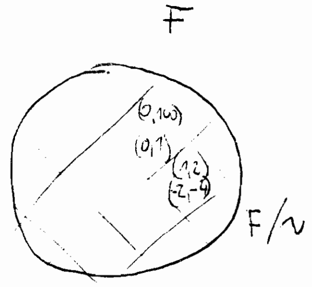
Algr.

26.2.2007.

Prednáška

Relácie ekvivalencie a rozklady



$(c_1, m_1) \sim (c_2, m_2) \Leftrightarrow$

$c_1 m_2 = c_2 m_1$

Relácia ekvivalencie na A je to isté ako "rozklad A"

Def: Nech A je množina

Rozklad množiny A je množina množín $\{A_i\}_{i \in I}$ - indexová množina, taká že:

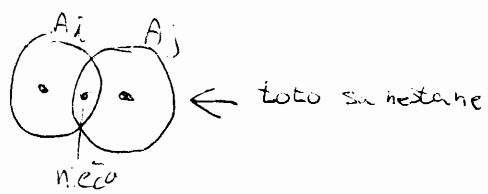
R0) Každá množina A_i je neprázdna

R1) Zjednotenie $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

R2) Ak $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $A_i = A_j$

Alebo (to je to isté)

Ak $A_i \neq A_j$, potom $A_i \cap A_j = \emptyset$



$P \Rightarrow Q$

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Príklad $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Rozklad $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

Rozklad $\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

—||— $\{\{1,2,3,4\}\}$

Nie Rozklad $\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$ - neplatí R_2

—||— $\{\{1,2\},\{3\}\}$ - neplatí R_1

$\{\{1,2\},\{3,4\},\emptyset\}$ - neplatí R_0

je množina

$\{\{1,2\},\{3,4\},\{3,4\}\} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

je aj rozklad

Od rozkladov k reláciám ekvivalencie

Def: Nech A je množina, nech $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ je nejaký jej rozklad. Definujme teraz pomocnú reláciu na A takto

$a_1 \sim_\alpha a_2 :\Leftrightarrow$ existuje $A_i \in \alpha$ také že $a_1 \in A_i$ a zároveň $a_2 \in A_i$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\alpha = \{\{1,3\}, \{2,4\}\}$

$1 \sim_\alpha 3$, $1, 3 \in \{1,3\} \in \alpha$

$1 \sim_\alpha 1$, $1, 1 \in \{1,3\} \in \alpha$

$2 \sim_\alpha 4$; $2, 4 \in \{2,4\} \in \alpha$

$1 \not\sim_\alpha 2$

Veta $\sim_\alpha$ je ekvivalencia.

Dôkaz **(R)**

$\forall a \in A : a \sim_\alpha a$

$\forall a \in A$: existuje $A_i \in \alpha$ také, že $a, a \in A_i$

Keďže $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ a $a \in A$, platí že pre aspoň jedno $A_i \in \alpha$ platí, že $a \in A_i$.

Teda $a \in A_i$ a zároveň $a \in A_i$

(S) $\forall a, b \in A$: $a \sim_\alpha b$, potom $b \sim_\alpha a$

$\forall a, b \in A$: Ak existuje A_i také, že $a \in A_i$ a zároveň $b \in A_i$

$\Downarrow$ $b \in A_j$ a zároveň $a \in A_j$

$A_j = A_i$

(T) $\forall a, b, c \in A$: $a \sim_\alpha b \wedge b \sim_\alpha c$

$\Downarrow$

$a \sim_\alpha c$

PREDPOKLAD $\begin{cases} \text{existuje } A_i \in \alpha \quad (a \in A_i) \wedge (b \in A_i) \\ \text{existuje } A_j \in \alpha \quad (b \in A_j) \wedge (c \in A_j) \end{cases}$

V akom vzťahu sú A_i, A_j?

$A_i \cap A_j \neq \emptyset$, lebo $b \in A_i \cap A_j$

Podľa (R2) z toho vyplýva, že $A_i = A_j$

$\left.\begin{array}{l} c \in A_j \quad A_i = A_j \\ a \in A_i \end{array}\right\}$ teda $c \in A_i$ a zároveň $a \in A_i$

to znamená že $a \sim_\alpha c$!!!

Existuje b, $b \in [a_1]_N \wedge b \in [a_2]_N$

$\dashv\vdash$ $(a_1 N b) \wedge (a_2 N b)$

Kedže N je (S), $a_2 N b \Rightarrow b N a_2$

Kedže N je (T), $(a_1 N b) \wedge (b N a_2) \Rightarrow a_1 N a_2$

$[a_1]_N \subseteq [a_2]$

Nech $x \in [a_1]_N$, tzn. $a_1 N x$

Kedže $a_1 N a_2$, (S) implikuje $a_2 N a_1$

Kedže $(a_2 N a_1) \wedge (a_1 N x) \underset{(T)}{\Rightarrow} a_2 N x$, to znamená $x \in [a_2]_N$ $\square$

Označenie: Ak N je ekvivalencia na A, potom A/N je zodpovedajúci rozklad

Platí: Ak α je rozklad A, $\alpha = A/N_\alpha$

Ak N je ekvivalencia na A

$N = N_{(A/N)}$

Príklad: $N \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$x N y :\Leftrightarrow |x| = |y|$

$\mathbb{Z}/N = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \ldots\}$

Čiastočné usporiadanie množiny (posety)

Def: Ak A je množina, potom čiastočné usporiadanie je taká relácia $\leq$ na A, že $\leq$ je
- reflexívna
- antisimetrická
- tranzitívna

~~Def~~ **Def.** Čiastočne usporiadaná množina (poset) partially ordered set je $(A, \leq)$, kde $\leq$ je čiastočné usporiadanie na A

Príklad

$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{Z}, \leq) \\ (\mathbb{N}, \leq)\end{array}\right\}$ retazce $\quad (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$

~~Príklad.~~

~~$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$~~

Príklad $\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\mathcal{A}=\{\{0,3,6,9,12,\dots\}, \{1,4,7,10,13,\dots\}, \{2,5,8,11,14\dots\}\}$

$x \sim_{\mathcal{A}} y :\Leftrightarrow x, y$ majú rovnaký zvyšok po delení tromi

Od relácie ekvivalencie k rozkladom.

Def. Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine A

Pre každé $a\in A$ vytvorme množinu $[a]_\sim$ (nazývame trieda ekvivalencie prvku a) takto $[a]_\sim=\{b\in A: a\sim b\}$

Veta $\{[a]_\sim : a\in A\}$ je rozklad A.

Dôkaz:

(R0) platí, lebo $a\in[a]_\sim$, teda [

$\Downarrow$

$[a]_\sim = \{b : a\sim b\}$

$a\in[a]_\sim \Leftrightarrow a\sim a$ platí, lebo

$\sim$ je reflexívna

(R1) Je pravda, že $\bigcup_{a\in A}$

(naša indexová množina je A

$\subseteq$ je pravda, lebo každé je podmnožinou A (tak boli definované $[a]_\sim$)

$\supseteq$ nech $b\in A$, potom (reflexivita) $b\in[b]_\sim$ a teda aj $b\in\bigcup_{a\in}[a]_\sim$ } stačí zobrať $b=a$

(R2) Uberme $[a_1]_\sim, [a_2]_\sim$ predpokladajme, že $[a_1]_\sim\cap[a_2]_\sim\neq\emptyset$.

Máme dokázať, že $[a_1]_\sim=[a_2]_\sim$

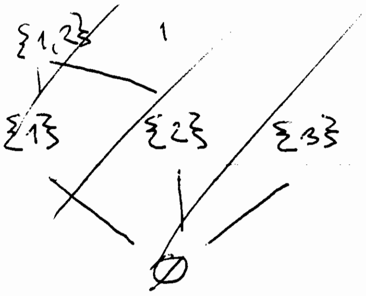
Ideme najprv $[a_1]_\sim\subseteq[a_2]_\sim$

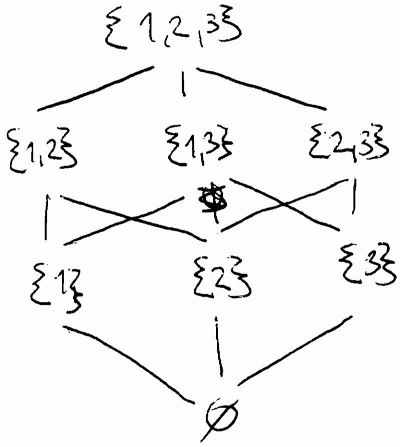
$[a_1]_\sim=\{b\in A: a_1\sim b\}$

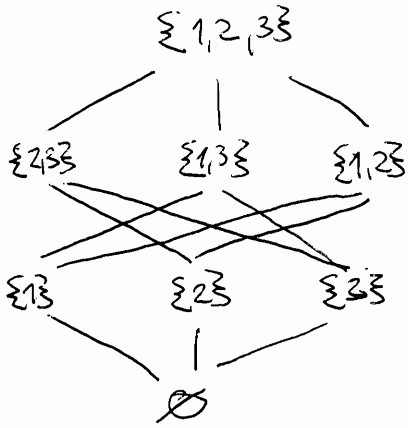
$[a_2]_\sim=\{b\in A: a_2\sim b\}$

$[a_1]_\sim\cap[a_2]_\sim\neq\emptyset$, teda existuje nejaké $b\in[a_1]_\sim\cap[a_2]_\sim$

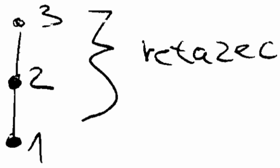
$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$





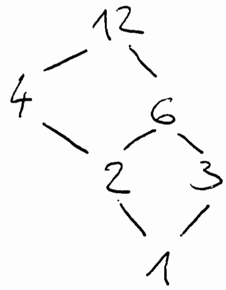


$(\{1,2,3\}, \leq)$



$(\{1,2,3,4,6,12\}, \mid)$

delí

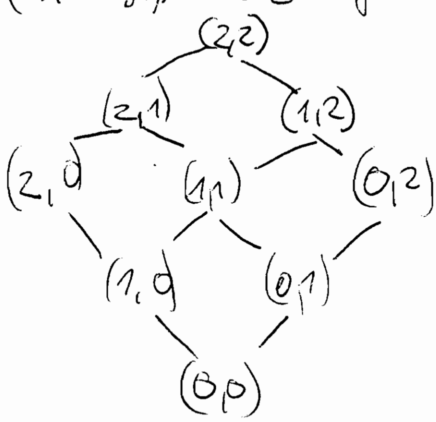


$(\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}, \leq)$

$(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$

$(1,2) \leq (2,3)$

$(1,2) \leq (0,2)$



Algr. 1.3.2007.

cvičenie

Veta: Nech A, B sú množiny

$$\varphi : A \to B$$

Definujme $\sim_\varphi$ na A takto

Pre $x, y \in A$

$$x \sim_\varphi y :\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

Potom $\sim_\varphi$ je ekvivalencia

Dôkaz (R) $\forall a \in A : a \sim_\varphi a$

$\forall a \in A : \varphi(a) = \varphi(a)$ zrejme platí

(S) $\forall a, b \in A : a \sim_\varphi b \Rightarrow b \sim_\varphi a$

$\quad$ —‖— $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)$ platí

!! (T) DÚ

Príklad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(a) = |a|$$

$$a \sim_\varphi b :\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

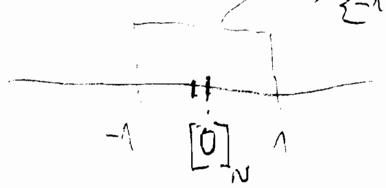
$$|a| = |b|$$

$$[0]_{\sim_\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim_\varphi 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = \varphi(0)\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = |0|\} = \{0\}$$

$$[1]_{\sim_\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim_\varphi 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = |1|\} = \{-1, 1\}$$

$$\mathbb{R}/\sim_\varphi = \{[a]_{\sim_\varphi} : a \in \mathbb{R}\} = \{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$$

$$\{-1, 1\} = [1]_\sim = [-1]_\sim$$



Príklad

$\sin \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

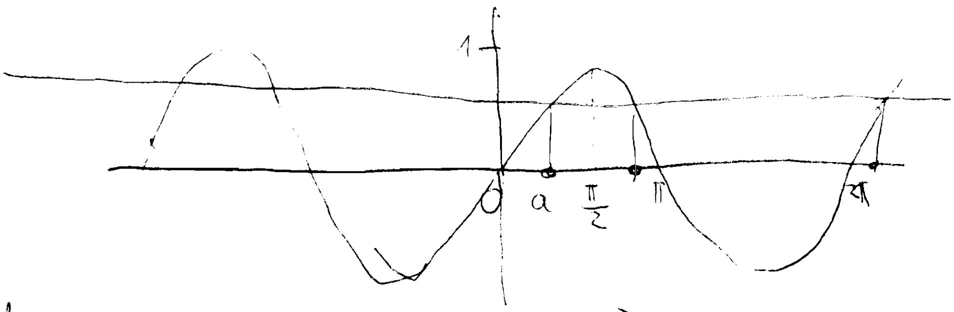
$\sim_{\sin}$ je ekvivalencia podľa Vety

$\mathbb{R}/\sim_{\sin}$

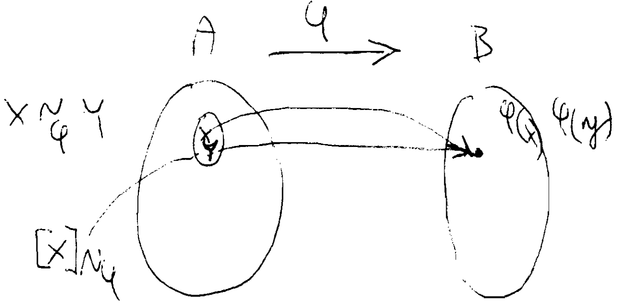
$$[0]_\sim = \{x \in \mathbb{R} : x \sim_{\sin} 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \sin(0)\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[\pi]_{\sim_{\sin}} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \sin(\pi)\} = [0]_{\sim_{\sin}}$$

$a \sim_{\sin} b$



$[a]_{\sim_{\sin}}$



Príklad: $\sim$ je relácia na $R \times R$ daná takto:

$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

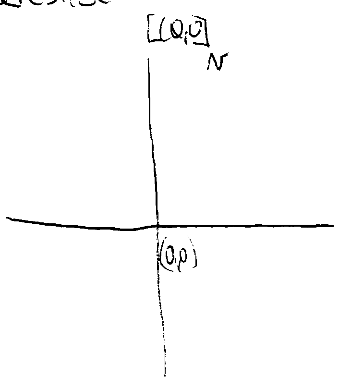
$\in R \times R$

$\sim \; = \; \sim_\varphi$

$\varphi : R \times R \to R$

$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Nakreslite



$[(0,0)]_\sim =$

$= \{(x_1, x_2) \in R \times R : (x_1, x_2) \sim (0,0)\} =$

~~$\{(y_1, x_2) \in R \times R$~~

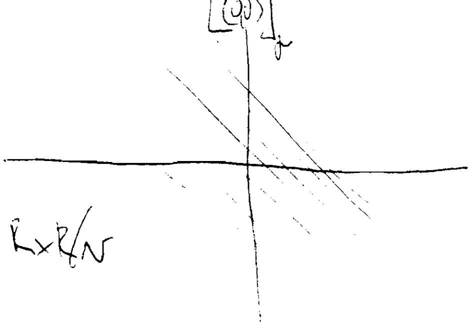
$= \{(y_1, x_2) \in R \times R : x_1 + x_2 = 0 + 0\}$

$= \{(x_1, x_2) \in R \times R : x_1 + x_2 = 0\}$

Nakreslite $[(2,-1)]_\sim \in R \times R$

$[(2,-1)]_\sim = \{(x_1, x_2) \; (x_1, x_2) \sim (2,-1)\} = \ldots = \{(x_1, x_2) \in R \times R : x_1 + x_2 = 1\}$

Ako vyzerá $R \times R/_\sim$



$R \times R/_\sim$

Príklad: P je množina všetkých bodov v rovine; O je fixný bod

Pre $A, B \in P$

$A \sim B \Leftrightarrow |AO| = |BO|$

dĺžka úsečky

$\sim$ je ekvivalencia, nájdite 3 rôzne triedy v $P/\sim$

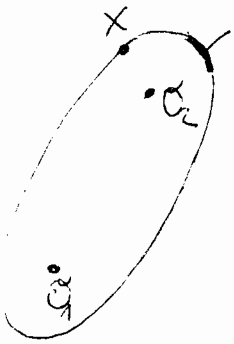
$[O]_\sim = \{X \in P : X \sim O\} = \{X \in P : |XO| = |OO|\} = \{X \in P : |XO| = 0\} = \{O\}$

Príklad: P je množina všetkých bodov v rovine, $O_1, O_2 \in P$

Pre $A, B \in P$

$A \sim B \Longleftrightarrow |AO_1| + |AO_2| = |BO_1| + |BO_2|$

$[X]_\sim$ je elipsa s ohniskom O_1, O_2 prechádzajúca cez X

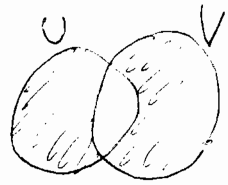


$[O_1]_\sim$

DU $\quad |AO_1| - |AO_2| = |BO_1| - |BQ_2|$

Príklad $\quad \sim$ je relácia na $2^{\mathbb{N}}$

$U \sim V :\Longleftrightarrow (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ je konečná



$(U \setminus V) \cup (V \setminus U)$

Dokážte že $\sim$ je ekvivalencia

(R) $\forall A \in 2^{\mathbb{N}}$

$\{1\} \sim \{2,3\} \cdot \{\{1\} \setminus \{2,3\}\} \cup \{\{2,3\} \setminus \{1\}\} = \{1\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

$\{2,3\} \sim \{3,17\}$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow$ (R) $\forall A \in 2^{\mathbb{N}} : A \sim A$

— " — $: (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$ je konečná

$\emptyset \rightarrow$ platí

(S) $\forall : A,B \in 2^{\mathbb{N}} \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$\dashv\vdash$ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná

$\Downarrow$

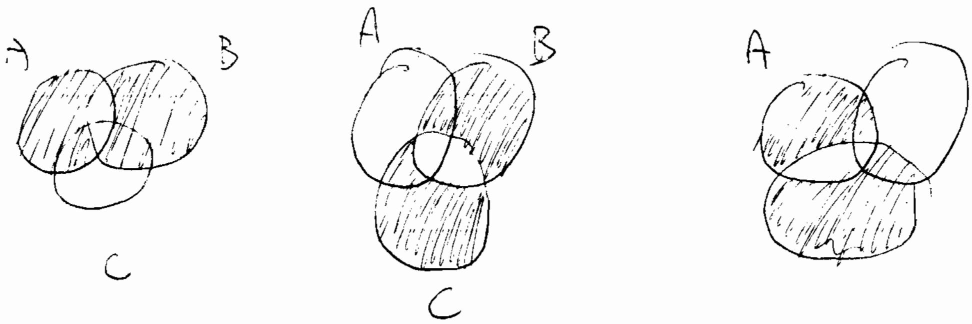
$(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ je konečná

$\cup$ - je komutativní

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

(T) $\forall A,B,C \in 2^{\mathbb{N}} : A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\forall A,B,C \in 2^{\mathbb{N}} :$ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná
$(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ je konečná $\Rightarrow (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ je konečná



$(A \setminus C) \cup (C \setminus A) \subseteq [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cup [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]$

$\downarrow$ konečná $\quad \downarrow$ konečná

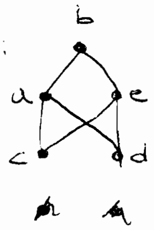
konečná $\Leftarrow$ konečná

POSETY

Definícia: Nech $(P, \leq)$ je poset

- m je minimálny, ak „od neho nie je ~~väčší~~ menší"
  $\forall x \in P: x \leq m \Rightarrow x = m$
- m je maximálny, ak
  $\forall x \in P: x \geq m \Rightarrow x = m$
- m je najmenší, ak
  $\forall x \in P: x \geq m$
- m je najväčší, ak
  $\forall x \in P: x \leq m$. $\square$

Príklad:



najväčší b
najmenší nemá
minimálny $\{c, d\}$
maximálny $\{b\}$

Veta: Každý najväčší prvok je maximálny (a každý najmenší je minimálny)

Dôkaz:

Nech m je najväčší

$\forall x \in P: x \leq m$

$\forall y \in P: y \geq m \Rightarrow y = m$ ⟵ platí?

Nech $y \geq m$
Keďže m je najväčší, $y \leq m$

$y \geq m \wedge m \geq y \Rightarrow y = m$

$\geq$ je (AS) $\square$

Prémia (5b):

- Nájdite poset, kt. má jediný maximálny prvok a nemá najväčší.

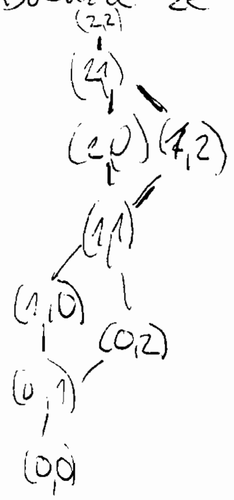
Nakreslite diagram posetu

$P = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0) \dots (2,2)\}$ – 9 prvkov

$(x_1,x_2) \le (y_1,y_2) \iff (x_1+x_2 \le y_1+y_2) \wedge$

$\wedge (x_1 \le y_1)$

D.Ú. – Dokážte že toto je čiastočné usporiadanie



D.Ú. $P = \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$

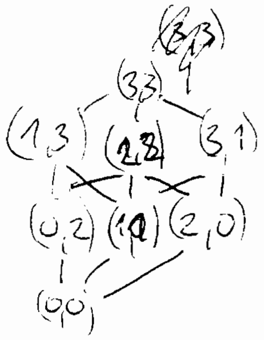
Príklad:

$P \subseteq \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$

$P = \{(x_1,x_2) : x_1+x_2$ je párne$\}$

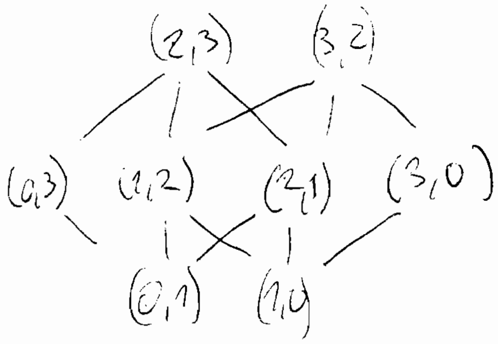
$(x_1,x_2) \le_2 (y_1,y_2) \iff (x_1 \le y_1) \wedge (x_2 \le y_2)$

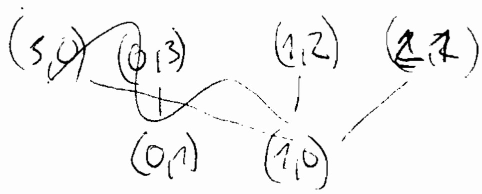
$P = \{(0,0),(0,2),(1,1),(1,3),(2,0),(3,1),(3,3)\}$



Pre P nepárne

$P = \{(0,1),(0,3),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3),(3,0),(3,2)\}$





$P = \{M \in 2^{\{1,2,3,4\}} : \text{súčet prvkov v } M \text{ je párny}\}$

$P = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

$(P, \subseteq)$