Algír

cvičenie 8.3.2007

Zistite, či je operácia $*$ na množine A komutatívna, asociatívna a či má jednotkový ~~element~~ prvok

1. $A = R$

$b * = |a+b|$

(KOM) $\forall x, y \in R \quad x*y = y*x$

— || — $|x+y| = |y+x|$ PLATÍ LEBO

(ASOC) $\forall x, y, z \in R: \ (x*y)*z = x*(y*z)$

— || — $|x+y|*z = x*|y+z|$

$||x+y|+z| = |x+|y+z||$

$x = -2$
$y = 1$
$z = 1$

Ľ: $||x+y|+z| = ||-2+1|+1| = |1+1| = 2$

P: $|x+|y+z|| = |-2+|1+1|| = |-2+2| \overset{\neq}{=} 0$ Nie je asoc

(JEDN)

Existuje jedno fixné e

$\forall x \in R \qquad x*e = e*x = x$

$\forall y \in R \qquad |x+e| = |e+x| = x$

nemá jednotkový prvok, ak $x < 0$

$|e+x| \geq 0 \quad x < 0$

$|e+x| = x$

Iný pohľad na vec.

Nech $\forall x\, R \ |x+e| = |e+x| = x$

potom (keďže $|e+x| \geq 0$

$\forall x \in R \ |e+x| = x \geq 0$.

Nepravda (spor)

Má jednotkový prvok
$\Downarrow$
Nepravdivé Tvrdenie

(Nemá jednotkový prvok

$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}$

$\overline{A}$

Príklad

A = R

$a * b = a^2 + b^2$

(kom) $\forall x, y \in R : x * y = y * x$

—||— $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ Platí lebo $+$ je kom.

(ASOC) $\forall x, y, z \in R : (x * y) * z = x * (y * z)$

—||— $(x^2 + y^2) * z = x * (y^2 + z^2)$

—||— $(x^2 + y^2)^2 + z^2 = x^2 + (y^2 + z^2)^2$

$x = 0$
$y = 0$
$z = 2$ $\quad 4 \neq 16$

$\Downarrow$

nie je asoc

(JEDN) - nemá (dôkaz podob. ako v predošlom príklade)

Príklad

A - všetky body v rovine

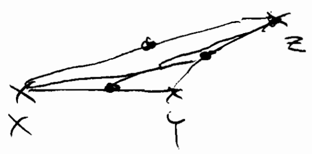
$U * V$ = stred úsečky UV

(KOM) $\forall X, Y \in A : X * Y = Y * X$

—||— : stred úsečky XY = stred úsečky YX

Platí, lebo $XY = YX$

(ASOC) $\forall X, Y, Z : (X * Y) * Z = X * (Y * Z)$



Nie je asoc.

(Jedn) $\forall X \in A \quad X * E = E * X = X$

$E * X = X \Rightarrow X = E$

$\forall X \in A : X = E$

$\Downarrow$

$A = \{E\}$

nemá jednotkový prvok

Príklad: $A = \mathbb{R}$

$a * b = a \cdot b \cdot 3$

(ASOC)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

$—||— \quad (x \cdot y \cdot 3) * z = x * (y \cdot z \cdot 3)$

$9 x \cdot y \cdot z = 9 x \cdot y \cdot z$ ✓ platí

(Kom) D.Ú.

(JEDNOTKOVÝ)

$\forall x \in \mathbb{R}: \ x * e = e * x = x$

Príklad $A = 2^N$

Nech $F \in 2^N$ je fixná množina $\quad F \neq \emptyset$

$U *_F V = (U \setminus F \cup V \setminus F) \cup F$

(KOM)

$\forall X, Y \in 2^N \quad X *_F Y = Y *_F X$

$\forall X, Y \in 2^N \quad (X \setminus F) \cup (Y \setminus F) \cup F = ((Y \setminus F) \cup (X \setminus F)) \cup F$

platí, ✓ je kom.

$(X \setminus F) \cup (Y \setminus F) = (Y \setminus F) \cup (X \setminus F)$

$\forall X, Y, Z \in 2^N: (X * Y) * Z = X * (Y * Z)$

$((X \setminus F) \cup (Y \setminus F) \cup F) * Z = X * ((Y \setminus F) \cup (Z \setminus F) \cup F)$

$L = (((X \setminus F) \cup (Y \setminus F) \setminus F \cup Z \setminus F = (((X \cap F^c) \cup (Y \cap F^c) \cup F) \cap F^c) \cup (Z \cap F^c)) \cup F =$

$= ((X \cap F^c \cap F^c) \cup (Y \cap F^c \cap F^c) \cup (F \cap F^c)) \cup (Z \cap F^c) \cup F = (X \cap F^c) \cup (Y \cap F^c) \cup$

$\cup (Z \cap F^c) \cup F$

$P = $ D.Ú.

(JEDNOTKOVÝ) $\forall X \in 2^N: X * E = E * X = X$

$((E \setminus F) \cup (X \setminus F)) \cup F = X$

$X = \emptyset$

$((E \setminus F) \cup (\emptyset \setminus F) \cup F = (E \cap F^c) \cup F = (E \cup F) \cap (F^c \cup F) = (E \cup F) \cap \mathcal{U} = E \cup F \neq \emptyset = X$

$\mathcal{U}$

LEBO $F \neq \emptyset$

Neexistuje také E, že $\emptyset * E = E * \emptyset = \emptyset$ $\Longleftarrow$

Príklad

$A = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

$a * b = \frac{ab}{a+b}$

(Kom)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x * y = y * x$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \frac{x \cdot y}{x+y} = \frac{yx}{y+x}$ platí lebo $xy = yx \wedge x+y = y+x$

(Asoc) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ : (x * y) * z \overset{?}{=} x * (y * z)$

$-\|-$

$$\left(\frac{xy}{x+y}\right) * z \overset{?}{=} x * \left(\frac{yz}{y+z}\right)$$

$$\frac{\frac{x \cdot y}{x+y} \cdot z}{\frac{xy}{x+y} + z} \overset{?}{=} \frac{x \frac{yz}{y+z}}{x + \frac{yz}{y+z}}$$

$$\frac{\frac{xyz}{x+y}}{\frac{xy + z(x+y)}{x+y}} = \frac{\frac{xyz}{y+z}}{\frac{x \cdot (y+z) + yz}{y+z}}$$

$$\frac{xyz}{xy + zx + zy} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

Platí

(keďže sme používali iba eko úpravy platí aj pôvodná rovnosť)

$zx = xz$

$zy = yz$

(Jednotkový)

$\exists e \in \mathbb{R}^+$ $\quad x * e = e * x = x$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\quad \frac{xe}{x+e} = x$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \frac{x \cdot e}{x+e} = x \quad / (x+e)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ x \cdot e = x^2 + xe$

~~$-\|- \ xe = x^2 + xe$~~

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 = x^2$ - zjavná nepravda (neplatí pre $x = 1$)

$0 = A^2$

má platiť pre ~~V~~ všetky, aj pre $X = \emptyset$

Cayleho tabuľky

Nech $*$ je operácia na konečnej množine A

Cayleho tabuľka vyzerá takto:

$$\begin{array}{c|c} * & \xrightarrow{A} \ y \\ \hline \text{prvky } A \downarrow & x \end{array}$$

V vrchnakom poradí ako v

Príklad:

$A = \{0,1,2,3\}$, $a \oplus b = \min((a+b), 3)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3

1) $\oplus$ je komutatívna

lebo — os súmernosti

2) $\oplus$ | 0 — to isté

to isté

$\Rightarrow$ 0 je jednotkový

Asociativitu z Cayleho tab. nevidno

Príklad: Operácia na R

(kom) $(\forall x, y \in R \quad x - y = y - x$

nepravda $\quad x = 1 \quad 1 - 2 = 1$

$\qquad\qquad y = 2 \quad 2 - 1 \neq 1$

(asoc) $\forall x, y, z \in R : (x - y) - z = x - (y - z)$

$x = 0 \quad L = (0 - 0) - 3 = -3$

$y = 0 \quad P = 0 - (0 - 3) = -(-3) = 3$

$z = 3$

(Jednotkový prvok)

$\forall x \in R : x - e = e - x = x$

$x - e = e - x$

$x = (e - x) + e = 2e - x$

$2e - x = x$

$2e = 2x$

$e = x$

$\forall x \in R : e = x$

$R = \{e\}$ – nepravda

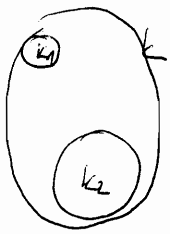
III

kreslivá prémia: (8b)

K je množina všetkých kružníc v rovine

$\square$ je bin operácia $K \times K \to K$

$k_1 \square k_1 :=$ kružnica s najmenším polomerom vnútri ktorej sú k_1 a k_2



$k = k_1 \square k_2$

Zistite či je pologrupa

Príklad: $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, operácia $\cdot$
$H = \mathbb{R}^+$, operácia $\cdot$

$\varphi(x) = |x|$

$\varphi(a\cdot b) = |a\cdot b| = |a|\cdot|b| = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

Príklad: $G = \mathbb{R}$, operácia $+$
$H = \mathbb{R}^+$, operácia $\cdot$

$\varphi : G \longrightarrow H$

$\varphi(a+b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

$\varphi(x) = e^x$

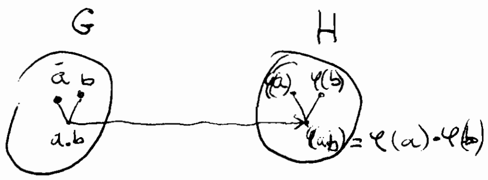
$\varphi(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

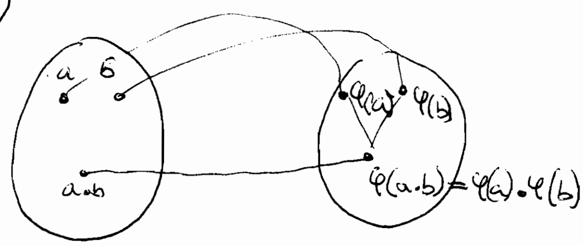
Príklad: $G = \mathbb{R}^+$, operácia $\cdot$
$H = \mathbb{R}$, operácia $+$

$\varphi : G \to H$

$\varphi(x) = \ln x$

$\varphi(a\cdot b) = \ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b) = \varphi(a) + \varphi(b)$





Príklad

$G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, operácia $\cdot$

$H = \{-1, 1\}$, operácia $\cdot$

$\varphi : G \longrightarrow H$

$\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$$\varphi(a\cdot b) = \frac{a\cdot b}{|a\cdot b|} = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} = \frac{a}{|a|}\cdot\frac{b}{|b|} = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$