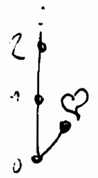
Algr
5.3.2006
prednáška

Riešenie prémie

Poset $(N \cup \{\heartsuit\}, \leq)$ $\heartsuit \notin N$



Príklad: $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,4,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{N}^+, |)$ je poset
delí

$x|y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ : x = y \cdot n$

(R) $\forall a \in \mathbb{N}^+ : \ a|a$

$\forall a \in \mathbb{N}^+ : \ a = a \cdot 1$

(AS) $\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : \ a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$

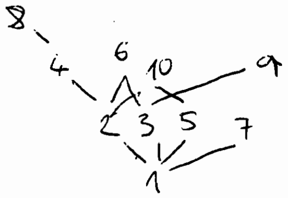
$\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : (\exists n_1 \in \mathbb{N}^+ : a = n_1 b) \wedge (\exists n_2 \in \mathbb{N}^+ : b = n_2\, a) \overset{?}{\Rightarrow} a = b$

$\left.\begin{matrix} a = n_1 b \\ b = n_2 a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = n_1 \cdot n_2 \cdot a \Rightarrow 1 = n_1 n_2 \Rightarrow n_1 = \frac{1}{n_2} \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \begin{matrix} n_2 = 1 \\ n_1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = n_1 b \\ a = 1 \cdot b = b \end{matrix}$

(T) $\forall a,b,c : \ a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$-\|-$ $(\exists n_1 \in \mathbb{N}^+ : a = n_1 \cdot b) \wedge (\exists n_2 \in \mathbb{N}^+ : b = n_2 c) \Rightarrow a = n_1 \cdot n_2 \cdot c. \Rightarrow n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}^+$
$\Downarrow$
ale

$(\{1,2,\dots,10\}, |)$



Operácie na množine

Def: Nech M je neprázdna množina
ak $n \in M$, $n > 0$.
n-nárna operácia na M je zobrazenie
$$f : \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n\text{-krát}} \to M$$
n-krát $= M^n$

Špeciálne, ak $n = 0$
0-nárna operácia je
1 ľubovolný konštantný prvok z M

Príklady

$f: N^2 \to N$ dané predpisom $f(x,y) = x+y$ je 2-nárna operácia na N $M^0 = \{\emptyset\}$
(binárna)

Príklady: M - všetky body v rovine

$f: M^3 \to M$

$f(A,B,C) =$ ťažisko $\triangle ABC$

Príklad 2^N

$f: (2^N)^1 \to 2^N \quad f(X) = X^c$

$\|$

2^N

Označovanie binárnych operácií

Nech $*$ je binárna operácia na M, značíme $*(a,b) = a * b$

Grupoidy a ich hierarchia

Def: Nech A je neprázdna množina, nech $*$ je binárna operácia na A.

Potom dvojicu $(A,*)$ nazývame grupoid

Def: Nech $*$ je operácia binárna (na neprázdnej) množine A.

odteraz sa nepíše
berieme automaticky

Hovoríme, že

- $*$ je komutatívna, ak pre všetky $x,y \in A$ platí $x*y = y*x$ $*(y,x) = *(x,y)$
- $*$ je asociatívna, ak

pre všetky $x,y \in A$ platí že $(x*y)*z = x*(y*z)$

$$\underbrace{*(*(x,y),z) = *(x,*(y,z))}_{\text{môžeme písať}}$$

$x*(y*z) =$

$= x*y*z$

Nech $e \in A$, hovoríme že e je jednotkový (alebo neutrálny) ak pre všetky $x \in A$ $x*e = e*x = x$

pokr. v def.

- Nech $(A,*)$ je grupoid
  - ak $*$ je komutatívna, hovoríme, že $(A,*)$ je ábelovský (alebo komutatívny grupoid)
  - ak $*$ je asociatívna, hovoríme že $(A,*)$ je pologrupa
  - ak $(A,*)$ je pologrupa a existuje jednotkový prvok vzhľadom na $*$, $(A,*)$ je monoid
  - Ábelovská pologrupa, ábelovský monoid

Príklady

$(N,+)$ je ábelovský monoid, jednotkový prvok je 0
$(N,\cdot)$ je ábelovský monoid, jed. prvok 0
$(2^N,\cup)$ je ábelovský monoid, jed. prvok $\emptyset$
$(2^N,\cap)$ — || —, jed. prvok $\underset{\text{teraz}}{N}$ $(\mathcal{U})$

$Fin(N) = \{A \in 2^N : A$ je konečná$\}$

$Fin(N,\cap)$ - ábelovská pologrupa (nemá jednotkový prvok)

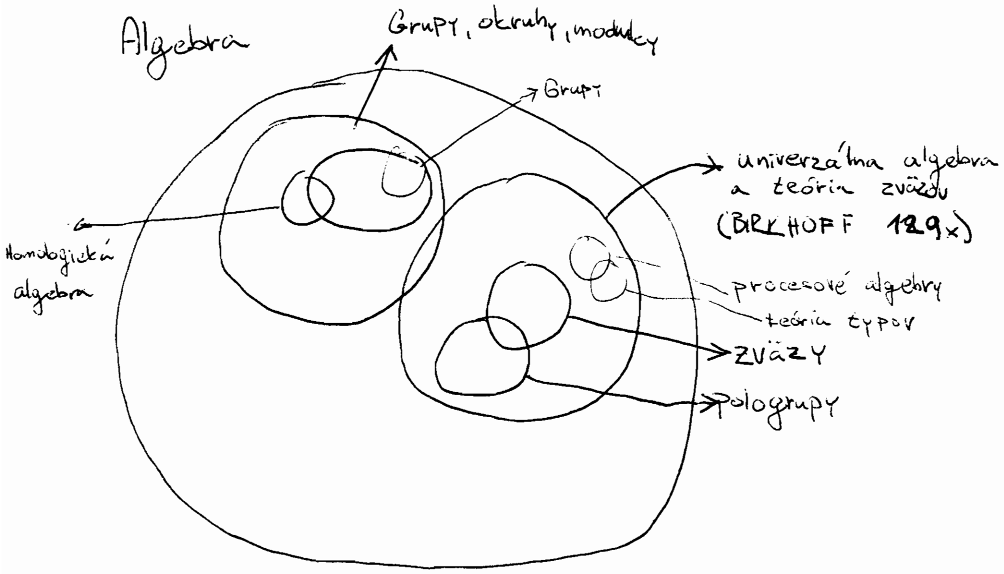
Dôkaz (sporom)

Nech E je jednotkový prvok, $E \in Fin(N)$ vzhľadom na $\cap$
$\forall X \in Fin(N).\ X \cap E = E \cap X = X$

Nech $a \in N$, $a \notin E$. Také existuje lebo $N \setminus E$ je neprázdne, lebo inak by $\underset{\text{konečné}}{E} = \underset{\text{nekonečné}}{N}$ - nepravda

Položme $X = E \cup \{a\}$ zrejme to je konečné $X \in Fin(N)$
$X \cap E = (E \cup \{a\}) \cap E = E \neq X$

Motivačné dristy (kecy)



<u>Veta</u>: Každý grupoid má najviac jeden jednotkový prvok

Dôkaz: Nech e_1 a e_2 sú jednotkové prvky grupoidu $(A,*)$

$$\forall x \in A: x * e_1 = e_1 * x = x$$
$$\forall x \in A: x * e_2 = e_2 * x = x$$

$e_2 * e_1 = e_1$, lebo e_2 je jednotkový $(x = e_1)$

$e_2 * e_1 = e_2$, lebo e_1 je jednotkový

$$\Downarrow$$
$$e_1 = e_2$$

Veta: Nech A je množina.

Označme A^A množina všetkých zobrazení z A do A

Nech je binárna operácia na A^A

skladania

$$\forall x \in A: (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

<u>Príklad</u>: $A = \mathbb{R}$

$f(x) = \sin(x)$

$g(x) = x^2$

$(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$

$(g \circ f)(x) = (\sin(x))^2$

$f \circ g \neq g \circ f$ nie je komutatívne

$(A^A, \circ)$ je pologrupa

Dôkaz:

$$\forall f, g, h \in A^A : (f \circ g) \circ h \overset{?}{=} f \circ (g \circ h)$$

tzn.

$$\forall f, g, h \in A^A \, \forall x \in A : ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

$$L' = ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \overset{?}{=}$$

$$P = (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \quad \square$$

nekomutatívny monoid