MODEL PREKRÝVAJÚCICH SA GENERÁCIÍ

Základy makroekonomickej teórie

PREDPOKLADY MODELU

- model je postavený na mikroekonomických základoch; rieši otázku dôchodkového zabezpečenia
- ide o príklad ekonomiky, v ktorej konkurenčné ekvilibrium nemusí byť totožné s ekvilibriom voleným centrálnym plánovačom; je tu možnosť nie Pareto-optimálnej rovnováhy, ktorá je stabilná
- model pracuje s diskrétnym časom
- uvažujeme uzavretú jednotovarovú ekonomiku
- firmy fungujú v prostredí dokonalej konkurencie a vyrábajú podľa produkčnej funkcie s vlastnosťami bližšie špecifikovanými už pri predchádzajúcich modeloch
- vystupujú tu jednotlivci žijúce dve periódy: mladí, starí
- všetci aktéri majú perfektnú informáciu o budúcnosti
- veľkosť populácie sa riadi podľa vzťahu: $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, kde g_N - rýchlosť rastu populácie

FIRMY A JEDNOTLIVCI

- rovnako ako v predchádzajúcom sa dá odvodiť, že pre cenu kapitálu a cenu práce na dokonale konkurenčnom trhu platí:

$$r = f'(k) \tag{1}$$
$$w = f(k) - kf'(k) \tag{2}$$

- mladí, narodení v čase t, majú v čase t spotrebu na hlavu: c_{1t}
- starí, narodení v čase t, majú v čase $t+1$ spotrebu na hlavu: c_{2t+1}
- úžitok zo spotreby majú mladí aj starí rovnaký, vyjadrený funkciou užitočnosti $u(c)$, ktorá má vlastnosti špecifikované v predchádzajúcich modeloch

MAXIMALIZÁCIA CELOŽIVOTNÉHO ÚŽITKU ZO SPOTREBY

- jednotlivec maximalizuje celoživotný úžitok zo spotreby:

$$u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2t+1}),$$

  kde $0 < \frac{1}{1+\theta} < 1$ je diskontný faktor
- v mladosti (produktívnom veku) dostáva jednotlivec mzdu w, ktorú rozkladá medzi spotrebu a úspory na starobu, tj.:

$$c_{1t} + s_t = w_t, \tag{3}$$

  kde s_t - úspory v čase t
- v starobe spotrebuje všetok kapitál, ktorý má k dispozícii, tj.:

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t, \tag{4}$$

  kde r_{t+1} - úroková miera v čase $t+1$

ÚLOHA MAXIMALIZÁCIE

- keďže platia vzťahy (3) a (4), jednotlivec maximalizuje:

$$u(w_t - s_t) + \frac{1}{1+\theta} u\big((1 + r_{t+1})s_t\big) \tag{5}$$

  voľbou s_t
- postavme deriváciu (5) podľa s rovnú nule, dostávame:

$$0 = -u'(c_{1t}) + \frac{1 + r_{t+1}}{1+\theta} u'(c_{2t+1}) \tag{6}$$

- z (6) vyplýva, že optimálne s_t v čase t je funkciou w_t a r_{t+1}, zapíšeme: $s_t = s(w_t, r_{t+1})$

OPTIMÁLNE ÚSPORY

- parciálne derivácie s podľa w a r potom spĺňajú:

$$s'_w = \frac{\partial s}{\partial w} = \frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + \frac{(1+r_{t+1})^2}{1+\theta} u''(c_{2t+1})} \tag{7}$$

$$s'_r = \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\frac{-1}{1+\theta} u'(c_{2t+1}) - \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} u''(c_{2t+1}) s_t}{u''(c_{1t}) + \frac{(1+r_{t+1})^2}{1+\theta} u''(c_{2t+1})} \tag{8}$$

- pre s'_w platí: $0 < s'_w < 1$, tj. pri nemennom r s rastom miezd rastú aj úspory
- kým pre s'_r nevieme určiť, či $s'_r > 0$ alebo $s'_r < 0$, závisí to od konkrétnej voľby funkcií u a f

KAPITÁL

- kapitál sa vyvíja podľa pravidla: investície=úspory, teda:

$$K_{t+1} - K_t = s(w_t, r_{t+1})N_t - K_t, \tag{9}$$

  kde investície (ľavá strana (9)) sú dané rozdielom toho, čo mladí usporia a starí "zjedia"(pravá strana (9))
- amortizáciu kapitálu neuvažujeme
- po predelení oboch strán (9) N_t a s využitím $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, dostaneme:

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{1 + g_N} = \frac{s\big(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})\big)}{1 + g_N} \tag{10}$$

- vo vzťahu (10) je implicitne zadaná funkcia $k_{t+1} = k_{t+1}(k_t)$

STABILITA USTÁLENÉHO STAVU

- ustálený stav kapitálu na hlavu k^* bude taký, že $k_{t+1} = k_t = k^*$ pre každé t
- o tom, či existuje aspoň jeden kladný ustálený stav k^* bez ďalších reštrikcií na model nevieme rozhodnúť
- za predpokladu, že existuje, o stabilite ustáleného stavu k^* rozhoduje to, či platí $\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*)\right| < 1$ alebo nie
- máme:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k_t) = \frac{-s'_w k_t f''(k_t)}{1 + g_n - s'_r f''(k_{t+1})} \tag{11}$$

- opäť platí, že bez dodatočných informácií, nevieme rozhodnúť, či $\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*)\right| < 1$

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Zistite optimálnu voľbu s_t a nájdite spotrebu mladých a starých pre túto hodnotu s_t, ak $u(c) = \ln c$.

Riešenie:

- dosadením za u do vzťahu (6) dostaneme:

$$0 = -\frac{1}{c_{1t}} + \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}\frac{1}{c_{2t+1}} = -\frac{1}{w_t - s_t} + \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}\frac{1}{(1+r_{t+1})s_t}$$

- odtiaľ po úprave: $s_t = \frac{w_t}{2+\theta}$
- spotreba mladých:

$$c_{1t} = w_t - s_t = w_t - \frac{w_t}{2+\theta} = \left(\frac{1+\theta}{2+\theta}\right) w_t$$

- spotreba starých:

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t = \left(\frac{1+r_{t+1}}{2+\theta}\right) w_t$$

ÚLOHY

Úloha č. 2:

- Nájdite kladný pevný bod k^* pre $u(c) = \ln c$ a $f(k) = k^\alpha$, kde $\alpha \in (0, 1)$ a zistite jeho stabilitu.

Riešenie:

- vyjadrime najprv vzťah (10) pre s_t vypočítané v úlohe č. 1:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1 + g_N} = \frac{w_t}{(2+\theta)(1+g_n)} = \frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{(2+\theta)(1+g_n)}$$

- kladný pevný bod potom spĺňa: $k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(2+\theta)(1+g_n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- zderivujme k_{t+1} podľa k_t, dostaneme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha k_t^{\alpha-1}}{(2+\theta)(1+g_n)}$, čo je kladné pre všetky kladné k_t
- navyše v pevnom k^* máme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*) = \alpha < 1$, teda je to asymptoticky stabilný pevný bod

ÚLOHY

Úloha č. 3:

- Nájdite kladný pevný bod k^* pre $u(c) = \ln c$ a $f(k) = Ak^\alpha - \delta k$, kde $\alpha \in (0,1)$, $A > 0$ a $\delta \in (0,1)$ a zistite jeho stabilitu.

Riešenie:

- vyjadrime najprv vzťah (10) pre s_t vypočítané v úlohe č. 1:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+g_N} = \frac{w_t}{(2+\theta)(1+g_n)} = \frac{(1-\alpha)Ak_t^\alpha}{(2+\theta)(1+g_n)}$$

- vidíme, že δ do vzťahu nevstupuje
- kladný pevný bod potom spĺňa: $k^* = \left(\frac{(1-\alpha)A}{(2+\theta)(1+g_n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- zderivujme k_{t+1} podľa k_t, dostaneme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha Ak_t^{\alpha-1}}{(2+\theta)(1+g_n)}$
- v pevnom k^* máme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*) = \alpha < 1$ pre ľubovoľné $A > 0$, teda je to asymptoticky stabilný pevný bod

ÚLOHY

Úloha č. 4:

- Pre k^* vypočítané v úlohe č. 3 vypočítajte $f'(k^*)$. Nech $g_N = 0,35$, $\alpha = 0,25$, $\theta = 0,75$ a $\delta = 0,8$. Platí, že $f'(k^*) > g_N$? Ako sa to zmení pre $\theta = 0$?

Riešenie:

- pre kladný pevný bod sme dostali: $k^* = \left(\frac{(1-\alpha)A}{(2+\theta)(1+g_n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- potom:

$$f'(k^*) = A\alpha(k^*)^{\alpha-1} - \delta = \frac{\alpha(2+\theta)(1+g_n)}{1-\alpha} - \delta$$

- pre hodnoty $g_N = 0,35$, $\alpha = 0,25$, $\theta = 0,75$ a $\delta = 0,8$ dostaneme $f'(k^*) = 0,4375$, čo je viac než g_N
- pre $\theta = 0$ bude $f'(k^*) = 0,1$, čo je menej než g_N

SOCIÁLNE ZABEZPEČENIE A AKUMULÁCIA KAPITÁLU

- uvažujeme tú istú maximalizačnú úlohu ako v predošlom, tj.maximalizovať:

$$u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2t+1}),$$

tentokrát za podmienok:

$$c_{1t} + s_t = w_t - d_t, \quad (12)$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + b_{t+1}, \quad (13)$$

kde d - príspevky do systému, b - dávky v starobe

PRIEBEŽNÝ A KAPITÁLOVÝ SYSTÉM

- rozlišujeme:
  - priebežný systém
  - kapitálový systém
- pri priebežnom dôchodkovom systéme platí: $b_t = (1 + g_N)d_t$, tj. v čase t prispievajú mladí do systému vo výške d_t a keďže rast populácie sa riadi vzťahom $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, tak v tom istom čase dostanú starí dávky vo výške $(1 + g_N)d_t$
- pri kapitálovom dôchodkovom systéme platí: $b_t = (1 + r_t)d_{t-1}$, tj. mladí v čase $t - 1$ si dotujú vlastnú starobu v čase t, dávku v starobe predstavuje zúročený príspevok d_{t-1} do systému

PRIEBEŽNÝ SYSTÉM

- riešiac maximalizačnú úlohu pre priebežný systém dostávame:

$$u'(w_t - s_t - d_t) = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} u'\big((1 + r_{t+1})s_t + (1 + g_N)d_{t+1}\big), \tag{14}$$

  kde $s_t = s(w_t, r_{t+1}, d_t, d_{t+1})$
- využijúc vzťah (9) pre vývoj kapitálu a po dosadení za s z (14) máme: $s_t = (1 + g_N)k_{t+1}$
- špeciálne ak $u(c) = \ln c$, tak z (14) máme:

$$\frac{1}{w_t - s_t - d_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{(1 + r_{t+1})s_t + (1 + g_N)d_{t+1}}$$

- z čoho:

$$s_t = \frac{w_t - d_t}{2 + \theta} - \frac{(1 + \theta)(1 + g_N)}{(2 + \theta)(1 + r_{t+1})} d_{t+1} \tag{15}$$

KAPITÁLOVÝ SYSTÉM

- riešiac maximalizačnú úlohu pre kapitálový systém dostávame:

$$u'(w_t - s_t - d_t) = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} u'\big((1 + r_{t+1})(s_t + d_t)\big) \qquad (16)$$

  môžeme vyjadriť premennú $s_t + d_t$ z tejto rovnice
- využijúc vzťah (9) pre vývoj kapitálu a po dosadení za $s + d$ z (16) máme: $s_t + d_t = (1 + g_N)k_{t+1}$
- špeciálne ak $u(c) = \ln c$, tak z (16) máme:

$$\frac{1}{w_t - s_t - d_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{(1 + r_{t+1})(s_t + d_t)}$$

- z čoho:

$$s_t + d_t = \frac{w_t}{2 + \theta} \qquad (17)$$

- premenná $s + d$ predstavuje úspory mladých rovnako ako v predchádzajúcom, len tentokrát je časť d úspor určená štátom

USTÁLENÝ STAV

- pri značení ustáleného stavu tentokrát upustíme od hviezdičiek a budeme písať horný index P, ak pôjde o priebežný systém, a K, ak pôjde o kapitálový systém
- z rovníc (15) a (17) vyplýva:

$$s^P = \frac{w-d}{2+\theta} - \frac{(1+\theta)(1+g_N)}{(2+\theta)(1+r)}d$$

$$s^P + d = \frac{w}{2+\theta} + \frac{(1+\theta)(r-g_N)}{(2+\theta)(1+r)}d$$

resp.:

$$s^K = \frac{w}{2+\theta} - d$$

$$s^K + d = \frac{w}{2+\theta}$$

USTÁLENÝ STAV

- spotreba na hlavu mladých a starých v ustálenom stave:
  - priebežný systém:

$$c_1^P = w - s^P - d = \frac{1+\theta}{2+\theta}\left(w + \frac{g_N - r}{1+r}d\right)$$

$$c_2^P = (1+r)s^P + (1+g_N)d = \frac{1+r}{2+\theta}w + \frac{g_N - r}{2+\theta}d$$

  - kapitálový systém:

$$c_1^K = w - s^K - d = \frac{1+\theta}{2+\theta}w$$

$$c_2^K = (1+r)(s^K + d) = \frac{1+r}{2+\theta}w$$

ZÁVERY

- vidíme, že:

$$c_1^P = c_1^K + \frac{(1+\theta)(g_N - r)}{(2+\theta)(1+r)} d$$

$$c_2^P = c_2^K + \frac{g_N - r}{2+\theta} d$$

- o tom, či $c_1^P > c_1^K$, $c_2^P > c_2^K$ alebo naopak, rozhoduje rozdiel $g_N - r$
- ak $g_N > r$, tak $c_1^P > c_1^K$, $c_2^P > c_2^K$ a teda priebežný systém financovania dôchodkov je lepší
- ak $g_N < r$, tak $c_1^P < c_1^K$, $c_2^P < c_2^K$ a naopak kapitálový systém je lepší