12.2.2007

Algebra a graf.

Gejza Jenča
gejza.jenca@stuba.sk
matika.elf.stuba.sk

1/0 b. - semester 2×20 bodov

1. písomka 4 týždeň

Konzultačné hodiny : Utorok 12:30

1. úvod, množiny, relácie
2. Relácie ekvivalentné
3. Grupy
4. Základy teórie zväzov
5. Grafy

Množiny, relácie, zobrazenia

Množina - konečný alebo nekonečný súbor objektov.

naivná definícia

Fakt že prvok patrí do množiny značíme: $x \in A$

prvok   množina

Príklady: $\{1,2,3\}$

$N = \{0,1,2,3,\dots\}$, $0 \in N$!

Q = všetky racionálne čísla

R = všetky reálne čísla

Prázdna množina je taká množina je taká množina $\emptyset$, že pre ľubovoľný objekt x platí $x \notin \emptyset$

Hovoríme, že množina B je podmnožina množiny A, ak pre $\forall$ x ~~platí~~ platí že ak $x \in B$, potom $x \in A$.

$(\forall x)\ x \in B \Rightarrow x \in A$.

Hovoríme že A je nadmnožinou B a ak $B \subseteq A$.

Symbolicky $B \subseteq A$ alebo $A \supseteq B$

Veta 1: Pre každú množinu A platí že $\emptyset \subseteq A$

Dôkaz: $\emptyset \subseteq A$ platí práve vtedy keď pre $(\forall x)\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

a	b	a ⇒ b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Keďže $\emptyset$ má vlastnosť $(\forall x)\ x \notin \emptyset$, platí dokonca $(\forall x)\ x \in \emptyset \Rightarrow$ hocičo

teda

$(\forall x)\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ $\square$

Hovoríme, že množiny A, B sú rovné $(A = B)$ práve vtedy, keď $(\forall x)\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (extenzionalita)

Veta: Pre všetky množiny A, B platí $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Dôkaz: $A \subseteq B$ znamená $(\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ znamená $(\forall x)\ x \in B \Rightarrow x \in A$

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ znamená $(((\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge ((\forall x)\ x \in B \Rightarrow x \in A)) \Leftrightarrow$ ~~$(\forall x)\ x \in A \Leftrightarrow$~~

$[(\forall x)(x \in A) \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \Leftrightarrow ((\forall x)(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ $\Leftrightarrow A = B$

Vydelenie množiny

Často konštruujeme nové množiny ako podmnožiny nejakej množiny A obsahujúce ~~dve~~ práve tie prvky pre ktoré platí nejaký výrok. Zapisujeme to takto:

$\{x \in A : \text{„výrok } ox\text{"}\} \Leftarrow$ podmnožinu A obsahujúcu všetky tie prvky $x \in A$ o ktorých platí výrok

Často je A zrejmá z kontextu

$\{x : \text{„výrok } ox\text{"}\}$

Príklady: $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ je párne}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = (-\infty, 2\rangle$

$\{x \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, x = 3k+1\} = \{1, 4, 7, \dots\}$

Zjednotenie a prienik

Nech A, B sú množiny

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ alebo } x \in B\} \Leftarrow$ zjednotenie A, B

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ a zároveň } x \in B\}$

Skoro vždy sa v nejakom kontexte pohybujeme v nejakej „univerzálnej množine" z ktorej ~~vyberáme~~ vydeľujeme podmnožiny. Túto značíme $\mathcal{U}$

Komplement: Nech A je množina $A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$

Príklad: Ak $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ (reálna analýza)

$\langle -1, 2)^c = (-\infty, -1) \cup \langle 2, \infty)$

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

Pozor! Nikdo nehovorí, že $B \subseteq A$!

$\langle 1, 3\rangle \setminus \langle 2, 8\rangle = \langle 1, 2)$

Veta: Pre ľubovoľné množiny A, B platí

a1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b1) $(A \cup B) = (B \cup A)$

c1) $A \cup (A \cap B) = A$

d2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e1) $A \cup A^c = \mathcal{U}$

a2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ asociativita

b2) $(A \cap B) = (B \cap A)$ komutativita

c2) $A \cap (A \cup B) = A$ absorbcia

d2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivita

e2) $A \cap A^c = \emptyset$ zákony komplementu

dôkaz je dlhý, lokálne primitívny a neuvedený na prednáške

a1 ... e2 - úplný axiomatický systém pre teóriu „množinovej rovnosti"

Dokážme $A \cup A = A$

$A \cup (A \cap A)_{c_1} =$

$X \cup X = X$ (pre všetky X)

$X \cup (X \cap X)_{c_1} = X$ — idempotentnosť zjednotenia

$X \cup (X \cap X)_{d_1} = (X \cup X) \cap (X \cup X)$

$\underbrace{(X \cup X)}_{A} \cap \underbrace{(X}_{B} \cup \underbrace{X)}_{C}{}_{d_2} = (\underbrace{(X \cup X)}_{A} \cap \underbrace{X}_{B}) \cup ((X \cup X) \cap X)_{c_1} =$

$= (X \cap (X \cup X)) \cup (X \cap (X \cup X)))_{c_2} = X \cup X$

Prémia: Dokážte čisto pomocou rovností a1) – e2) a rovností $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

1U

demorganov zákon (hociktorý)

f1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

pomôcka: Skúste najprv $A \cup \emptyset A$ $\quad A \cap \mathcal{U} = A$ $\quad \emptyset^C = \mathcal{U}$ $\quad \mathcal{U}^C = \emptyset$

$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

Prémia 2:

Nájdite systém množín (množina množín) $\{A_i\}_{i \in I}$ indexová množina s týmito vlastnosťami:

1) Pre každú neprázdnu konečnú $F \subseteq I$ platí, že $\bigcap_{i \in F} A_i \neq \emptyset$

2) $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$

Prémia 3: Dokážte, že ak A, B, C sú také, že

$A \cup B = B \cup C = A \cup C$

$A \cap B = B \cap C = A \cap C$

potom $A = B = C$

Definícia: Nech A je množina

Potom $2^A = \{B : B \subseteq A\}$ je potenčná množina množiny A.

Príklad

$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ $\quad 2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$2^{(2^{\{1,2\}})} =$ D.Ú.

~~Kolos~~ Algebra a grafy 15.2.2007 cvičenie

Príklad:

Pomocou zápisu typu $\{:\}$ zapíšte množiny

a) všetky racionálne čísla ktorých druhá mocnina je iracionálna

$\{x : x \in Q \wedge \sqrt{x} \notin Q\}$

$\{x \in Q : \sqrt{x} \in Q\}$

b) Množina všetkých podmnožín ktoré obsahujú číslo 2

$\{x : x \in P(N),\ 2 \in X\}$

$\{X \in 2^N : 2 \in X\} = \{x \subseteq N : 2 \in x\}$

c) párne

$\{x \in 2^N ; (\forall k\ k \in x\ ;\ 2/k)\}$

d) Guľa v R^3 polomerom 1

$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1\} =$

$= \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ - plocha sphera

Zistite či platí

$\{1\} \in \{1,2\}$ - nie je pravda

$\{1\} \subseteq \{1,2\}$ - ÁNO

$1 \in \{1,2\}$

$\{1,2\} \in \{1,2\}$ - NIE

$1 \subseteq \{1,2\}$ NEZMYSEL 1 nie je množina

$\{1\} \in \{\{1,2\}\}$ NIE

$\{1\} \subseteq \{\{1,2\}\}$ NIE

$\{1\} \subseteq \{\{1\},2\}$ NIE

$\{2\} \subseteq \{\{1\},2\}$ ÁNO

$\{1\} \in \{\{1\},2\}$ ÁNO

$\emptyset \in \{1,2\}$ NIE

$\{\{1\}\} \subseteq \{\{1\},2\}$ ÁNO

$\emptyset \subseteq \{1,2\}$ ÁNO

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ ÁNO

$\emptyset \subseteq \emptyset$ ÁNO

$\emptyset \in \emptyset$ NIE

Dokážte alebo vyvráťte $\forall a,b,c$

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ $X \setminus Y = X \cap Y^c$

$L = (A \cap B^c) \cap C^c$ $P = A \cap (B \cap C^c)^c$

$A \cap (B^c \cup C)$

$(A \cap B^c) \cup (A \cap C)$

$(A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cup C)$

$\Updownarrow$

$B^c \cap C^c = B^c \cup C$ $B^c \cap C^c$

$B^c = B$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Pre ľudí čo chcú zapísať celú stranu $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$? (A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

Kartézske súčiny

Def. Nech $A_1, \dots, A_n$ $n \geq 1$

sú množiny. Potom $A_1 \times A_2 \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1 \in A_1) \wedge \dots \wedge (x_n \in A_n)\}$

$(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$?

$A_1 = \{1,2\}$

$A_2 = \{2,3\}$

$A_3 = \{4,5\}$

SÍCE NEPRAVDA
ALE TENTO FAKT
SA <u>IGNORUJE</u> !

Stotožňujeme (zrejmým spôsobom) prvky $(A_1 \times A_2) \times A_3$

$A_1 \times (A_2 \times A_3)$

$A_1 \times (A_2 \times A_3)$

Definícia:

$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}}$

Iný pohľad na A^n:

A^n sú všetky zobrazenia

$\{1, \dots, n\} \to A$

Pr.: $A = \{a,b,c\}$ $\quad A^3 = \{(a,a,a),(a,a,b),\dots,(c,c,c)\}$ $|A^3| = 27$

stotožníme so zobrazením z $\{1,2,3\}$ do A

x	1	2	3
$f(x)$	a	a	b

Zoberieme

$\{A_i\}$ - množina a postupnosti $\forall i\ x_i \in A_i$ nevieme bez axiómy výberu

Vypočítajte

$(\{1,2\} \times \{1,3\}) \cap (\{1,3\} \times \{1,2\}) = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\} \cap \{(1,1)(1,2),(3,1),(3,2)\} = \{(1,1)\}$

Kartézky súčin NIE je komutatívny

Tvrdenie: Ak $A \times B = B \times A$, potom $A = B$ nie je pravdivé, lebo

$A = \{1,2\}$

$B = \emptyset$

$A \times B = \emptyset = B \times A$, ale $A \neq B$

DÚ: Dokážte, že to však nie je pravda ak $A, B \neq \emptyset$

Dokážte alebo vyvráťte

1. $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

---

(1) $A = \{1\} = B = C$ $\quad L = \{1\} \cap \{(1,1)\} = \emptyset$

$P = \{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\} \neq L$

(2) $L = A \times (B \cap C) = \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in (B \cap C))\}$

$P = (A \times B) \cap (A \times C) = \{(x,y) (x \in A) \wedge (y \in B\} \cap \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in C)\} =$

$= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (x \in A) \wedge (y \in C)\} =$

$= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\}$

Príklad

Nech A je množina

nech $f : A \to A$

Dokážte alebo vyvráťte

$\forall X, Y \subseteq A$

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ — neplatí, f_x 

$Z \subseteq A$

$f(Z) \underset{def}{=} \{f(t) : t \in Z\}$

$f(X \cup Y) = \{f(t) : t \in X \cup Y\}$

$f(X) \cup f(Y) = \{f(t) : t \in X\} \cup \{f(t) : t \in Y\}$

$f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ $\quad t \in X \cup Y$ buď X alebo $t \in Y$

$t \in X \Rightarrow f(t) \in f(X) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

$t \in Y \Rightarrow f(t) \in f(Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

$f(t) \in f(X \cup Y) \Rightarrow f(t) \in f(X) \cup f(Y)$

$f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

$\Updownarrow$

$f(X) \subseteq f(X \cup Y) \wedge f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

$f(t) \in f(X) \Leftrightarrow t \in X$ $\quad t \in X \cup Y \Rightarrow f(t) \in f(X \cup Y)$

b)

$X \cap Y = \emptyset$

$f(X \cap Y) = \emptyset$

$f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset$