DOMÁCA ÚLOHA č. 2

a) Vypočítajte súčasnú hodnotu (cenu v čase 0) P_0 akcie, ktorá nasledujúci rok prinesie dividendu $D_1 = D = 2$ p.j., ktorá počas ďalších štyroch rokov porastie rýchlosťou rastu $G = 0,2$ a od šiesteho roka počnúc táto rýchlosť klesne na $g = 0,1$. Uvažujte $r = 0,2$. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta. (**7 b.**)

Riešenie:

$D = 2$ p.j., $G = r = 0,2$, $g = 0,1$, $n = 5$, $P_0 =?$ p.j.

Vychádzajúc zo vzťahu na výpočet ceny akcie v čase 0:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

dostávame:

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D(1+r)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+r)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)(r-g)} \\ &= \frac{nD}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)(r-g)} \\ &= \frac{D}{1+r}\left(n + \frac{1+g}{r-g}\right). \end{aligned}$$

Čiže:

$$P_0 = \frac{2 \text{ p.j.}}{1,2}\left(5 + \frac{1,1}{0,1}\right) \doteq 26,67 \text{ p.j.}$$

b) Uvažujte trh s tromi rizikovými cennými papiermi α, β, γ takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:

	výnosnosť	**rizikovosť**
Cenný papier α	$r_\alpha = 5$	$\sigma_\alpha = 2$
Cenný papier β	$r_\beta = 7$	$\sigma_\beta = 3$
Cenný papier γ	$r_\gamma = 10$	$\sigma_\gamma = 5$

Nech kovariančná matica C výnosov cenných papierov (ktorej prvky sú uvádzané v percentách na druhú) je:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\alpha\gamma} & \sigma_{\beta\gamma} & \sigma_\gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

Zistite výnosnosť r a rizikovosť σ portfólia pozostávajúceho z cenných papierov α, β, γ, ak váhy jednotlivých cenných papierov sú: $x_\alpha = 0,2$, $x_\beta = 0,55$, $x_\gamma = 0,25$. Rozhodnite, či je takéto portfólio arbitrážne. Nájdite nezáporné váhy x_α^*, x_β^*, x_γ^* spĺňajúce $x_\alpha^* + x_\beta^* + x_\gamma^* = 1$, ktoré maximalizujú výnosnosť r^* arbitrážneho portfólia. Určte r^*. (**8 b.**)

Riešenie:
Ak $x_\alpha = 0,2$, $x_\beta = 0,55$, $x_\gamma = 0,25$, potom výnosnosť portfólia r dostaneme zo vzťahu:

$$r = x_\alpha r_\alpha + x_\beta r_\beta + x_\gamma r_\gamma = 5(0,2) + 7(0,55) + 10(0,25) = 1 + 3,85 + 2,5 = 7,35\%$$

Vychádzajúc zo vzťahu pre rizikovosť portfólia:

$$\sigma = \sqrt{(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)\, C\, (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)^T}$$

dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{4(0,2)^2 - 12(0,2)(0,55) + 20(0,2)(0,25) + 9(0,55)^2 - 30(0,55)(0,25) + 25(0,25)^2} \\
&= \sqrt{(2(0,2) - 3(0,55) + 5(0,25))^2} = |0,4 - 1,65 + 1,25| = 0\%
\end{aligned}$$

Pretože portfólio poskytuje kladnú výnosnosť pri nulovej rizikovosti, je to arbitrážne portfólio.

Váhy arbitrážnych portfólií dostaneme zo sústavy rovníc:

$$\begin{aligned}
x_\alpha + x_\beta + x_\gamma &= 1, \\
4x_\alpha - 6x_\beta + 10x_\gamma &= 0, \\
-6x_\alpha + 9x_\beta - 15x_\gamma &= 0, \\
10x_\alpha - 15x_\beta + 25x_\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Sústava má riešenie:

$$\begin{aligned}
x_\alpha &= 0,6 - 1,6p, \\
x_\beta &= 0,4 + 0,6p, \\
x_\gamma &= p,
\end{aligned}$$

kde $p \in \langle 0, 1\rangle$ je parameter.

Pretože aj hodnoty váh x_α, x_β musia byť z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, parameter p musí byť vybraný z intervalu $\langle 0; 0,375\rangle$.

Váhy x_α^*, x_β^*, x_γ^* budú potom tie, ktoré maximalizujú arbitrážnu výnosnosť:

$$5\,(0,6 - 1,6p^*) + 7\,(0,4 + 0,6p^*) + 10p^* = 5,8 + 6,2p^*$$

Výnosnosť maximalizuje $p^* = 0,375$ a preto $x_\alpha^* = 0$, $x_\beta^* = 0,625$, $x_\gamma^* = 0,375$ a $r^* = 8,125\%$.