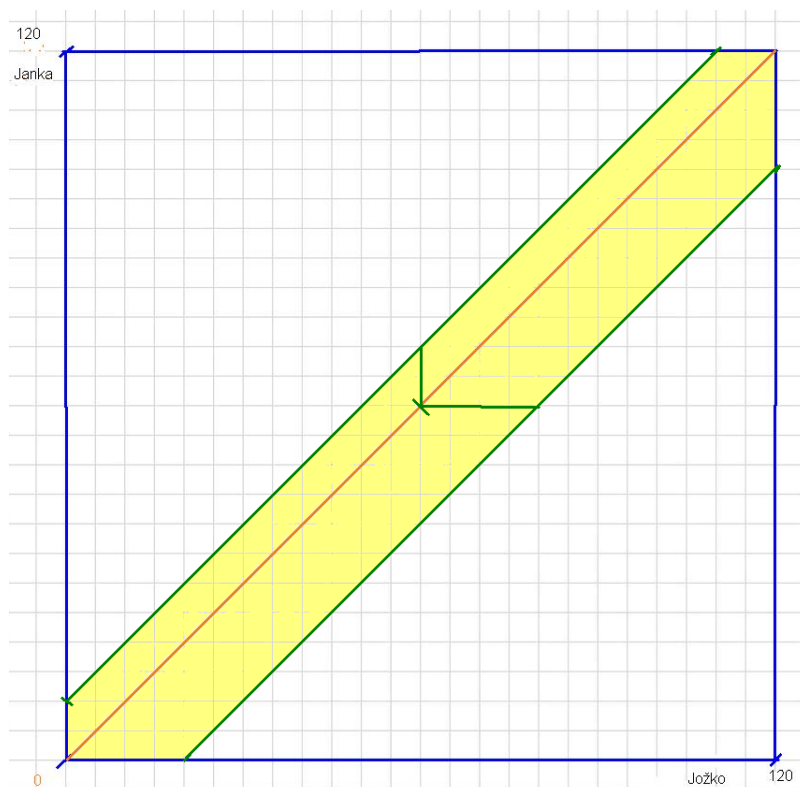
Príklad nie je úplne jednoduchý, typologicky však patrí ku „klasike“ z témy geometrickej pravdepodobnosti a preto „musí byť“. Hoci je reč o rozličných časových intervaloch, riešenie príkladu sa bude prekvapivo odohrávať na ploche. Nakreslime si štvorec so stranou 120 (čas vydávania obedov v minútach) a zvýrazníme uhlopriečku.



Na x-ovej je čas možných príchodov Jožka, na y-ovej príchody Janky. Uhlopriečka predstavuje všetky udalosti, keď prídu obidvaja naraz. Vtedy sa určite stretnú. Napr. ak prídu obaja presne o 13tej, tak sa stretnú. Ak Janka príde presne o 13tej, Jožko môže prísť aj neskôr, najviac však 20 minút, a stále sa stretnú. Podobne, ak príde Jožko presne o 13tej, Janka môže meškať (najviac 10 minút) a stretnú sa. Okrem bodu [60,60] teda aj úsečky [60...80, 60] a [60, 60...70] predstavujú body možných stretnutí.



Rovnaké úsečky vieme pridať k ľubovoľnému bodu uhlopriečky. Pri pravom hornom rohu štvorca sa však budú skracovať – napr. keby Janka prišla o 13.55, Jožko má už iba 5 minút a nie 10, limituje ho koniec vydávania obedov o 14tej.



Celý štvorec predstavuje oblasť všetkých možných udalostí, teda dvojíc časov príchodu Jožka a Janky. Vyfarbená oblasť predstavuje tie dvojice časov, keď sa stretnú, teda ide o oblasť „priaznivých výsledkov“. Podiel týchto plošných obsahov je pravdepodobnosť, na ktorú sme sa pýtali v zadaní.

Celá plocha: $120 \cdot 120 = 14400$

Žltá plocha: $120 \cdot 120 - 110 \cdot 110 / 2 - 100 \cdot 100 / 2 = 3350$

Pravdepodobnosť stretnutia: $3350 / 14400 = 0.2326$

Neriešené príklady

0. Riešte úlohy z príkladu 4, ak máte 4 kocky (červená, modrá, zelená, žltá)

- a) Aká je pravdepodobnosť, že padnú štyri jednotky? $(1/6^4)$
- b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla z pokusu budú rovnaké? $(6/6^4)$
- c) Aká je pravdepodobnosť, že vo výsledku aspoň dve čísla budú rovnaké? $(936/1296)$
- d) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla budú navzájom rôzne? $(360/1296)$
- e) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla budú párne? $(3^4 / 6^4)$
- f) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dve čísla budú párne? $(11 * 3^4 / 6^4)$
- g) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ čísel bude práve 10? $(80/6^4)$
- h) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ čísel bude aspoň 10? $(1170/1296)$

1. V medzinárodnej študijnej skupine sa nachádza 5 odborníkov z ČR, 3 zo SR, 6 z Ukrajiny, 5 z Rumunska, 2 z Maďarska a 3 z Rakúska.

- a) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny? $(2700/C(24,6) = 0.02)$
- b)* Náhodne vyberieme 8 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny? $(108675/735471 = 0.1478)$
- c)* Náhodne vyberieme 8 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že tam budú zastúpené ČR, SR a Ukrajina? $(631116/735471 = 0.85811)$
- d) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere nebudú zastúpené ČR a SR? $(8008/134596)$
- e) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere budú aspoň dvaja z Rumunska? $(49324/134596)$

2. V nepriehľadnom vreci je 25 žetónov očíslovaných postupne od 1 do 25.

- Náhodne vyberieme 7 žetónov. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere sa bude/ú nachádzať
- a) číslo 1 ? b) čísla 1 aj 2? c) číslo 1 alebo 2 d)* aspoň 2 čísla obsahujúce cifru 1?
 - e)* Náhodne vyberieme 3 žetóny. Aká je pravdepodobnosť, že súčet ich čísel bude max. 30? (0.0926)

3. Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme

- a) jednu kartu. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme eso alebo zeleň? $(11/32)$
- b) dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že obidve budú eso alebo zeleň? $(55/496)$
- c) dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna z nich bude eso alebo zeleň? $(1-210/496)$

4. Hádzem kockou n-krát. Ako mám zvoliť n, aby pravdepodobnosť, že padne aspoň raz šestka, bola aspoň 50% (75%, 90%, 99%) ? $(4, 8, 13, 26)$

5. V skupine sú šiesti útočníci. Prvý strelí do brány s pravdepodobnosťou 49%, ďalší so 75%, 41%, 20%, 34%, 63%. Každý raz vystrelí. Vypočítajte pravdepodobnosť, že počas tejto zábavy padne aspoň 1 gól / aspoň dva góly. $(0.985304044 / 0.880616611)$

6. Vo firme pracuje 40 zamestnancov. Aká je pravdepodobnosť, že práve / aspoň dvaja z nich majú narodeniny v rovnaký deň? (29.2. nemá narodeniny nikto)

$$(0.0003364 ; 0.89123)$$

Všeobecne: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

7. Obrazovka počítača má rozmery 40cm x 70cm. Voľne sa po nej pohybuje mravec, ktorý sa v ľubovoľnom bode môže vyskytnúť s rovnakou pravdepodobnosťou. V náhodne zvolenom okamihu sa zaznamená poloha mravca a vypočíta sa, ku ktorému okraju obrazovky je po kolmici najbližšie. Aká je pravdepodobnosť, že najbližšie bude k ľavej strane?

8. Riešte príklad 9 z riešených úloh za predpokladu, že jedáleň zatvárajú o 14tej, teda kto obeduje m minút, musí si obed prevziať m minút pred 14tou.

9.** Je daná kružnica s polomerom 1 a do nej vpísaný rovnostranný trojuholník ABC. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolená tetiva kružnice bude kratšia ako strana trojuholníka ABC? (spýtajte sa googlu na [Bertrandov paradox](#))