Algr.

~~prednáška~~ Cvičenie 16.3.2007

Grupy

Homomorfizmy

$\varphi : G \to H$

$\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$

<u>Veta:</u> Nech G, H sú grupy
Nech $\varphi : G \to H$ je ~~homoform~~ homomorfizmus
Potom a) $\varphi(e) = e$ – jednotka v H (e: jednotka v G)
b) pre všetky $x \in G$ ~~$\varphi(x)$~~ $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

<u>Dôkaz:</u> a) Označme e_G jednotkový prvok G
e_H jednotkový prvok H

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G . e_G) = \varphi(e_G).\varphi(e_G)$$

$e_G . e_G = e_G$; φ je hom.

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G).e_H$$

$$\cancel{\varphi(e_G)} \cdot \varphi(e_G) = \cancel{\varphi(e_G)} \cdot e_H \quad \leftarrow \text{krátenie}$$

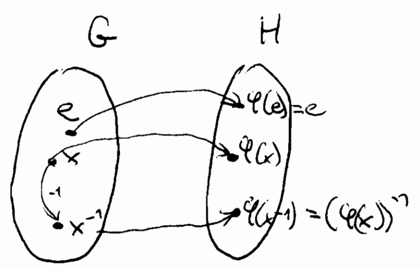
$$\varphi(e_G) = e_H$$

b) $e = \varphi(e) = \varphi(x \cdot x^{-1}) \overset{\text{hom}}{=} \varphi(x).\varphi(x^{-1})$

$e = \varphi(x).(\varphi(x))^{-1}$

$\cancel{\varphi(x)} \cdot \varphi(x^{-1}) = \cancel{\varphi(x)}.(\varphi(x))^{-1}$

$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ □



Nech A je množina

Označme S_A množinu všetkých bijekcií z A do A

Prvky S_A sa nazývajú permutácie A

$(S_A, \circ)$ je grupa ← Nie je abelovská grupa

skladanie zobrazení

Jednotkový prvok grupy S_A je $id_A : A \to A$

$id_A(x) = x$

Inverzný prvok k permutácii f je inverzné zobrazenie:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Ak $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Píšeme $S_A = S_n$

Tj. S_3 je grupa permutácií $\{1,2,3\}$

SŠ. kombinatorika $|S_n| = n!$

Ako zapisovať permutácie

Nech $f \in S_4$

1. spôsob $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pri veľké

2. spôsob $(4\,3\,2\,1)$ ← kratšie, ale blbé. Prečo?

Ak chcem zistiť $f(1)$ musíme rátať opačne

3. spôsob (skutočne používaný)

$f \in S_8$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $1 \xmapsto{f} 4 \xmapsto{f} 2 \xmapsto{f} 3 \xmapsto{f} 1$

Ako súčin cyklov

$(1\,4\,2\,3)(5\,8)$; 7 – nepíšeme

Príklad:

$g \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$(1\,8\,7\,6\,2\,3\,5\,4)$

$f \circ g = (1\,4\,2\,3)(5\,8) \circ (1\,8\,7\,6\,2\,3\,5\,4) = (1\,5\,2)(3\,8\,7\,6)\cancel{(4)}$

$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

1 2 3	
1 3 2	(23)
2 3 1	(123)
2 1 3	(12
3 1 2	(132)
3 2 1	(13)
1 2 3	()

∘	()	(23)	(123)	(12)	(132)	(13)
()	()	(2,3)	(123)	(12)	(132)	(13)
(23)	(23)	()	(13)	(132)	(12)	(123)
(123)	(123)	(1,2)	(132)	(13)	()	(23)
(1,2)	(12)	(1,23)	(23)	()	(13)	(132)
(132)	(132)	(1·)	()	(23)	(123	(12)
(13)	(13)	(132)	(12)	(123)	(23)	

chew

nie je abelovská

- Sa v žiadnom riadku a stĺpci nic neopakuje
- A, keď je grupa neabelovská e sú rozložené symetricky

Lebo $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$)

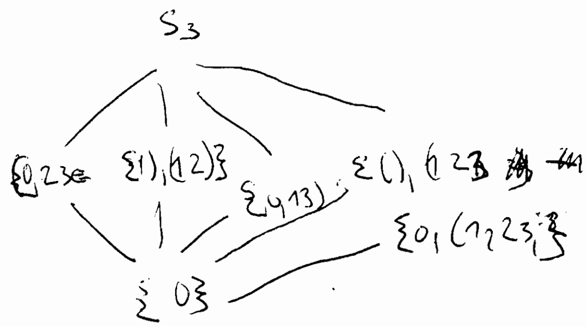
<u>Def</u> Nech G je grupa

Podgrupa je taká podmnožina $H \subseteq G$ $H \emptyset$, že

(SUB_2) $\forall x, y \in H : x \circ y \in H$

(Sub) $\forall x \in H : x^{-1} \in H$

Podgrupy S_3



Dôkaz

$H \neq \emptyset$

Nech $x \in H$: Potom (Subs 2) $x^{-1} \in H$ a

(Subs 1) $\underbrace{x \circ x^{-1}}_{e} \in H$ $\square$

Príklady

Q je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$

$(Q \setminus \{0\})$ je podgrupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}$ je podgrupa $(\mathbb{Q}, +)$ a teda

$\{-1, 1\}$ je podgrupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$,

Pre všetky $k \in N$ je

$k \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot x : x \in \mathbb{Z}\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}, *)$

Dôkaz. (SUB 1) Nech $a, b \in k \cdot \mathbb{Z}$. Potom

$a = k \cdot x_1, b = k \cdot x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$a + b = k \cdot x_1 + k \cdot x_2 = k \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in \mathbb{Z}} \in k \cdot \mathbb{Z}$

(SUB 2) Nech $a \in k \cdot \mathbb{Z}$. Potom $a = k \cdot x, x \in \mathbb{Z}$

$a = -k \cdot x = k \cdot \underbrace{(-x)}_{\in \mathbb{Z}} \in k \cdot \mathbb{Z}$

(10b) Prémia: Dokážte elementárnymi prostriedkami

- H je podgrupa $(\mathbb{Z}, +) \Rightarrow$

$\Rightarrow H = k\mathbb{Z}$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$

Veta: Nech $\varphi : G \to H$ je ~~homofor~~ homomorfizmus grúp

Potom: a) $\underset{\text{(jadro } \varphi)}{\mathrm{Ker}(\varphi)} = \{x \in G : \varphi(x) = e\}$ je podgrupa G

b) $\mathrm{Im}\, \varphi = \{\varphi(x) : x \in G\}$ je podgrupa H

(obraz φ)

(obor hodnôt φ)

Dôkaz: a) (SUB 1) Nech $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ $\quad \varphi(x_1) = e \quad \varphi(x_2) = e$

$\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \circ \varphi(x_2) = e \cdot e = e \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \mathrm{Ker}\, \varphi$

(SUB 2) Nech $x \in \ker \varphi$ $\quad$ kom $\quad$ $x \in \ker \varphi$

$$\varphi(e) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) . \varphi(x^{-1}) = e . \varphi(x^{-1})$$

$\varphi(e) = e$ ⟸ viď veta predtým

$$e = e . \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$x^{-1} \in \ker \varphi$$

b) (SUB 1) Nech $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_1) \\ y_2 = \varphi(x_2) \end{array}\right\} \text{pre nejaké } x_1, x_2 \in G$$

$$y_1 . y_2 = \varphi(x_1) . \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2)$$

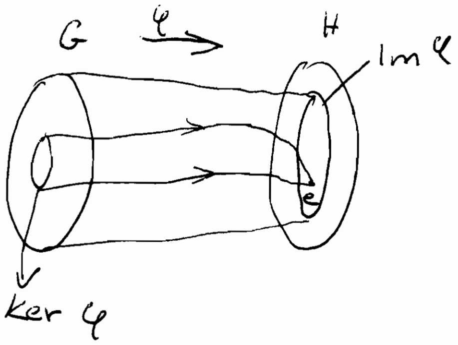
⇒ dopísať

(SUB 2) Nech $y \in \operatorname{Im} \varphi$

$y = \varphi(x)$ pre nejaké $x \in G$

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = y^{-1}$$

$$\varphi(x^{-1}) = y^{-1} \Rightarrow y^{-1} \in \operatorname{Im} \varphi$$



Príklady

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \xrightarrow{\varphi_1} (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$$

$$\varphi_1(x) = |x|$$

$$\operatorname{Ker}(\varphi_1) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \varphi_1(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi_1) = \{\varphi_1(x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{|x| : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \mathbb{R}^+$$

$\varphi_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, násobenie

$\varphi_2(x) = \frac{x}{|x|}$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} \varphi_2 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \varphi_2(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{|x|} = 1\} = \mathbb{R}^+$

$$\operatorname{Im} \varphi_2 = \{\varphi_2(x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{\tfrac{x}{|x|} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{-1, 1\}$$

Veta: φ je injektívny homomorfizmus grúp práve vtedy, keď $Ker(\varphi) = \{e\}$