Algr.

22.3. cvičenie

Vymenujte prvky podgrupy S_4 — S_4 - permutácie $\{1,2,3,4\}$

$[(1234)] = \{(1234)^k : k \in \mathbb{Z}\}$ — - operácia $\circ$ (značíme $\cdot$)

$k \geq 0$

$(1234)^0 = ()$

$(1234)^1 = (1234)$

$(1234)^2 = (1234)(1234) = (13)(24)$

$(1234)^3 = ((13)(24))(1234) = \cancel{(42)(4}\quad (1432)$

$(1234)^4 = (1432)(1234) = ()$

$(1234)^5 = (1234)$

$(1234)^6 = (\cancel{13}\ 1234)^2$

$(1234)^{\cancel{99}\,100} = ()$

$(1234)^{98} = \underbrace{(1234)^{96}}_{()}(1234)^2 = (13)(24)$

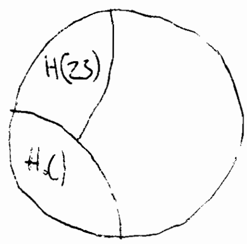
$(1234)^{-15} = (1234)$

Cayleyho tabuľka H

	()	(1234)	(13)(24)	(1432)
()	()	(1234)	(13)(24)	(1432)
(1234)	(1234)	(13)(24)	(1432)	()
(13)(24)	(13)(24)	(1432)	()	(1234)
(1432)	(1432)	()	(1234)	(13)(24)

Príklad: Napíšte pravé kosety

$H()$, $H(1234)$, $H(23)$, $H(24)$



$\left.\begin{array}{l} H() = \{f() : f \in H\} = H \\ H(1234) = \{f.(1234) : f \in H\} \end{array}\right\}$ triedy rozkladu S_4 na pravé kosety

$(1234) = (1234)() \in H.()$

$(1234) = ()(1234) \in H.(1234)$

$H.() \cap H.(1234) \neq 0$

$\Downarrow$ - trieda rozkladu

$H.() = H(1234)$

$H(23) = \{f(23) : f \in H\} = \{(). (23), (1234).(23), (13)(24)(23), (1432).(23)\} =$

$= \{(23), (124), (1342), (143)\}$

$H.(124) = H.(23)$

$H(24) = $ DOMA – mala by byť disjunktná s oboma zrátanými

<u>Príklad</u>: Koľko je tried v rozklade S_4 podľa H na pravé kosety?

$|S_4| = 4! = 24$

$|H| = 4 \quad |H.x| = 4, \ x \in S_4$

odpoveď $\frac{|S_4|}{|H|} = 6$

<u>Príklad</u>. Nájdite dvojprvkovú podgrupu S_4

$\{(), (123)\}$ – nie!

$(123)(123) = (132) \in H$ nie je podgrupa

$H = \{(), (34)\} \quad (34)(34) = () \in H$

$(34).() = ().34 = (34) \in H \qquad ().() = () \in H \qquad ()^{-1} = () \in H$

$(34)^{-1} = (34) \in H$

<u>Príklad</u>. Nájdite 6-prvkovú podgrupu S_4

Odpoveď S_3, pokiaľ každý prvok $f \in S_3$ stotožníme s permutáciou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(1) & f(2) & f(3) & 4 \end{pmatrix}$$

D.ú. Nájdite 12prvkovú podgrupu S_4

<u>Príklad</u>. Nájdite 7prvkovú S_4

– neexistuje (posledná veta z prednášky (Lagrangeova)

$|H|$ <u>musí</u> deliť $|S_4|$

<u>Príklad</u>: Nájdite najmenšiu (v zmysle $\subseteq$) podgrupu S_4, ktorá obsahuje prvky $(12), (34)$

$H = \{(), (12), (34), (12)(34)\}$

$(12)(34).(12) = (34)$

$(12)(12) = ()$

$(34)(34) = ()$

$(12)(34)(12)(34) = ()$

Sú podgrupy S_4: $H_1 = \{(), (1234), (13)(24), (1432)\}$

$H_2 = \{(), (12), (34), (12)(34)\}$ izomorfné?

Nie sú izomorfné, lebo: – v H_2 máme $x^{-1} = x \ \forall x \in H_2$

– v H_1 nie

Ak by existoval homomorfizmus $\varphi: H_2 \to H_1$, mali by sme $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$ a teda

$\varphi(x) = \varphi(x)^{-1} \in H_1$

$\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}$ ~~$\forall x \in H_2$~~ – nevie ako pokračovať tak to ide dokázať inak

$\downarrow$ $\forall H_1$

Vezmeme $y \in H_1$

Keďže φ je izomorfizmus φ je surjektívne zobrazenie.

Teda existuje $x \in H_2$ taký, že $y = \varphi(x)$.

V H_2 máme $x = x^{-1}$, teda $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$

Keďže φ je homomorfizmus $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, teda $y = \varphi(x) = \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = y^{-1}$

teda $y = y^{-1}$ pre všetky $y \in H_1$.

to však nie je pravda – φ neexistuje

Príklad: (zo skúšky zo zim. sem)

Vybavme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ operáciou sčítania po zložkách takto

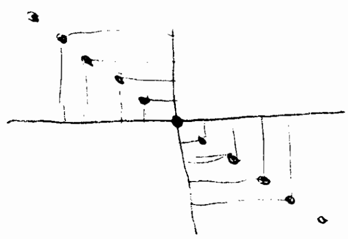
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Potom $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ je grupa

Príklad: Nájdite najmenšiu podgrupu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, ktorá obsahuje $(-1, 1)$ a nakreslite ju.

$H = \{(0,0), (-1,1), (1,-1)\}$ – zle!

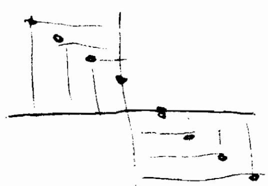
$H = \{(0,0), (-1,1), (1,-1), (-2,2), (2,-2), \ldots\} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Z}\}$



Príklad: Nakreslite ako vyzerajú triedy rozkladu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podľa H

$H + (x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) + (x_1, x_2) : (y_1, y_2) \in H\} =$

$= \{(y, -y) + (x_1, x_2) : y \in \mathbb{Z}\} = \{(y + x_1, -y + x_2) : y \in \mathbb{Z}\}$

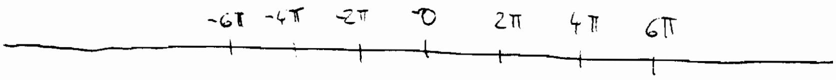


Vezmime takúto podgrupu $(\mathbb{R}, +)$: $H = \{k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

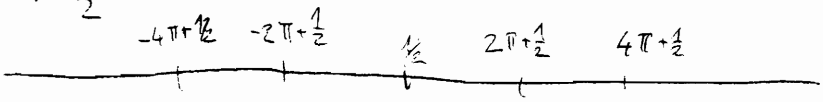
Ako vyzerajú triedy rozkladu $(\mathbb{R}, +)$ podľa H na pravé kosety

$H + x = \{\gamma + x : \gamma \in H\}$

$H + 0 = H$



$H + \frac{1}{2}$



$H + 2\pi = H$

$H + (2\pi + \frac{1}{2}) = H + \frac{1}{2}$

<u>Príklad</u> B = všetky 8 bitové reťazce

XOR – Binárna operácia na B

(B, XOR) je grupa

- jednotkový prvok 00000000
- inverzný prvok ~~1111~~ reťazca X je X