Algr.

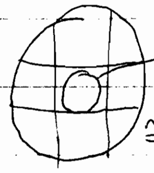
Prednáška 26.3.2007

Nech G_1 je grupa.
Ako vyzerajú $\mathrm{Im}\,\varphi$, kde $\varphi: G_1 \to G_2$ je nejaký homomorfizmus?

$G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$, $G_1 \xrightarrow{\varphi'} G_2'$ } všelijaké prvky

Otázka nie je $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_2)$, ale či $\mathrm{Im}(\varphi_1) \overset{\text{izomorfné}}{\cong} \mathrm{Im}(\varphi_2)$?
Všetky možné $\mathrm{Im}\,\varphi$

~~Def~~

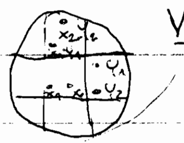


táto trieda „vyzerá rovnako"
$\cong$

Kongruencie grúp

Def: nech $(G, \circ)$ je grupa
Potom kongruencia na G je taká $\Theta \subseteq G \times G$, že
- Θ je ekvivalencia
- Pre všetky $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ platí $(x_1 \Theta x_2) \wedge (y_1 \Theta y_2) \Rightarrow x_1 \cdot y_1 \Theta x_2 \cdot y_2$ $\square$

G/Θ



Veta: Nech $(G, \cdot)$ je grupa, nech Θ je kongruencia na G.
Vybavme G/Θ operáciou $\cdot$ takto
$[x]_\Theta \cdot [y]_\Theta := [x \cdot y]_\Theta$
Potom $(G/\Theta, \cdot)$ je grupa.

Dôkaz: Dokážme že $\cdot$ na G/Θ je dobre definované, t.j. že $[x \cdot y]_\Theta$ „nezávisí na výbere reprezentanta" z $[\,]_\sim, [\,]_\sim$ naľavo $\sim (*)$, t.j. na výbere x, y.
Vezmime $x_2\, y_2$ také že $x \Theta x_2$, $y \Theta y_2$ $\quad [x_2]_\Theta \cdot [y_2]_\Theta = [x_2 y_2]_\Theta \overset{?}{=} [x \cdot y]_\Theta$

To však je pravda, lebo $(x \Theta x_2) \wedge (y \Theta y_2)$
keďže Θ je kongruencia
$x \cdot y \Theta x_2 \cdot y_2$
Inými slovami $[x \cdot y]_\Theta = [x_2 \cdot y_2]_\Theta$

je $(G/\Theta, \cdot)$ grupa?

(G1) $([x]_\Theta \cdot [y]_\Theta) \cdot [z]_\Theta \overset{\Theta \text{ je kongruencia}}{=} ([x \cdot y]_\Theta) \cdot [z]_\Theta \overset{\Theta \text{ je kong.}}{=} [(x \cdot y) \cdot z]_\Theta \overset{\cdot \text{ je asociatívny}}{=} [x \cdot (y \cdot z)]_\Theta \overset{\text{je kong.}}{=} [x]_\Theta\, [y \cdot z]_\Theta = [x]_\Theta \cdot ([y]_\Theta \cdot [z]_\Theta)$

(G2) Jednotkový prvok v G/Θ bude $[e]_\Theta$, kde e je jednotkový v G
$[x]_\Theta \cdot [e]_\Theta = [x \cdot e]_\Theta = [x]_\Theta$, podobne $[e]_\Theta \cdot [x]_\Theta = [x]_\Theta$
$x \cdot e = x$ v G

(G3) Inverzný prvok k $[x]_\Theta$ bude $[x^{-1}]_\Theta$ $\quad$ $[x]_\Theta \cdot [x^{-1}]_\Theta = [x \cdot x^{-1}]_\Theta = [e]_\Theta$
inverzný v G $\quad$ $[x^{-1}]_\Theta \cdot [x]_\Theta = [x^{-1} \cdot x]_\Theta =$ —||— $\square$

Príklad: 1, Ak G je grupa, potom $id_G = \{(x,x) : x \in G\}$ je kongruencia
2, Ak G je grupa potom $G \times G$ je kongruencia
3, $(\mathbb{R}, +)$ $\Theta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$x_1 \Theta x_2 :\Leftrightarrow$ (~~x_1, x_2 majú rovnakú desatinnú časť~~ $(x_1 - x_2 \in \mathbb{Z})$)

4, $C(\mathbb{R})$ – všetky spojité fcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(C(\mathbb{R}), +)$ je grupa
$\Theta \subseteq C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R})$
$f_1 \Theta f_2 :\Leftrightarrow f_1(0) = f_2(0)$

5, $(\mathbb{Z}, +)$. Nech $k \in \mathbb{N}^+$
$x_1 \sim_k x_2 :=$ x_1, x_2 majú rovnaký zvyšok po delení k

Súvislosť medzi kongruenciami a homomorfizmami

Veta: Nech G_1, G_2 sú grupy, $\varphi: G_1 \to G_2$ je homomorfizmus.
Potom $\sim_\varphi \subseteq G_1 \times G_1$ daná predpisom $a_1 \sim_\varphi a_2 :\Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ je kongruencia na G_1. Navyše $G_1/\sim_\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$

Dôkaz: Podľa nejakej Vety, ktorú som odprednášal, je $\sim_\varphi$ ekvivalencia

Nech $x_1 \sim_\varphi x_2$

$y_1 \sim_\varphi y_2$

$x_1 \sim_\varphi x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

$y_1 \sim_\varphi y_2 \Leftrightarrow \varphi(y_1) = \varphi(y_2)$

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
$\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$ v G_2 $\quad \varphi(x_1) \cdot \varphi(y_1) = \varphi(x_2) \cdot \varphi(y_2)$ je kongruencia

$$\varphi(x_1 \cdot y_1) \underset{\text{je kong.}}{=} \varphi(x_1) \cdot \varphi(y_1) = \varphi(x_2) \cdot \varphi(y_2) = \varphi(x_2 \cdot y_2)$$

$\varphi(x_1 \cdot y_1) = \varphi(x_2 \cdot y_2)$

$x_1 y_1 \sim_\varphi x_2 y_2$

Navyše $G_1 / \sim_\varphi = \text{Im}\, \varphi$

Prečo?:

Zobrazme $\psi : G_1 / \sim_\varphi \to \text{Im}\, \varphi$

takto $\psi([x]_{\sim_\varphi}) = \varphi(x)$

M

ψ je ~~homoforam~~ homomorfizmus

$$\psi([x]_{\sim\varphi} \cdot [y]_{\sim\varphi}) \underset{\text{def. na } G_1/\sim_\varphi}{=} \psi([x \cdot y]_{\sim\varphi}) = \varphi(x \cdot y) \underset{\varphi \text{ je kong.}}{=} \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \psi([x]_{\sim\varphi}) \cdot \psi([y]_{\sim\varphi})$$

- ψ je zrejme surjektívne

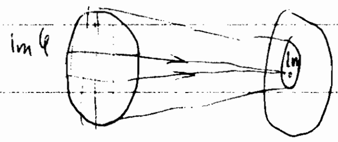
  Nech $z \in \text{Im}\, \varphi = \{\varphi(x) : x \in G_1\}$. Teda $z = \varphi(x)$ pre nejaké $x \in G_1$ a máme $\psi([x]_{\sim\varphi}) = \varphi(x) = z$

- ψ je injektívne, tzn

  $\psi([x_1]_{\sim\varphi}) = \psi([x_2]_{\sim\varphi}) \overset{?}{\Rightarrow} [x_1]_{\sim\varphi} = [x_2]_{\sim\varphi}$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\psi([x_1]_{\sim\varphi}) = \varphi(x_1) \\ \psi([x_2]_{\sim\varphi}) = \varphi(x_2)\end{array}\right\}$

  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim_\varphi x_2 \Leftrightarrow [x_1]_{\sim\varphi} = [x_2]_{\sim\varphi}$ $\square$

Hrám sa v G_1 $\quad G_1/\sim_\varphi \qquad G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$



Veta: Nech Θ je kongruencia na grupe G. Potom $\varphi : G \to G/\Theta$ daný predpisom $\varphi(x) = [x]_\Theta$ je homomorf. a $\Theta = \sim_\varphi$

Ako zistiť pre danú G_1 (až na izomorfizmus) všetky $\text{Im}\, \varphi$, kde $\varphi : G_1 \to G_2$, G_2 je hocijaká

Odpoveď: Vezmime všetky kongruencie Θ na G_1 a s každou urob G_1/Θ

Normálne podgrupy

Def.: Podgrupa H grupy G sa nazýva normálna ak pre všetky $x \in H$ a $y \in G$!!! (nie z H) platí $y \cdot x \cdot y^{-1} \in H$

Veta: Každá podgrupa Abelovskej grupy je normálna

Dôkaz: $x \in H$, $y \in G$ ako v def. $\quad y \cdot x \cdot y^{-1} = y \cdot y^{-1} \cdot x = e \cdot x = x \in H$

$x y^{-1} = y^{-1} \cdot x$

Príklad: $\{(), (12)\}$ nie je normálna podgrupa S_3

$x = (12)$

$y = (123)$

$y^{-1} = (132)$ $\qquad y \cdot x \cdot y^{-1} = (123) \cdot (12) \cdot (132) = (23) \notin H$

Agr.
cvičenie 29.3.2007

Vybavme $R\setminus\{0\}$ operáciou $*$ takto.

$$a*b=\frac{a.b}{2}$$

Dokážte. $\{R\setminus\{0\},*\}$ je grupa izomorfmná s $(R\setminus\{0\},\cdot)$

G1) $\forall x,y,z \in R\setminus\{0\}$

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

$$L: (x*y)*z = \left(\frac{x.y}{2}\right)*z = \frac{\frac{x.y}{2}.z}{2} = \frac{xyz}{4}$$

$$P = x*(y*z) = x*\left(\frac{y.z}{2}\right) = \frac{x.\frac{yz}{2}}{2} = \frac{xyz}{4}$$

G2) $(\exists e \in R\setminus\{0\})(\forall x \in R\setminus\{0\})$ $\quad x*e = e*x = x$

$$\frac{x.e}{2} = \frac{e.x}{2} = x$$

$$e=2: \quad \frac{2.x}{2} = \frac{x.2}{2} = x$$

G3) $(\forall x \in R\setminus\{0\})(\exists x^{-1} \in R\setminus\{0\})$: $x.x^{-1} = x^{-1}.x$ netreba e

Pozor. $x^{-1} \neq \frac{1}{x}$

$$(\forall x = R\setminus\{0\})(\exists\ x^{-1} \in R\setminus\{0\}): \frac{x.x^{-1}}{2} = 2$$

$$\frac{x.x^{-1}}{2} = 2$$

$$x.x^{-1} = 4$$

$$x^{-1} = \frac{4}{x}$$

$$x*x^{-1} = x*\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{x.\frac{4}{x}}{2} = \frac{4}{2} = 2 = e$$

$\Downarrow$ je grupa

Zostáva otázka

$$(R\setminus\{0\},\cdot) \cong (R\setminus\{0\},*)$$

Hľadajme izomorfizmus

$\varphi (R\setminus\{0\},\cdot) \longrightarrow (R\setminus\{0\},*)$

- φ je homomorfizmus
- φ je bijekcia

$\varphi(a.b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

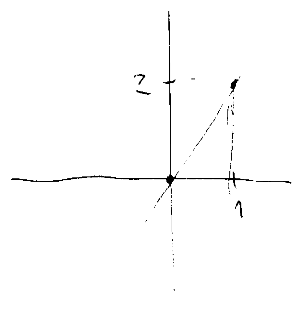
Vieme že jednotkový prvok v $(R\setminus\{0\},\cdot)$ sa má zobraziť na jednotkový prvok $(R\setminus\{0\},*)$

$\varphi(1).2 \rightarrow$ Skúsame $\varphi(x) = 2x \rightarrow$ funguje

$$\varphi(a.b) = 2.a.b$$

$$\varphi(a)*\varphi(b) = (2a)*(2b) = \frac{2a.2b}{2} = 2ab$$

- φ je zrejme bijektívne



Dokážte, že relácia $\circledcirc$ je kongruencia na $(R\setminus\{0\},\cdot)$. Ako vyzerá príslušná grupa $R\setminus\{0\}/\circledcirc$

Def: Ak $\circledcirc$ je kongruencia na grupe G, potom $G/\circledcirc$ sa nazýva faktorová grupa G podľa $\circledcirc$

$\hookrightarrow x_1 \circledcirc x_2 :\Longleftrightarrow x_1 \cdot x_2 > 0$

1, $\circledcirc$ je ekvivalencia

2, sa chová slušne vzhľadom na $\forall x_1,x_2,y_1,y_2 : (x_1 \circledcirc x_2) \wedge (y_1 \circledcirc y_2) \Rightarrow (x_1 y_1) \circledcirc (x_2, y_2)$

(R) $\forall a \in R\setminus\{0\}$ $\quad a \circledcirc a$

$\forall a \in R\setminus\{0\}$ $\quad a \cdot a > 0$ $\quad$ platí

(S) $\forall a,b \in R\setminus\{0\}$ $\quad (a \circledcirc b) \Rightarrow (b \circledcirc a)$

— II — $\quad a \cdot b > 0 \Rightarrow b \cdot a > 0$. Platí lebo $a \cdot b = b \cdot a$

(T) $\forall a,b,c \in R\setminus\{0\} : (a \circledcirc b) \wedge (b \circledcirc c) \Rightarrow (a \circledcirc c)$

— II — $\quad (a \cdot b > 0) \wedge (b \cdot c > 0) = (a \cdot c > 0$

Nech $a \cdot b > 0$, $b \cdot c > 0$

Potom $a \cdot b \cdot b \cdot c > 0$

$a \cdot b^2 \cdot c >$ $\quad$ keďže $b^2 > 0$

môžeme rovnicu vynásobiť $\frac{1}{b^2}$

$\frac{1}{b^2} a \cdot b^2 \cdot c > \frac{1}{b^2} \cdot 0$

$a \cdot c > 0$

(T) Druhý typ dôkazu

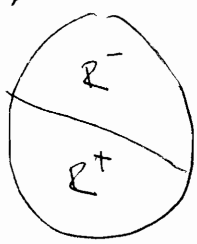
Nech $a \cdot b > 0$, $b \cdot c > 0$

Potom $\frac{a \cdot b}{b \cdot c} > 0$

$\frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a}{c} > 0$ $\quad \frac{a}{c} > 0 \ / \cdot c^2$

$a \cdot c > 0$

$R/\{0\}/\circledcirc$



$x_1 \cdot x_2 > 0$

$\Updownarrow$

buď $x_1, x_2 > 0$

alebo $x_1, x_2 < 0$

$|R\setminus\{0\}/\circledcirc| = 2$

$R\setminus\{0\}/\circledcirc = \{R^+, R^-\}$

Cayleho tabuľka

$R\setminus\{0\}/\circledcirc$

$\cdot$	R^+	R^-
R^+	R^+	R^-
R^-	R^-	R^+

$\cong$

$(\{1,-1\},\cdot)$

$\cdot$	1	(-1)
1	1	(-1)
(-1)	(-1)	1

Vezmime $\varphi : R\setminus\{0\} \to \{-1,1\}$. Ako máme ~~nájsť~~ zostrojiť φ tak aby φ bol homomorfizmus

a $N_\varphi = \circledcirc$ $\qquad N_\varphi \subseteq R\setminus\{0\} \times R\setminus\{0\}$

Odpoveď: $\varphi(x) = \frac{x}{|x|} = \mathrm{sign}(x)$

Všimnite si, že $\mathrm{Ker}\,\varphi = R^+$

Další príklad $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ relácia $x \circledS y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

zvyšok zadania rovnaký ako predtým

$\circledS = N_\varphi \qquad \varphi : (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$

nejako $\qquad \varphi(a) = a^2$

Ak φ je homomorfizmus, potom N_φ je kongruencia. ← Veta:

Je φ homomorfizmus? $\qquad N_\varphi = \circledS$ je kongruencia

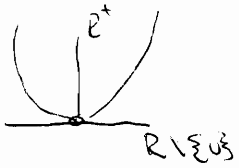
$\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

$\varphi(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Dalej (podľa prednášky)

$\mathbb{R}\setminus\{0\}/N_\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$



Keďže φ je surjektívne

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^+$

Teda $(N_\varphi = \circledS)$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{0\}/\circledS \cong \mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}/\circledS$

$x_1 \circledS x_2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2|$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}/\circledS$

$\cong \mathbb{R}^+$

Grupa $(S_4, \circ)$

relácia $f_1 \circledS f_2 \Longleftrightarrow f_1(1) = f_2(1)$

Dôkaz, že $\circledS$ je ekvivalencia je triviálny a je pod moju úroveň to písať

$F : S_4 \to \{1, 2, 3, 4\}$

$F(f) = f(1)$

$\circledS = N_F$

$f_1 = (1\,2\,3\,4)$

$f_1(1) = 2$

$f_2 = (3\,1\,2\,4) \quad f_2(1) = 2 \quad f_1 \circledS f_2$

$f_3 = (1\,3)(2\,4)$

$f_3(1) = 3$

$f_1 \not\circledS f_3$

$f_1 \circledS f_2$

$g_1 = (1\,3)(2\,4)$

$g_2 = (1\,3\,2\,4)$

$f_1 g_1 = (1\,2\,3\,4)(1\,3)(2\,4) = (1\,4\,3\,2)$

$f_2 g_2 = (3\,1\,2\,4)(1\,3\,2\,4) = (2\,3\,4)$

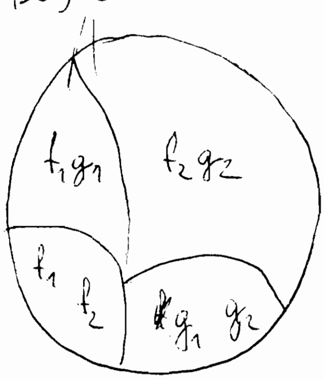
$(f_1 \cdot g_1)(1) = 4$

$(f_2\, g_2)(1) = 1 \Rightarrow f_1 g_1 \not\circledS f_2 g_2$

$\Downarrow$

$\circledS$ nie je kongruencia

ak kong. tak musí byť v tej istej triede



Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ relácia $x_1 \circledcirc x_2 \Longleftrightarrow$ existujú $k, l \in \mathbb{Q}$ také že

$$\frac{x_1}{x_2} = k + l\cdot\sqrt{2}$$

(R) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad a \circledcirc a$

$\quad$ -||- $(\exists k, l \in \mathbb{Q})$: $\frac{a}{a} = k + \sqrt{2}\,l$

$\quad \frac{a}{a} = 1 \quad ? (\exists k, l \in \mathbb{Q})$

$\quad\quad 1 = k + l\cdot\sqrt{2}$

$\quad\quad k = 1,\ l = 0$

(S) $\forall a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad a \circledcirc b \Rightarrow b \circledcirc a$

funguje ak $k_1 - l\sqrt{2} \neq 0$

ale čo ak áno?

$(\exists k_1 l_1)$ $\frac{a}{a} = k_1 + l_1\sqrt{2} \Rightarrow (\exists k_2 l_2 \in \mathbb{Q}$ $\frac{b}{a} = k_2 + l_2\sqrt{2})$

$\frac{a}{b} = k_1 + l_1\sqrt{2}$ $\quad\quad \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{k_1 + l(\sqrt{2})} \cdot \frac{k_1 - l_1\sqrt{2}}{k_1 - l_1\sqrt{2}} = \frac{k_1 - l_1\sqrt{2}}{k_1^2 - 2l_1^2} = \frac{k_1}{k_1^2 - 2l_1^2} + \left(-\frac{l_1}{k_1^2 - 2l_1^2}\right)\sqrt{2}$

ak $l_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{k_1}{l_1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ spor

ak $l_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = k_1 + \sqrt{2}\,l_1 = 0 \Rightarrow a = 0$

teda $k_1 - l_1\sqrt{2} \neq 0$

(T) $\forall a, b, c : (a \circledcirc b) \wedge (b \circledcirc c) \Rightarrow a \circledcirc c$

$a \circledcirc b$ $\quad (\exists k_1, l_1 \in \mathbb{Q})$

$\frac{a}{b} = k_1 + l_1\sqrt{2}$ $\quad\quad (b \circledcirc c)$: $(\exists k_2, l_2 \in \mathbb{Q})$ $\quad \frac{b}{c} = k_2 + l_2\sqrt{2}$

$\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a}{c}$

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = (k_1 + l_1\sqrt{2})\cdot(k_2 + l_2\sqrt{2}) = k_1k_2 + k_1l_2\sqrt{2} + k_2l_1\sqrt{2} + 2l_1l_2 =$$

$$= \underbrace{(k_1 k_2 + 2 l_1 l_2)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(k_1 l_2 + l_1 k_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$a \circledcirc c$$

$\circledcirc$ je kongruencia

$\forall a,b,c,d$ $\quad a_1 \circledcirc b$, $\ c \circledcirc d$ $\Rightarrow a\cdot c \circledcirc b\cdot d$

$\frac{a}{b} = k_1 + l_1\sqrt{2}$ $\quad\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = (k_1 + l_1\sqrt{2})(k_2 + l_2\sqrt{2})$

$\frac{c}{d} = k_2 + l_2\sqrt{2}$ $\quad\quad a\cdot c \circledcirc b\cdot d$

Na prednáške bude

$$x_1 \circledcirc x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in H$$