Algr

Prednáška 2.4.2007

Minule: Homomorfizmy $\Leftrightarrow$ kongruencie

$\varphi : G_1 \to G_2$ je homomorfizmus

$\Downarrow$

$\sim_\varphi$ je kongruencia a $G_1/\sim_\varphi \cong Im\,\varphi$

$\circledS$ je kongruencia na G_1, potom $\varphi : G \to G/\circledS$ dané $\varphi(x) = [x]_\circledS$ je homomorfizmus

$Im\,\varphi = G/\circledS$ a $\sim_\varphi = \circledS$

Dnes: Súvislosť kongruencií a normálnych podgrúp

G: grupa

H: je normálna ~~podgrupa~~ podgrupa ale $\forall x \in H\ \forall y \in G\quad y x y^{-1} \in H$

Ak G je abelovská, potom každá podgrupa H grupy G je normálna

__Veta__: Nech G je grupa, H je podgrupa.

Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné

a) H je normálna

b) relácia $\sim_H \subseteq G \times G$ daná predpisom

$$a_1 \sim_H a_2 :\Longleftrightarrow a_1 \cdot (a_2)^{-1} \in H$$

__Dôkaz__ a) $\Rightarrow$ b)

Nech H je normálna podgrupa

Skúmajme vlastnosti $\sim_H$

(R). $\forall y \in G : y \sim_H y$

$\forall y \in G : y \cdot y^{-1} \in H$ platí lebo $y \cdot y^{-1} = e \in H$, H je podgrupa

(S). $\forall y_1, y_2 \in G : y_1 \sim_H y_2 \Rightarrow y_2 \sim_H y_1$

$\forall y_1, y_2 \in G : y_1 (y_2)^{-1} \in H \Rightarrow y_2 \cdot (y_1)^{-1} \in H$

$y_1 \cdot (y_2)^{-1} \in H$

$\Downarrow$ H je podgrupa $\alpha \in H \Rightarrow \alpha^{-1} \in H$

$$(y_1 \cdot (y_2)^{-1})^{-1} = ((y_2)^{-1})^{-1} \cdot y_1^{-1} = y_2 \cdot y_1^{-1} \in H$$

$$(\alpha \cdot \beta^{-1}) = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$$

(T). $\forall y_1, y_2, y_3 \in G$

$(y_1 \sim_H y_2) \wedge (y_2 \sim_H y_3) \Rightarrow (y_1 \sim_H y_3)$

$\forall y_1, y_2, y_3 \in G\quad (y_1 \cdot (y_2)^{-1} \in H) \wedge (y_2 \cdot (y_3)^{-1} \in H) \overset{?}{\Rightarrow} y_1 \cdot (y_3)^{-1} \in H$

$y_1 \cdot (y_2)^{-1} \in H \wedge y_2 (y_3)^{-1} \in H \xrightarrow[H \text{ je podgrupa}]{} y_1 (y_2)^{-1} \cdot y_2 \cdot (y_3)^{-1} \in H$

$\alpha, \beta \in H$

$\alpha, \beta \in H$

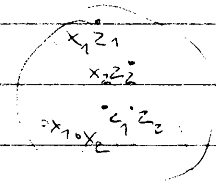
$$y_1 \cdot (y_2)^{-1} \cdot y_2 (y_3)^{-1} = \underbrace{y_1 \cdot e}_{y_1} \cdot (y_3)^{-1} = y_1 \cdot (y_3)^{-1}$$

zatiaľ sme vôbec nepoužili normalitu H

($\sim_H$ je kongruencia)

Predpoklad: $(x_1 \sim_H x_2) \wedge (z_1 \sim_H z_2)$

Máme dokázať



$x_1 \sim_H x_2 \Leftrightarrow x_1 \cdot (x_2)^{-1} \in H$

$z_1 \sim_H z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot (z_2)^{-1} \in H$

$? \rightarrow \quad x_1 \cdot z_1 \cdot (x_2 \cdot z_2)^{-1} \in H$

Trik (špinavý): Vieme: $z_1 \cdot (z_2)^{-1} \in H$

H je normálna $\quad \underline{\forall y \in G: y \cdot (z_1 \cdot (z_2)^{-1}) \cdot y^{-1} \in H}$

$\downarrow$

Vezmime $y = x_2$

Potom: $x_2 (z_1 (z_2)^{-1}) \cdot (x_2)^{-1} \in H$ } súčin je z H

Ešte veme: $x_1 \cdot (x_2)^{-1} \in$

Teda $\underbrace{x_1 \cdot (x_2)^{-1} \cdot x_2}_{e} \cdot z_1 (z_2)^{-1} \cdot (x_2)^{-1} \in H$

$x_1 \cdot (x_2)^{-1} \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot (z_2)^{-1} \cdot (x_2)^{-1} =$

$= x_1 \cdot e \cdot z_1 \cdot (z_2)^{-1} \cdot (x_2)^{-1} = x_1 \cdot z_1 \cdot (z_2)^{-1} \cdot (x_2)^{-1} = x_1 \cdot z_1 (x_2 \cdot z_2)^{-1} \in H$

$\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} = (\beta \cdot \alpha)^{-1}$

$\Updownarrow$

$x_1 z_1 \sim_H x_2 z_2$

b) ⇒ a) Nech H je podgrupa, $\sim_H$ je kongruencia.
Platí, že H je normálna?
Najprv dokážeme, že $[e]_{\sim_H} = H$

(Trieda ekvivalencie $\sim_H$ prvku e je rovná H)

$[e]_{\sim_H} = \{x \in G : x \sim_H e\} = \{x \in G : x \cdot e^{-1} \in H\} = \{x \in G : x \cdot e \in H\} = \{x \in G : x \in H\} = H$

$e^{-1} = e \qquad x \cdot e = x$

Inými slovami $x \sim_H e \Leftrightarrow x \in H$

Po tomto intre sa pustíme do dôkazu normality H

Nech $x \in H$, nech $y \in G$

Máme dokázať, že $y x y^{-1} \in H$

$x \in H \Rightarrow x \sim_H e$

Okrem toho toho ($\sim_H$ je reflexívna

$y \sim y$ 24

$\left.\begin{array}{l} y \sim_H y \\ x \sim_H e \end{array}\right\} \Rightarrow$ je kongruencia $\quad \cancel{y \cdot x \sim} \quad y \cdot x \sim_H y \cdot e$

$\left.\begin{array}{l} y \cdot x \sim_H y \\ y^{-1} \sim_H y^{-1} \end{array}\right\} = y x y^{-1} \sim_H \underbrace{y \cdot y^{-1}}_{e} = y \cdot x \cdot y^{-1} \sim_H e$

$\Downarrow \quad y \cdot x \cdot y^{-1} \in H$

Definícia: Ak H je normálna podgrupa grupy G, potom G/N_H sa nazýva faktorová grupa G podľa H a píšeme bez indexu

$$G/H = G/N_H$$

a triedou ekvivalencie $[y]_{N_H}$ $[y]_H := [x]_{N_H}$

Príklad: Uvažujme grupu $(\mathbb{Z},+)$, Pre každé $k \in \mathbb{N}^+$ je $k.\mathbb{Z} = \{k.x : x \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa $(\mathbb{Z},+)$
Keďže $(\mathbb{Z},+)$ je abelovská, a každá je jej normálna

Fixnime nejaké $k \in \mathbb{N}^+$.
Ako vyzerá $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ a $N_{k.\mathbb{Z}}$ — operácia je $+$!!

Kedy máme $y_1 N_{k\mathbb{Z}} y_2$? $y_1 N_{k\mathbb{Z}} y_2 \Leftrightarrow y_1 + (-y_2) \in k.\mathbb{Z}$

$y_1 + (-y_2) = y_1 - y_2 \in \{k.x : x \in \mathbb{Z}\}$

$y_1 - y_2 \in \{kx : x \in \mathbb{Z}\}$

$\Updownarrow$

$y_1 - y_2 = kx$ pre nejaké $x \in \mathbb{Z}$

Delíme teraz y_1, y_2 číslom k (so zvyškom)

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = k.x_1 + m_1 \\ y_2 = k.x_2 + m_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, k-1\} \end{array}$$

$y_1 - y_2 = k.x$ pre nejaké $x \in \mathbb{Z}$

$(k.x_1 + m_1) - (k.x_2 + m_2) = k.x$

$k.x_1 + m_1 - k.x_2 - m_2 = k.x$

$m_1 - m_2 = kx + k.x_2 - k.x_1$

$m_1 - m_2 = k(x + x_2 - x_1)$

$y_1 N_{k\mathbb{Z}} y_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in k.\mathbb{Z}$

zvyšky po delení k

$m_1, m_2 \in \{0, \dots, k-1\}$
$m_1 - m_2 \in k.\mathbb{Z}$
$\Downarrow$
$m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$

Teda: $y_1 N_{k.\mathbb{Z}} y_2$

$\Updownarrow$

y_1, y_2 majú rovnaký zvyšok po delení

$[0]_{k\mathbb{Z}} = \{0, k, -k, 2k, -2k \dots\}$

$[1]_{k\mathbb{Z}} = \{0, k+1, -k+1 \dots\}$

$[\ell]_{k.\mathbb{Z}} = \{\ell, k+\ell, -k+\ell, 2k+\ell, -2k+\ell, \dots\}$

$\ell = \{0, \dots, k-1\}$ - všetky možné zvyšky po delení k.

$[0]_{\dots} \cup [1]_{\dots} \cup [2]_{\dots} \cup \dots \cup [k-1] = ?$

Algr.
prednáška 16.4.

Vieme $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \Rightarrow N_\varphi$ je kongruencia

$$Im\,\varphi \cong G/N_\varphi$$

H je normálna podgrupa $\Rightarrow N_H$ je kongruencia

$x_1 N_H x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in H$

Veta: Nech $\approx$ je kongruencia na grupe G. Označme $H = [e]_\approx$
Potom H je normálna podgrupa
a $\approx = N_H$

Dôkaz: H je podgrupa, $\forall a,b : a,b \in H \Rightarrow ab \in H$

(1) $a \in H \Leftrightarrow a \in [e]_\approx \Leftrightarrow a \approx e$ jadro homomorfizmu

$b \in H \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow b \approx e$

$\approx$ je kongruencia $\Rightarrow a.b \approx e.e = a.b \approx e \Rightarrow a.b \in [e]_\approx \Rightarrow ab \in H$

(2) $\forall a \in H$ $a^{-1} \in H$

$a \in H \Leftrightarrow a \approx e$

$$\left.\begin{array}{l} a \approx e \\ a^{-1} \approx a^{-1} \\ \approx \text{ je kongruencia} \end{array}\right\} \Rightarrow a.a^{-1} \approx \underbrace{e a^{-1}}_{= a^{-1}} \Rightarrow a^{-1} \approx e \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Normalita H.

$\forall x \in H, y \in G$ $yxy^{-1} \in H$

$$\left.\begin{array}{l} x \approx e \\ y^{-1} \approx y^{-1} \end{array}\right\} xy^{-1} \approx ey^{-1} = y^{-1}$$

$\approx$ je kongruencia

$$\left.\begin{array}{l} y \approx y \\ xy^{-1} \approx y^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow yxy^{-1} \approx yy^{-1} \Rightarrow yxy^{-1} \approx e \Leftrightarrow yxy^{-1} \in H$$

Ešte treba $N_H = \approx$ t.j. $x_1 N_H x_2 \Leftrightarrow x_1 \approx x_2$

$x_1 N_H x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in H \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in [e]_\approx \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \approx e$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2^{-1} \approx e \\ x_2 \approx x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x_1 \underbrace{x_2^{-1} x_2}_{e}}_{x_1} \approx \underbrace{e.x_2}_{x_2} \Rightarrow x_1 \approx x_2$$

$x_1 \approx x_2 \Rightarrow x_1 x_2^{-1} \approx e$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx x_2 \\ x_2^{-1} \approx x_2^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 x_2^{-1} \approx \underbrace{x_2 x_2^{-1}}_{= e} \Rightarrow x_1 x_2^{-1} \approx e \quad \square$$

Dôsledok: popis všetkých homomorfných obrazov ($Im\,\varphi$) danej grupy je daný normálnymi podgrupami

Nech $\varphi: G_1 \to G_2$ je homomorfizmus grúp. Potom $Ker\varphi$ je normálna podgrupa G_1 a

$G_1 / Ker\varphi \cong Im\varphi$

Dôkaz: Vieme
1) N_φ je kongruencia
2) $G_1 / N_\varphi \cong Im\varphi$
3) $N_\varphi = N_{[e]_{N_\varphi}}$

Čo je $[e]_{N_\varphi}$? $[e]_{N_\varphi} = Ker\varphi$

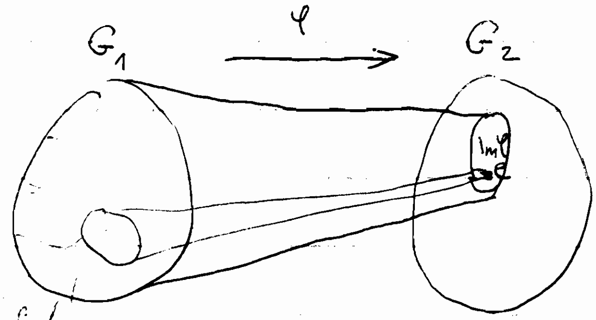
$x \in [e]_{N_\varphi} \Leftrightarrow x N_\varphi e \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(e) \Leftrightarrow \varphi(x) = e \Leftrightarrow x \in Ker\varphi$

Z 3) $N_\varphi = N_{Ker\varphi}$

Z 2) $G_1 / N_{Ker\varphi} \cong Im\varphi$

označujeme

$G_1 / Ker\varphi \cong Im\varphi$ $\square$



Kerφ → normálna podgrupa

G_1/N_φ — keďže φ - homomorfizmus $\Rightarrow$ kongruencia

$G_1 / Ker\varphi \cong G_1 / N_\varphi \cong Im\varphi$

$G_1 \xrightarrow{\varphi} Im\varphi$

↑

Ker....

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_4$

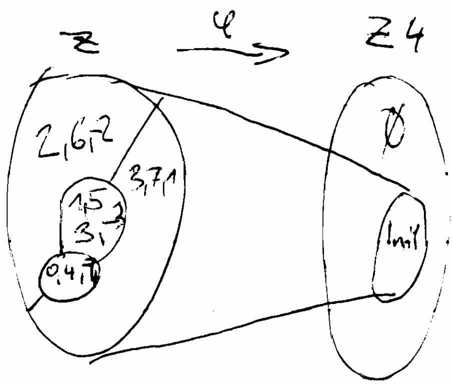
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$x \oplus y = (x+y) \% 4$
mod

$\varphi(x) = x \% 4$

$Ker\varphi = \{0, 4, -4, 8, -8, \dots\}$

$\mathbb{Z} / Ker\varphi$



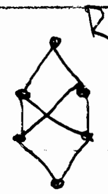
Zväzy

Dve definície zväzov (zväzy sú

Def: ~~zväz~~ Nech $(P, \leq)$ je poset. Nech $H \subseteq P$. Hovoríme že $a \in P$ je horným ohraničením H ak $\forall x \in H: x \leq a$ $\square$

~~1. skupina~~ pokračovanie def. zväzov ...

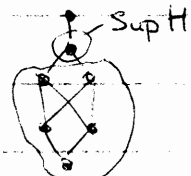
R_6



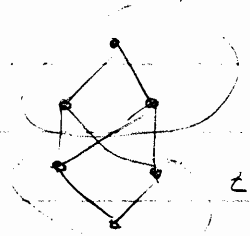
Def.: Nech $(P, \leq)$, $H \subseteq P$. Hovoríme, že a je najmenším horným ohraničením H ak
(1) a je horným ohraničením
(2) pre každé horné ohraničenie b prvku a platí, že $a \leq b$

Zvačšíme $a = \sup H$ alebo $a = \bigvee H$

Duálne pojmy - - dolné ohraničenie
- najväčšie dolné ohraničenie
$\inf H$, $\bigwedge H$ sú definované podobne



toto H má sup



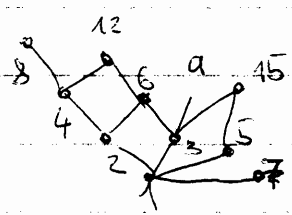
toto H nemá sup

$(N, \leq)$
$H = \{$ párne čísla z N
$\inf H = 0$
$\sup H$ = neexistuje

$(R, \leq)$, $H = (0, 1)$
$\inf H = 0$
$\sup H = 1$

- Horné ohraničenia
1
0
- dolné ohraničenia

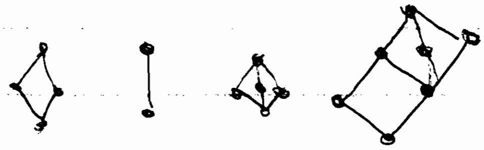
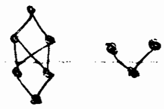
$(N^+, |)$
$\sup\{2, 3\}$ = najmenší spoločný násobok $2, 3 = 6$
$\sup\{8\ 6\} = 24$
$\inf \{8, 6 = 2$ - najväčší spoločný deliteľ



$(Q, \leq)$
$H = \{x \in Q : x^2 < 2\}$
$\sup H$ neexistuje

Lattice

Definícia: Zväz je taký poset $(L, \leq)$, že pre každé $a, b \in L$, $\inf\{a,b\}$ a $\sup\{a,b\}$ existujú $\square$

Príklady  $\rightarrow$ zväzy nie zväzy 

Iné príklady
- ľubovolný reťazec  $(\mathbb{R}, \leq)$ $(\mathbb{Q}, \leq)$
- $(P(A), \subseteq)$ $\sup\{X, Y\} = X \cup Y$
  $\inf\{X, Y\} = X \wedge Y$
- $(\mathbb{N}^+, |)$ - tiež zväz

Ak $(L, \leq)$ je zväz, potom značíme

$\inf\{a,b\} = a \wedge b$ - priesek a, b (meet)

$\sup\{a,b\} = a \vee b$ - spojenie a, b (join)

$\wedge, \vee$ sú binárne operácie na L

Aké sú ich vlastnosti?

Vlastnosti na zväzoch $\wedge, \vee$:

(L_1) idempotentnosť: $a \vee a = a$
$a \wedge a = a$

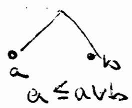
(L_2) komutativita: $a \wedge b = b \wedge a$
$a \vee b = b \vee a$

(L_3) asociativita

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

(L_4) Zákon absorbcie

$a \wedge (a \vee b) = a$ — 

$a \vee (a \wedge b) = a$

Veta: Nech $(L, \leq)$ je zväz

Nech $H = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$; $n \geq 1$

Potom $\inf H = \inf\{x_1, \inf\{\ldots \inf\{x_{n-1}, \inf\{x_n\}\}\}\}$

Dôkaz: 1^0 $n = 1$ zrejmé

2^0 Nech Veta platí pre $n = k$

Nech $H = \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq L$

Indukčný predpoklad

$\inf\{x_2, \ldots, x_{k+1}\} = \inf\{x_2, \inf\{x_3, \ldots \inf\{x_k, \inf\{x_{k+1}\}\}\}\}$

Skupina

Zostáva dokázať

$\inf H = \inf\{x_1, \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\}\}$

Označenie $a = \inf\{x_1, \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\}\}$

Je a dol. ohraničenie H?

$a \leq x_1$

$a \leq \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\} \leq x_i$

áno je $\qquad 2 \leq i \leq k+1$

Je a najväčším dol ohraničením?

Nech b je dol ohr. H.

Potom $b \leq x_1$

b je aj dolným ohraničením $\{x_2, \dots, x_{k+1}$

$\Downarrow$

$b \leq \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\}$

b je dolným ohr. $\{x_1, \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\}\}$

teda

$b \leq \inf\{x_1, \inf\{x_2, \dots, x_{k+1}\}\} = a$

teda

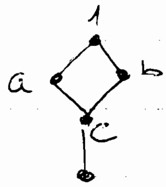
$\inf H = a$ $\square$

Dôsledok: $\vee$ je asociatívny

$a \vee (b \vee c) = \inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\}$

$(a \vee b) \vee c = \quad \dots \quad = \inf\{a, b, c\}$

Príklad: Nakreslite Cayleyho tabuľky pre zväz



$\wedge$	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	a	c	c
b	0	b	c	b	c
c	0	c	c	c	c

$\vee$	0	1	a	b	c
0	0	1	a	b	c
1	1	1	1	1	1
a	a	1	a	1	a
b	b	1	1	b	b
c	c	1	a	b	c

<u>Definícia</u> <u>Zväz</u> je $(L, \wedge, \vee)$, kde $\wedge, \vee$ splňajú $(L1), \dots, (L4)$. $\square$

<u>platí</u> Ak $(L \leq)$ je zväz (ako poset), potom $(L, \wedge, \vee)$ je zväz
(t.j.) algebra splňajúca $(L1)$-$(L4)$

Ak $(L \wedge, \vee)$ je zväz potom ak definujeme $a \leq b \iff a \wedge b = a$, potom
L je zväz (ako poset)