Algr. cvičenie 19. 4.

písomka

$Ker(\varphi_{ab})$ nezávisina voľbeb

$\forall\, b_1, b_2 \; G : Ker(\varphi_{ab_1}) = Ker(\varphi_{ab_2})$

$Ker(\varphi_{ab_1}) = \{k \in \mathbb{Z} : \varphi\, \varphi_{ab_1}(k) = e\}$

$\downarrow$ G

$b_1 a^k b_1^{-1} = e \leftarrow$ rovnosť v G

$b_1^{-1} b_1 a^k b_1^{-1} = \cancel{a}\; \cancel{b_1^{-1} b_1 a^k b_1}$

$a^k \cdot b_1^{-1} = \cancel{e \cdot b_1}\; b^{-1} e \quad / \cdot b$

b^{-1}

$a^k \cdot b_1^{-1} b_1 = b_1^{-1} b_1$

Stačí obrázok k dokázaniu že je zväz

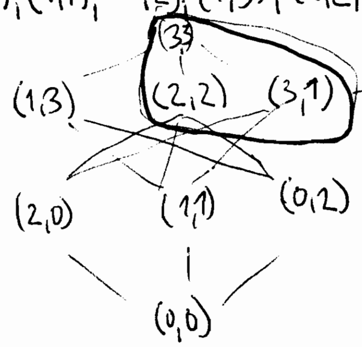
Nech $P = \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$

$P_p = \{(x_1, x_2) \in P : x_1 + x_2$ je párne$\}$

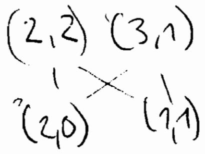
$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ & $x_2 \leq y_2$

je $(P_p, \leq)$ zväz?

$P_p = \{(0,0), (2,0), (1,1), (0,2), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$



horné ohraničenia $\{(2,0)(1,1)\}$



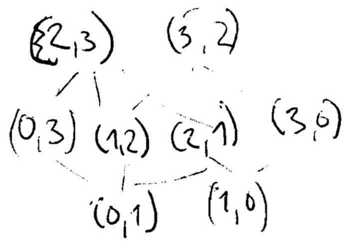
$(2,0) \vee (1,1)$ neexistuje

$P_N = \{(x_1, x_2) \in P : x_1 + x_2$ je nepárne$\}$

2 rôzne minimálne

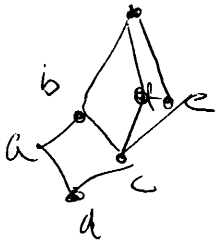
$x \vee y$ neexistuje

$P_p = \{(0,1), (1,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (2,3), (3,2)\}$



Príklad. Toto je Cayleyho tabuľku operácie $\wedge$ na nejakom zväze nakreslite ho a napíšte Cayleyho tabuľkyu spojenia $\vee$

$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	d	d	d	d	a
b	a	b	c	d	c	c	b
c	d	c	c	d	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d
e	d	c	c	d	e	c	e
f	d	c	c	d	c	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g



$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$

Prémia (12 bodov) Nech $(G, \cdot)$ je grupa, nech $(H, \cdot)$ je ~~potom~~ podgrupa. Potom a), b) sú ekvivalentné

a) H je normálna

b) pre všetky $x \in G$ $Hx = xH$

Hx je množina

xH je množina

$Hx = xH$ je rovnosť množín

$Hx = xH$ znamená menej ako $\forall y \in H : yx = xy$

$Hx = xH$ znamená

$\forall y_1 \in H : \exists\, y_2 \in H : y_1 x = x y_2$

$\wedge$

$\forall y_2 \in H : \exists\, y_1 \in H : y_1 x = x y_2$

Prednáška

Ak $(L, \leq)$ je zväz, potom platia

(L1) $a \wedge a = a$

$a \vee a = a$

(L2) $a \wedge b = b \wedge a$

$a \vee b = b \vee a$

(L3) asociativita $\wedge, \vee$

(L3) absorpcia

$a \wedge (a \vee b) = a$

$a \vee (a \wedge b) = a$

Teraz: (Veta) $(L, \wedge, \wedge)$ je také že (L1) – (L4) definujeme $\leq$ takto

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x \wedge y = x$$

Potom $(L, \leq)$ je zväz, $x \vee y = \sup\{x, y\}$

$x \wedge y = \inf\{x, y\}$

Dôkaz: $\leq$ je čast suprema

(R) $\forall a : a \leq a$

$\forall a : a \wedge a$ platí (L1)

(AS) $\forall a, b : (a \leq b) \& (b \leq a) \Rightarrow a = b$

$\forall a, b : (a \wedge b = a) \& (b \wedge a = b)$

$\left.\begin{matrix} a \wedge b = a \\ b \wedge a = b \end{matrix}\right\} a = a \wedge b = b \wedge a = b$

$a = b$

(L2) $a \wedge b = b \wedge a$

(T) $\forall a, b, c : (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

$\left.\begin{matrix} a \wedge b = a \\ b \wedge c = c \end{matrix}\right\}$ dosadíme

$a \wedge (b \wedge c) = a$

$a \wedge (b \wedge c) = a$

(L3) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ $\Big\}$ $(a \wedge b) \wedge c = a$ $\Big\}$ $\Rightarrow a \wedge c = a \Leftrightarrow a \leq c$ je T

$a \wedge b = a$

$\Downarrow$

predpoklad

!!! spojenie

je $(L, \leq)$ zväz?

dokážme, že

$\forall a, b: a \wedge b = \inf\{a, b\}$

1) $a \wedge b$ je dolným ohraničením $\{a, b\}$

$a \wedge b \leq a$ – treba dokázať

$a \wedge b \leq b$.

rovnako (asoc)

$a \wedge b \leq a \Leftrightarrow a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$

$a \wedge (a \wedge b) = \underset{(L3)}{(a \wedge a)} \wedge b \underset{(L1)}{=} a \wedge b$

2) $a \wedge b$ je najväčším dolným ohraničením $\{a, b\}$

Nech c je dolným ohraničením $\{a, b\}$

$c \leq a$

$c \leq b$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $c \leq a \wedge b$

$c \wedge a = c$

$c \wedge b = c$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $c \wedge a \wedge b = c$

áno (dosadíte) $(c \wedge b) \wedge a = c$

Zostáva: (join) $\vee$

$a \vee b = \sup\{a, b\}$

1) $a \vee b$ je horným ohraničením $\{a, b\}$

$a \leq a \vee b$

$b \leq a \vee b$

$a \leq a \vee b \Leftrightarrow a \wedge (a \vee b) \overset{(L4)}{=} a$

$b \leq a \vee b \Leftrightarrow b \wedge (a \vee b) = b$

$b \wedge (b \vee a) = b$

2) $a \vee b$ je najmenším horným ohraničením $\{a, b\}$

Nech C je horné ohraničenie $\{a, b\}$

t.j. $a \leq c$, $b \leq c$. Treba dokázať, že $a \vee b \leq c$

$a \leq c \Leftrightarrow a \wedge c = a$

$b \leq c \Leftrightarrow b \wedge c = b$

$a \wedge c = a \Rightarrow (a \wedge c) \vee c = a \vee c$

$(a \wedge c) \vee c = c \vee (a \wedge c) = c$ $\Big\}$ $\Rightarrow a \vee c = c$ (*)

Podobne $b \wedge c = b \Rightarrow b \vee c = c$ (**)

$a \vee b \overset{?}{\leq} c \iff (a \vee b) \wedge c = a \vee b$

$(a \vee b) \wedge c \underset{(L2)}{=} c \wedge (a \vee b) \underset{(*)}{=} (a \vee c) \wedge (a \vee b) \underset{(**)}{=} (a \vee (b \vee c)) \wedge (a \vee b) \underset{(L3)}{=} \quad (x \vee y) \wedge x = x$

$\hookrightarrow = ((a \vee b) \vee c) \wedge (a \vee b) \underset{L_1}{=} a \vee b \quad \square$

Prémia 8: V mojej def grupy je voľačo zbytočné. V axiome ~~inverz.~~ jednot. prvku tvrdím ~~(G3) $\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G$~~:

(G2') $(\exists e \in G\ \forall x \in G)\ x \cdot e = e x = x$

$\to x^{-1}$

dokážte že $(G1 \wedge G2' \wedge G3) \Rightarrow G2$