Algr.
prednáška 23.4.2007

Podzväzy, homomorfizmy a kongruencie zväzov

Definícia: Nech $(L,\wedge,\vee)$ je zväz, nech $\emptyset \neq L_1 \subseteq L$, hovoríme že L_1 je podzväz L, ak pre všetky $a,b \in L_1$ platí $a\vee b, a \wedge b \in L_1$

Príklad $L = (2^{\{1,2,3\}}, \cap, \cup)$

Podzväzy $\{\emptyset\}$

$\{\{1,2\}\}$

L

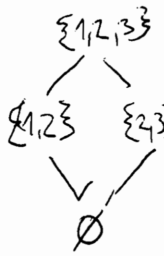
$\{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

$\{\{1\}, \{3\}, \emptyset, \{1,3\}\}$

Nie podzväz: $K = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

K nie je podzväz $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin K$

$(K, \subseteq)$ však je zväz



Samozrejme $(L,\wedge,\vee)$ je zväz, a L_1 je podzväz, potom $(L_1,\wedge,\vee)$ je zväz.

Definícia: Nech $(L_1,\wedge_1,\vee_1)$, $(L_2,\wedge_2,\vee_2)$ sú zväzy

Zobrazenie $\varphi: L_1 \to L_2$ je homomorfizmus [zväzov]

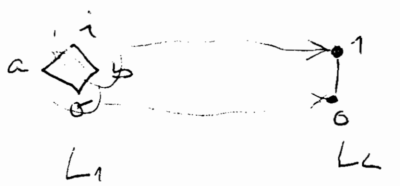
ak pre všetky $u,v \in L_1$ platí

$$\varphi(u \wedge_1 v) = \varphi(u) \wedge_2 \varphi(v)$$

$$\varphi(u \vee_1 v) = \varphi(u) \vee_2 \varphi(v)$$

tieto sa nepíšu

Príklad



$\varphi: L_1 \to L_2$

x	0	a	b	1
$\varphi(x)$	0	0	1	1

je homomorfizmus

Veta: Ak $\varphi: L_1 \to L_2$ je homomorfizmus zväzov potom pre všetky $x, y \in L_1$ platí, že ak $x \leq y$, potom $\varphi(x) \underset{\text{som v } L_2}{\leq} \varphi(y)$

Dôkaz: v L_1 $x \leq y \iff x \wedge y = x$

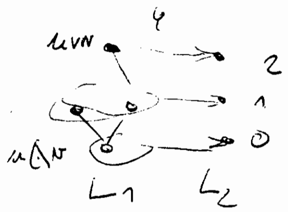
$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \underset{\text{v } L_2}{\wedge} \varphi(y)$, lebo φ je homomorfizmus,

ale $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x)$, lebo $x \wedge y = x$

Teda $\varphi(x) = \varphi(y)$, tzn $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ □

Opačná implikácia $\Rightarrow$ neplatí!

[protipríklad na opačnú implikáciu]



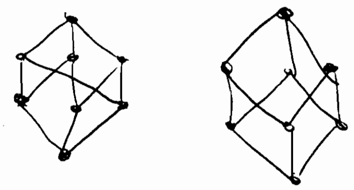
φ nie je homomorfizmus

$\varphi(u \vee v) = 2$

$\varphi(u) \vee \varphi(v) = 1 \vee 1 = 1 \neq 2$

Def: Bijektívny homomorfizmus sa nazýva izomorfizmus

„Byť izomorfné" } ako v grupách



Def: Nech $(L, \wedge, \vee)$ je zväz, Θ je relácia na L $(\Theta \subseteq L \times L)$

Θ sa nazýva kongruencia, ak platí

1) Θ je ekvivalencia

2) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in L$ platí:

ak $u_1 \,\Theta\, u_2$ a zároveň $v_1 \,\Theta\, v_2$, potom

$(u_1 \vee v_1) \,\Theta\, (u_2 \vee v_2)$

$(u_1 \wedge v_1) \,\Theta\, (u_2 \wedge v_2)$ □

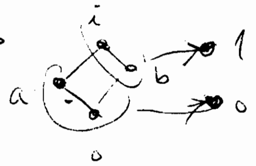
Ak Θ je kongruencia na zväze L, potom $(L/\Theta, \wedge, \vee)$ je zväz L/Θ

Ak: $\varphi : L_1 \to L_2$ je homomorfizmus s $\mathrm{Im}\,\varphi$ (obor hodnôt) je podzväzom $\to L_2$

$\sim_\varphi$ je kongruencia na L_1

$(L_1/\sim_\varphi, \wedge, \vee) \cong \mathrm{Im}\,\varphi$

homomorfizmus



je surjektívny

L_1 L_2

$\{i, b\}$

$|$

$L_1/\sim_\varphi$

$= \{a, 0\}$

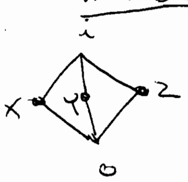
Distributívne a modulárne zväzy

Def.: Nech $(L, \wedge, \vee)$ je zväz

L je distributívny, ak pre všetky $x, y, z \in L$ platí

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = \dots$$

Príklad nedistributívneho zväzu



$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge i = x$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0 \neq x$$

Veta: Zväz je distributívny práve vtedy keď pre všetky x, y, z platí duálna rovnosť

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Dôkaz: $\Rightarrow$ Nech zväz je distributívny

Zameníme písmená

$\forall a, b, c: a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Vezmime $(*)$ s dosadením $x = a \vee b$, $y = a$, $z = c$

$$x \wedge (y \vee z) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$\underline{(a\vee b)\wedge(a\vee c)} = (\underbrace{(a\vee b)\wedge a}_{= a})\vee((a\vee b)\wedge c) \overset{L_4}{=} a\vee((a\vee b)\wedge c) \underset{\wedge}{\overset{kom}{=}} a\vee(\underbrace{c\wedge(a\vee b)})$$

$$= a\vee((c\wedge a)\vee(c\wedge b)) \underset{\text{asoc } \vee}{=} (a\vee(c\wedge a))\vee(c\wedge b) \underset{L_4}{=} a\vee(c\wedge b) \underset{\text{kom } \wedge}{=} \underline{a\vee(b\wedge c)}$$

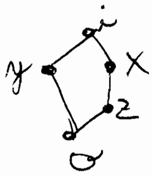
$$\left.\begin{array}{l} c = x \\ a = y \\ b = z \end{array}\right\} (*)$$

opačná implikácia platí tiež. stačí zameniť $\wedge \leftrightarrow \vee$ $\square$

Definícia: Zväz je modulárny, ak pre všetky x, y, z platí implikácia

$$x \geq z \Rightarrow x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee z$$

Príklad <u>nemodulárneho</u> zväzu



$$x\wedge(y\vee z) = x\wedge i = x$$
$$\neq$$
$$(x\wedge y)\vee z = 0\vee z = z$$

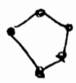
Veta: Každý distributívny zväz je modulárny

Dôkaz: Nech je zväz distributívny.

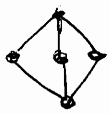
Nech $x \geq z$, Potom $x\wedge z = z$.

$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z) = (x\wedge y)\vee z$ $\square$

Veta (o pentagone a diamante)

a) Zväz je modulárny práve vtedy, keď <u>neobsahuje</u> podzväz izomorfný s 

práve vtedy

b) Zväz je distributívny ak neobsahuje ~~nejaký~~ žiadny podzväz izomorfný s  alebo s 

pentagon

diamant

dôkaz je hustý, nebude

Reprezentácia konečných distributívnych zväzov

Def. Nech $(P, \leq)$ je poset.

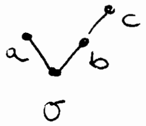
$T \subseteq P$ je dolná množina, ak platí $(\forall a \in T)\ a \geq b \Rightarrow b \in T$.

Systém všetkých dolných množín $H(P)$, H - heretidary

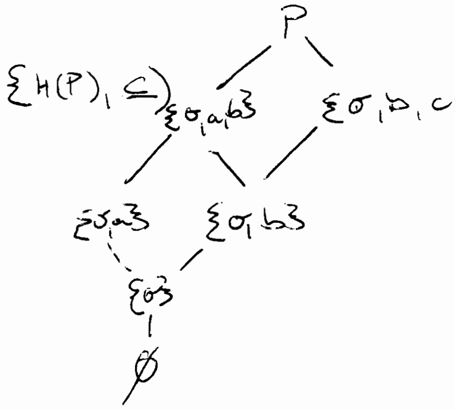
$H(P)$ je uzavreté na $\cup, \cap$

$(H(P), \cap, \cup)$ je zväz a je podzväzom $(2^P, \cap, \cup)$

Samozrejme je distributívne, lebo $\cup, \cap$ je distributívny



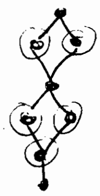
$H(P) = \{\emptyset, \{o\}, \{\sigma, a\}, \{\sigma, b, \}, \{\sigma, a, b, c\}, \{\sigma, a, b\}\}$



<u>Veta</u>: Každý konečný distributívny zväz $(L, \wedge, \vee)$ je izomorfný $(H(P), \cap, \cup)$ pre nejaký poset P.

Príklad

$(L, \wedge, \vee)$

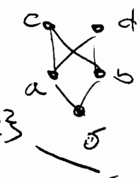


— tie prvky ktoré pokrývajú práve jeden

subposet z nich

$P : H(P) \cong L$

$H(P)$ je izomorfné s L



$(H(P), \subseteq)$