Prednáška

Algebry a grafy

19.2.2007

BOLO
- množiny
- $\cap, \cup, \setminus, \subset, \mathcal{U}, \emptyset, \in$
- množinové rovnosti
- $A_1 \times \dots \times A_n$
- A^n

TERAZ
- zobrazenia, relácie
- relácie na množine
- ~~relácie a~~ ekvivalencie a rozklady
- po

Relácie a zobrazenia

Def.: Nech $A_1, \dots, A_n$ sú množiny

Relácia na $A_1, \dots, A_n$ je ľubovoľná množina $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$

Inými slovami R je množina obsahujúca iba prvky typu $(x_1 \dots x_n)$, kde ~~$x_1 \in A_1$~~ $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$

Príklad:

$A_1 = \{\pi, e, 0\}$

$A_2 = \{-1, 0, 1\}$

$A_3 = \{\heartsuit, \cup, \alpha\}$

$R_1 = \{(\pi, -1, \alpha), (\pi, 0, \alpha), (0, 0, \cup)\}$ je relácia na $A_1, \dots, A_3$

$R_2 = \{(\pi, 1, 1), (\pi, 0, \alpha)\}$ - nie je relácia — " —

$R_3 = \emptyset$ je relácia na $A_1, \dots, A_3$

$R_1 \times R_2 \times R_3$ —— " ——

Zobrazenie ~~ako špeciálny typ rel.~~

Def: Nech D, K sú množiny.

Hovoríme, že f je zobrazenie z D do K (značíme to $f: D \Rightarrow K$), ak f je relácia $f \subseteq D \times K$ taká, že: **1,** $(\forall x \in D)(\exists y \in K)(x, y) \in f$

Pre ľubovoľné x z D existuje y z kooboru (K) taký že $(x, y) \in f$

2, $(\forall x \in D)(\forall y_1, y_2 \in K)(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Ak $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$, potom $y_1 = y_2$

$(x, y) \in f$ značíme $f(x) = y$

D - sa nazýva obor [definičný]

K - sa nazýva koobor

! Koobor nie je obor hodnôt

! Obor hodnôt je podmnožinou kooboru

Obor hodnôt zobrazenia $f: D \to K$ je množina tých $y \in K$, na ktoré sa niečo zobrazí

$$H(f) = \{ y \in K : (\exists x \in D)\ f(x) = y \}$$

Príklad:

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — obor, koobor

$H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$

$\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$

$\sin : \mathbb{R} \to \langle -5, 18 \rangle \leftarrow$ v poriadku!

$\sin : \mathbb{R} \to \langle 0, 1 \rangle \leftarrow$ zle!

Pr.: $D = \{1, 2, 3\}$

$K = \mathbb{N}$

$f = \{(1,1), (2,4), (3,4)\} \leftarrow$ je $f: D \to K$

$f = \{(1,1), (2,4)\} \leftarrow$ (porušená prvá podmienka) — je zobrazenie podmnožiny D

$f = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\} \leftarrow$ (druhá podmienka porušená — nie je zobrazenie

Def: $f: D \to K$ je

a) injekcia (alebo prosté)

Ak $\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

To isté inak:

$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ — "rôzne vzory majú rôzne obrazy"

b) surjekcia (alebo zobrazenie na K)

$(\forall y \in K)(\exists x \in D) : f(x) = y$

Inak

$H(f) = K$ — "každý prvok koboru má vzor"

c) Bijekcia je f, ktoré je naraz injekcia aj surjekcia

Príklad: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ — injekcia nie, lebo $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$ $\to$ platí — pravda $1 \neq -1$ — nepravda $1^2 = (-1)^2$, $1 = 1$

2

Surjekcia nie je

$y = -15$

na y sa nič nezobrazí ?

$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \neq y$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \neq -15$, lebo

Nech je x hocijaké, $f(x) = x^2 \geq 0$

$f(x) \geq 0$ } $f(x)$, 15
$-15 \ngeq 0$ } majú rôzne vlastnosti, teda sú rôzne

Pr: $f: \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$
$f(x) = x^2$

nie je injektívne

ale je surjektívne

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 3x + 1$

je bijekcia

PR: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

je injektívne, nie je surjektívne $f(x) = 0$ nemá riešenie v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (x)

Relácie na množine

Def. Nech A je množina

[Binárna] relácia na množine A je ľubovoľná podmnožina $\rho \subseteq A \times A$ ← stačí napísať iba toto, netreba hovoriť „vieš ρ je rela na A"

(môže sa vynechávať)

Príklad. $A = \{1, 2\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \{(1,1), (2,2)\} \\ \rho_2 &= \{(1,2), (1,1)\} \\ \rho_3 &= \emptyset \\ &A \times A \end{aligned}\right\} \text{relácie na } A$$

Def: Ak ρ je relácia na A; $\rho \subseteq A \times A$

potom inverzná relácia k ρ je

$$\rho^{-1} = \{(x_1, x_2) : (x_2, x_1) \in \rho\}$$

$\rho_2^{-1} = \{(1,1), (2,1)\} = \{(2,1), (1,1)\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (2,2)\}$

$\rho_1^{-1} = \rho_1$

$\emptyset^{-1} = \{(x_1,x_2) : (x_2,x_1) \in \emptyset\} = \emptyset$

$(A\times A)^{-1} = (A\times A)$

Poznámka ~~[illegible]~~ $f \subseteq A\times A$ je ~~zobrazenie~~ bijekcia z $A \Rightarrow A$ práve vtedy keď f ale aj f^{-1} sú zobrazenia $A \Rightarrow A$

Identita

Def: Nech A je množina. Potom identická relácia na A je

$$id_A = \{(x,x) : x \in A\}$$

Všimnite si, že $id_A : A \Rightarrow A$

Fakt, že $(x_1,x_2) \in \rho$ (ρ je relácia na množine) značíme $x_1 \rho x_2$

$x_1 \rho x_2$ je len skrátený zápis $(x_1,x_2)\in\rho$

negácia: $x_1 \not\rho x_2$

- je dôležité v akom poradí zapisujeme x_1 a x_2 pretože sú to usporiadané dvojice

$A = \{1,2\}$?? ; $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$

$1 \rho 1$

$2 \rho 1$

$2 \not\rho 2$

Označenie typu $x_1 \rho x_2$ je v zhode so zaužívanými zápismi:

Pr: $\leq \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\leq = \{(0,0),(0,1),(0,2),\dots,(1,1),(1,2)\dots\}$

$(0,0)\in\leq$ $\qquad 0\leq 0$

$(0,1)\in\leq$ $\qquad 0\leq 1$

$(1,0)\notin\leq$ $\qquad 1\not\leq 0$

Vlastnosti relácií na množine

Def: Nech $\rho \subseteq A\times A$

ρ je reflexívna, ak (R) $(\forall x\in A)\ x\rho x$

symetrická, ak (S) $(\forall x,y\in A)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$

Antisymetrická (AS) $(\forall x, y \in A)\,(x \rho y) \wedge (y \rho x) \Rightarrow x = y$

Tranzitívna (T) $(\forall x, y, z)\,(x \rho y) \wedge (y \rho z) \Rightarrow x \rho z$

Príklad:

A – množina všetkých študentov v tejto miestnosti

$\rho \subseteq A \times A$ je daná predpisom

$x \rho y :\Leftrightarrow$ x má rád y

ρ je (R)

ρ nie je (S) :) jožo ρ mara, mara $\not\rho$ jožo

ρ nie je (AS) :) mara ρ mišo $\wedge$ mišo ρ mara $\wedge$ mara $\neq$ mišo

ρ nie je (T) :) ~~mara ρ mišo~~

jožo ρ mara $\wedge$ mara ρ mišo $\wedge$ jožo $\not\rho$ mišo

Relácia ekvivalencie

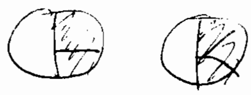
Def: $\rho \subseteq A \times A$ je relácia ekvivalencie ak ρ je ~~reflex. sy~~ (R), (S), (T)

$\frac{2}{4}$ – zlomok, – racionálne číslo

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{2}{4} + \frac{3}{6}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$



Nech $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ← formálne zlomky

Definujeme $\sim \subseteq F \times F$ takto

$(c_1, m_1) \sim (c_2, m_2) :\Leftrightarrow c_1 m_2 = c_2 m_1$

(R) $\forall (c, m) \in F : (c, m) \sim (c, m)$

–||– $: c m = m \cdot c$

platí (· je komutatívny)

$\frac{c_1}{m_1} = \frac{c_2}{m_2}$

$\Updownarrow$

$c_1 m_2 = c_2 m_1$

je ekvivalencia

(S)

$\forall (c_1, m_1), (c_2, m_2) \in F : (c_1, m_1) \sim (c_2, m_2) \Rightarrow (c_2, m_2) \sim (c_1, m_1)$

$\forall (c_1, m_1), (c_2, m_2) \in F : c_1 m_2 = c_2 \cdot m_1 \Rightarrow c_2 m_1 = c_1 \cdot m_2$

Pravidlo

$A = B \Rightarrow B = A$

$\forall (c_1, m_1), (c_2, m_2), (c_3, m_3) \in F$

$((c_1, m_1) \sim (c_2, m_2)) \wedge ((c_2, m_2) \sim (c_3, m_3)) \Rightarrow (c_1, m_1) \sim (c_3, m_3)$

$(c_1, m_1) \ldots\ldots \in F : (c_1 m_2 = c_2 m_2) \wedge (c_2 m_3 = c_3 m_2) \Rightarrow (c_1 m_3 = c_3 m_1)$

$c_1 m_2 = c_2 m_1 \Rightarrow \cancel{c_2 = \frac{c_1 m_2}{m_1}}$ $\quad c_1 = \frac{c_2 m_1}{m_2}$

$c_2 m_3 = c_3 m_2$ $\quad c_2 = \frac{c_3 m_2}{m_3}$

$$c_1 m_3 = \frac{c_2 \cdot m_1}{m_2} \cdot m_3$$

$$\frac{\frac{c_3 \cancel{m_2}}{\cancel{m_3}} m_1}{\cancel{m_2}} \cdot \cancel{m_3} = c_3 \cdot m_1$$

AlGr. 22.2.2007

Cvičenie

1 zápočtovka 9 marca piatok o 14:00

tranzitívita

ekvivalencie

Diagramy

Pokračovanie

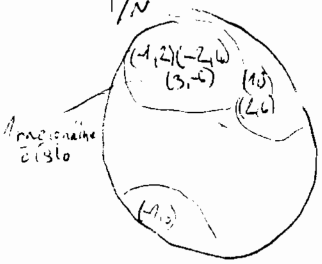
$F = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\quad (c_1, m_1) \sim (c_2, m_2)$

$(1,2) \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ $\quad c_1 m_2 = c_2 m_1$ $\quad (-1,2) \sim (-1,2)$

$\sim \subseteq F \times F$ $\quad \sim$ je ekvivalencie $\quad (-1,2) \sim (-2,4) \sim (3,-6)$

$(-2,4) \sim (-1,2)$

$F/\sim$ - formálne zlomky (systém podmnožín)



- faktorizácia (potrebné naštudovať si)

(R)(S)(AS)(T)

Nech $A = \{1,2,3,4\}$

Nájdite $\rho \subseteq A \times A$ také, že

R	S	AS	T	ρ
A	N	A	N	$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$
A	N	A	A	$\{(1,2)\}$
N	N	N	A	$\{(1,2)(2,1)(1,1),(2,2)(2,3)(1,3)\}$
A	A	N	N	$\{(1,2),(2,1)\}$

(AS)

$\forall x,y \in A: (x \rho y) \wedge (y \rho x) \Rightarrow x = y$

D.Ú.
všetky ostatné

A	A	A	A	$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
N	A	A	A	$\emptyset$
A	A	N	A	$\{(1,1)(2,2),(3,3),(4,4)$

M - všetci v tejto miestnosti okrem Jenču

$\rho \subseteq M \times M$

$A \rho B \iff$ majú spoločné písmená v mene

(R) je lebo mená sú neprázdne slová

(S) je

(AS) nie je, protipríklad A = Jožo B = Ján

(T) ~~~~ nie je A = Ján $\quad A \rho B \wedge B \rho C$

B = Jozef

C = Peter

Nech ρ je relácia na reálnych číslach $(\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ je daná predpisom $a \rho b \iff a \cdot b \in \mathbb{Q}$

zistite či je reflexívna (R)(S)(AS)(T)

(R) $\forall x \in \mathbb{R}: x \rho x$

$\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot x \in \mathbb{Q}$ neplatí, lebo $x = \sqrt[3]{2}$ $\quad x \cdot x = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = (\sqrt[3]{2})^2 = 2^{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ Nie

(S) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x \cdot y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \cdot x \in \mathbb{Q}$ $\quad$ ÁNO

(AS) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \cdot y) \in \mathbb{Q} \wedge (y \cdot x \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x = y$

neplatí $\quad x = 1 \quad 1 \cdot 2 \in \mathbb{Q} \quad 1 \neq 2$ $\quad$ Nie

$y = 2 \quad 2 \cdot 1 \in \mathbb{Q}$

(T) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \rho y) \wedge (y \rho z) \Rightarrow (x \rho z)$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \cdot y \in \mathbb{Q}) \wedge (y \cdot z \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (x \cdot z \in \mathbb{Q})$

$x = \sqrt{2} \quad x \cdot y = 0 \quad x \quad \pi$

$y = 0 \quad y \cdot z = 0 \quad y \quad \frac{1}{\pi}$

$z = 1 \quad x \cdot z \notin \mathbb{Q} \quad z \quad \pi$

Nech $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rho \subseteq M \times M$

$x \rho y \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

(R) $\forall a \in M \; a \rho a$

$\forall a \in M \; \frac{a}{a} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ platí, lebo $\frac{a}{a} \in \mathbb{Q}$

22.2.

$\sim \varrho \cdot \frac{1}{2} \pi$

(S) $\forall a,b \in M: \frac{a}{b} \in Q \; \frac{b}{a} \in Q$

$\frac{a}{b} \in Q \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}} \in Q \quad , \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ platí

(AS) NIE JE

$\forall a,b \in M \; \frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{b}{a} \in Q \Rightarrow a = b$

nie je $\quad a = 1$

$b = 2$

$a \neq b$

(T) $\forall a,b,c \in M: (a \varrho b) \wedge (b \varrho c)$

platí

$\frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{b}{c} \in Q = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in Q$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

Využitie faktorizácia grupy podľa podgrupy $\mathbb{R} \setminus \{0\} / Q \setminus \{0\}$

Príklad

P - všetky priamky v rovine

$\parallel \subseteq P \times P$

(R) ÁNO $\quad p \parallel p \quad \forall p \in P$

(S) ÁNO $\quad p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$

(AS) NIE protipríklad

(T) ÁNO $\quad$ ak $p \parallel q \wedge q \parallel r \Rightarrow p \parallel r$

VI. P - všetky p. v priestore

$\perp = \varrho$

(R) nie

(S) ÁNO

(AS) NIE

(T) NIE

$\psi \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$x \psi y \Leftrightarrow x = y^2$

(R) NIE

$\forall a \in \mathbb{R}: a \psi a$

$\forall a \in \mathbb{R}: a = a^2$

(S) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \psi b \Rightarrow b \psi a$

$\forall a, b \in \mathbb{R}: a = b^2 \Rightarrow b = a^2$

protipríklad $a = 4, b = 2$

(AS) $\forall a, b \in \mathbb{R} (a \psi b) \wedge (b \psi a) \Rightarrow a = b$

$a = a^4$

$a^4 - a = 0$ $\quad a_1 = 0$

$\cancel{a^2(1-a)} = 0$ $\quad a_2 = 1$

$a(a^3 - 1) = 0$

Nech $\varsigma \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ $\quad 2^{\mathbb{N}}$ - množina $\forall$ podmnožín $\mathbb{N}$

$A \varsigma B :\Leftrightarrow A \cap B \neq 0$

(R) $\forall X \in 2^{\mathbb{N}}: X \varsigma X$

—— || —— $X \cap X \neq \emptyset$

} neplatí
jediný protipríklad $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

(S) $\forall X, Y \in 2^{\mathbb{N}}$ $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \cap X \neq \emptyset$

platí, dôvod $X \cap Y = Y \cap X$ $\quad$ áno

(AS) NIE

(T) NIE $\forall X, Y, Z \in 2^{\mathbb{N}}: (X \cap Y \neq \emptyset) \wedge (Y \cap Z \neq \emptyset)$

Prémia: Zistite či $\varsigma \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ $\quad \mathbb{R}^+ = (0, \infty)_{\mathbb{R}}$

daná predpisom $x \varsigma y \Leftrightarrow \sqrt[x]{y} \leq \sqrt[y]{x}$ (8 bodov)

Prémia: $\{A_i\}_{i \in I}$

1, Pre $F \subseteq I$ konečné $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

2, $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$

$A_i = \mathbb{N} \setminus \{i\}$

$I = \mathbb{N}$