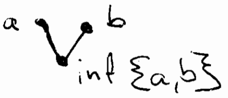
Algr. cvičenia
26.4.2007

Veta: Nech H je normálna podgrupa G. Potom triedy ekvivalencie kongruencie $\sim_H$ sú $\{Hx : x \in G\}$ Inými slovami pre všetky $x \in G$ máme $[x]_{\sim_H} = Hx$

Polozväz je taký poset $(P, \leq)$, že pre všetky $a, b \in P$ existuje $\inf\{a,b\}$

1), Nájdite polozväz, ktorý nie je zväz



supremum $\{a,b\}$ neexistuje

2), Dokážte, že každý konečný polozväz má najmenší prvok

Nech $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ je polozväz

$\inf S$ existuje v $(S, \leq)$

$\Downarrow$

toto je najmenší prvok v $(S, \leq)$

Dôkaz

m je najmenší prvok $(S, \leq)$ $:\Leftrightarrow$ pre všetky $a \in S$ platí, že $m \leq a$.

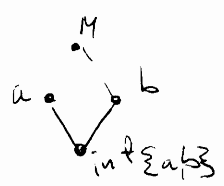
$\inf(S)$ je najmenším dolným ohraničením S, teda je dolným ohraničením S, teda $\forall a \in S : m \leq a$ $\square$

3. Najdite polozväz, ktorý nemá najmenší prvok. odpoveď $(\mathbb{Z}, \leq)$

4. Dokážte: každý konečný polozväz, ktorý má najväčší prvok je zväz.

Nech $(S, \leq)$ je konečný polozväz

Máme dokázať $\forall a, b \in S : \inf\{a,b\}$ existuje $\Leftarrow$ to totiž vieme bo je polozväz



$\forall a, b \in S : \sup\{a,b\}$ existuje

Najväčší prvok v $(S, \leq)$ označíme M

$\sup\{a,b\} = \inf H_{a,b}$, kde $H_{a,b}$ je množina všetkých horných ohraničení množiny $\{a,b\}$

Dôkaz

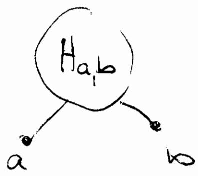
1, $\inf H_{a,b}$ je horné ohraničenie $\{a,b\}$?

$\left.\begin{array}{l} a \leq \inf H_{a,b} \\ b \leq \inf H_{a,b} \end{array}\right\}$ stačí jedno?

inf $H_{a,b}$

$H_{a,b}$ je neprázdna, $(M \in H_{a,b}^2)$

teda inf. $H_{a,b}$ existuje



~~Nt~~ inf $H_{a,b}$ je najväčšie dolné ohraničenie $H_{a,b}$

$H_{a,b} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

$\inf H_{a,b} = h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge \dots \wedge h_n$

$a \leq \inf H_{a,b} \Leftrightarrow a \wedge \inf H_{a,b} = a$

$a \wedge \inf H_{a,b} = a \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge \dots \wedge h_n = a \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n = \dots = a \wedge h_n = a$

2) ak h je ohraničenie $\{a,b\}$, potom $\inf H_{a,b} \leq h$

$\inf H_{a,b} = h_1 \wedge \dots \wedge h_n$

$h \in H_{a,b}$

h je medzi nimi

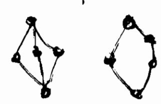
$\inf H_{a,b} \leq h \Leftrightarrow h \wedge \inf H_{a,b} = \inf H_{a,b} \Leftrightarrow h \wedge h_1 \wedge \dots \wedge h_n = h_1 \wedge \dots \wedge h_n$

Nech $h_1 = h$

$h \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n = h \wedge h \wedge h_2 \dots \wedge h_n = h \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n = h_1 \wedge \dots \wedge h_n$

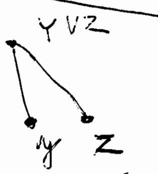
5. Dokážte bez použitia vety o diamante a pentagone, že každý reťazec je distributívny zväz

<u>Veta</u> $(L, \wedge, \vee)$ je distributívny, ak neobsahuje



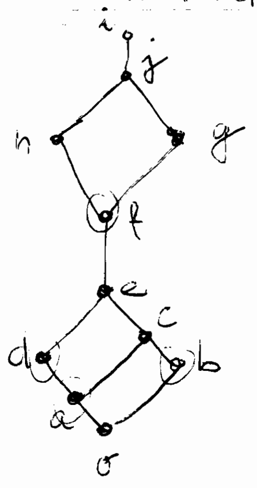
$\forall x, y, z: x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

~~Keďže~~ máme reťazec, tak buď $x \leq y \vee z$, alebo $x \geq y \vee z$



Nech $x \leq y \vee z$. Potom $x \wedge (y \vee z) = x$

Nájdite kanonickú reprezentáciu distributívneho zväzu ako: $H(J(L))$

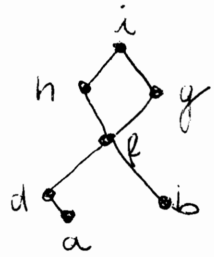


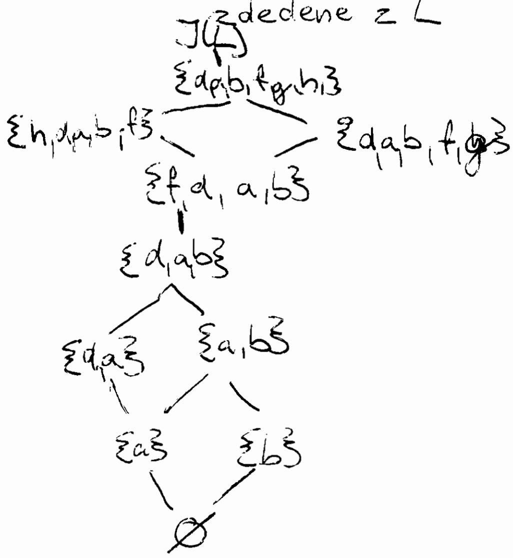
$J(L) = \{a, b, d, f, g, h, i\}$ pokrývajú práve jeden

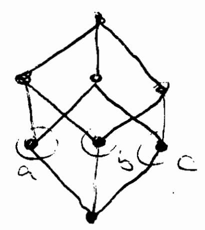
$z \in J(L) \iff (x \vee y = z \Rightarrow z = x \text{ alebo } z = y)$

$(J(L), \leq)$

$\downarrow$ zdedené z L







$J(L)$

$\downarrow$

$\bullet a \quad \bullet b \quad \bullet c$

$H(J(L)) = 2^{J(L)}$

Dokážte, že ak $\textcircled{\sim}$ je kongruencia na zväze a $x_1 \textcircled{\sim} x_1$, potom

$$x_1 \textcircled{\sim} x_1 \vee x_2$$
$$x_1 \textcircled{\sim} x_1 \wedge x_2$$

$x_1 \textcircled{\sim} x_2$

$x_1 \textcircled{\sim} x_1$

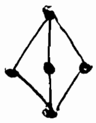
$\textcircled{\sim}$ je kongruencia

$$x_1 \vee x_1 \textcircled{\sim} x_2 \vee x_1$$
$$x_1 \textcircled{\sim} x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \wedge x_1 \textcircled{\sim} x_2 \wedge x_1$$
$$x_1 \textcircled{\sim} x_1 \wedge x_2$$

Inými slovami, pre každé x je $[x]_{\sim}$ podzväz.

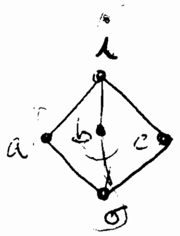
Dokážte, že diamant má práve 2 kongruencie.



M_3

$\mathrm{Con}(M_3)$ $\qquad id_{M_3}$ je kongruencia

$\qquad M_3 \times M_3$ je kongruencia



Nech $a \sim \sigma$.

$$\left.\begin{array}{l} a \sim \sigma \\ b \sim b \end{array}\right\} \underbrace{a \vee b}_{= i} \sim \underbrace{\sigma \vee b}_{= b}$$

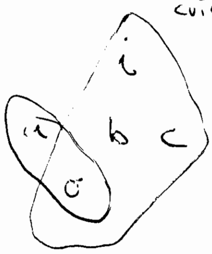
$$\left.\begin{array}{l} a \sim \sigma \\ b \sim b \end{array}\right\} a \wedge b \sim \sigma \wedge b$$

tým sme veľa neodvodili takže nebudeme týmto smerom pokračovať.

$$\left.\begin{array}{l} i \sim c \\ i \sim b \end{array}\right\} b \sim c$$

$\sim$ je ekvivalencia

$$b \sim c \xRightarrow{\text{predošlé cvičenie}} b \sim \underbrace{b \wedge c}_{= \sigma}$$



$\sim$ je ekvivalencia

$[a]_{\sim}$

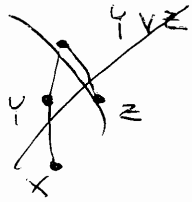
$[b]_{\sim} = \{\sigma\} \neq \emptyset$

$[a]_{\sim} = M_3 \times M_3$

AA) ~~Ak $x \leq y$~~

~~$(x \wedge y) \vee (y \vee z) =$~~

~~$= x \vee (y \vee z)$~~



– ženča je dnes mimo (nejde mato)

$y \leq x$

$L: x \wedge (y \vee z)$

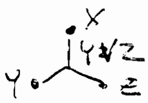
$P: (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee (x \wedge z)$

$y \leq x \leq z$: $L = x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$

$P = y \vee (x \wedge z) = y \vee x = x$

$y \leq x$

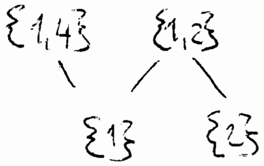
$z \leq x$



$L: x \wedge (y \vee z) = y \vee z$

$P: y \vee (x \wedge z) = y \vee z$

Nech $(P, \leq)$ je poset množín $P = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,4\}\}$



Napíšte $H(P)$

$H(P) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{1,2\},\{1\},\{2\}\}, \{\{1,4\},\{1\}\}, P\}$

Nakreslite diagram $(H(P), \subseteq)$