DOMÁCA ÚLOHA č. 3

Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi **A**, **B** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:

	výnosnosť	**rizikovosť**
Cenný papier A	$r_A = 8$	$\sigma_A = 5$
Cenný papier B	$r_B = 12$	$\sigma_B = 10$

a) Vypočítajte kovarianciu výnosností cenných papierov **A** a **B**, ak korelačný koeficient ρ_{AB} výnosností cenných papierov **A**, **B** je postupne rovný -1, 0 a $0,3$. (**3 b.**)

Riešenie:

1) Ak $\rho_{AB} = -1$, potom kovariancia σ_{AB} výnosností cenných papierov **A** a **B**:

$$\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = -1.5.10 = -50.$$

2) Ak $\rho_{AB} = 0$, potom kovariancia σ_{AB} výnosností cenných papierov **A** a **B**:

$$\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.5.10 = 0.$$

3) Ak $\rho_{AB} = 0,3$, potom kovariancia σ_{AB} výnosností cenných papierov **A** a **B**:

$$\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0,3.5.10 = 15.$$

b) Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov **A**, **B** v dvoch portfóliach, pričom:
1) očakávaný výnos prvého portfólia je 11%,
2) pri korelačnom koeficiente ρ_{AB} výnosností cenných papierov **A**, **B** rovnom 0 je rizikovosť druhého portfólia 5%. (**4 b.**)

Riešenie:

1) Pretože výnos portfólia r_P dostaneme zo vzťahu:

$$r_P = x_A r_A + x_B r_B = x_A r_A + (1 - x_A) r_B$$

a $r_{P1} = 11$, tak máme:

$$11 = 8x_A + 12 - 12x_A$$

Z toho $x_A = 0,25$ a teda $x_B = 0,75$.

2) Ak $\rho_{AB} = 0$, potom kovariancia výnosností cenných papierov **A** a **B** je tiež rovná 0 a preto rizikovosť portfólia bude:

$$\sigma_P = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2} = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + (1 - x_A)^2\sigma_B^2}$$

Keďže $\sigma_{P2} = 5$, tak dostávame:

$$25 = 25x_A^2 + 100 - 200x_A + 100x_A^2$$

Po úprave:

$$5x_A^2 - 8x_A + 3 = 0$$

Vyriešením kvadratickej rovnice dostaneme $x_A = 0,6$ a teda $x_B = 0,4$ alebo $x_A = 1$ a teda $x_B = 0$.

c) Uvažujte, že váhy cenných papierov **A**, **B** môžu byť aj záporné čísla, resp. čísla väčšie ako jedna. Teda nech $x_A \in \mathbb{R}$, $x_B \in \mathbb{R}$ také, že $x_A + x_B = 1$. Nájdite x_A, x_B v portfóliu cenných papierov **A**, **B**, ktoré má nulovú rizikovosť. (**4 b.**)

Riešenie:

Napíšme rovnicu pre rizikovosť portfólia pozostávajúceho z cenných papierov **A** a **B** pre všeobecne zadané váhy $x_A \in \mathbb{R}$, $x_B = 1 - x_A \in \mathbb{R}$ jednotlivých cenných papierov v portfóliu:

$$\sigma = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2}. \tag{1}$$

Pretože má byť $\sigma = 0$, tak z (1) máme:

$$0 = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2}. \tag{2}$$

Aby rovnica (2) mohla platiť, tak váhy x_A, x_B musia byť také, že:

$$0 = x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2. \tag{3}$$

Upravujme rovnicu (3):

$$\begin{aligned} 0 &= x_A^2\sigma_A^2 + 2x_A(1-x_A)\sigma_{AB} + (1-x_A)^2\sigma_B^2, \\ 0 &= x_A^2(\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2) + 2x_A(\sigma_{AB} - \sigma_B^2) + \sigma_B^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Vidíme, že ide o kvadratickú rovnicu s premennou x_A. Táto rovnica má reálne riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant je väčší ako nula alebo rovný nule. Vypočítajme ho:

$$\begin{aligned} D &= 4(\sigma_{AB}^2 - 2\sigma_{AB}\sigma_B^2 + \sigma_B^4) - 4(\sigma_A^2\sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}\sigma_B^2 + \sigma_B^4), \\ D &= 4(\sigma_{AB}^2 - \sigma_A^2\sigma_B^2) = 4(\rho_{AB}^2\sigma_A^2\sigma_B^2 - \sigma_A^2\sigma_B^2), \\ D &= 4\sigma_A^2\sigma_B^2(\rho_{AB}^2 - 1) \le 0, \end{aligned}$$

kde posledná nerovnosť vyplýva z toho, že korelačný koeficient $\rho_{AB} \in \langle -1, 1\rangle$.

Z uvedeného vyplýva, že $\rho_{AB} = \pm 1$ a teda $\sigma_{AB} = \pm\sigma_A\sigma_B$.

Ak $\rho_{AB} = 1$, tak kvadratickú rovnicu (4) možno prepísať na tvar:

$$0 = x_A^2(\sigma_A - \sigma_B)^2 + 2x_A\sigma_B(\sigma_A - \sigma_B) + \sigma_B^2. \tag{5}$$

Rovnica (5) má jediný koreň:

$$x_A = \frac{2\sigma_B(\sigma_B - \sigma_A)}{(\sigma_A - \sigma_B)^2} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} = \frac{10}{5} = 2.$$

Odtiaľ dostávame, že $x_B = -1$.

Ak $\rho_{AB} = -1$, tak kvadratickú rovnicu (4) možno prepísať na tvar:

$$0 = x_A^2(\sigma_A + \sigma_B)^2 - 2x_A\sigma_B(\sigma_A + \sigma_B) + \sigma_B^2. \tag{6}$$

Rovnica (6) má jediný koreň:

$$x_A = \frac{2\sigma_B(\sigma_A + \sigma_B)}{(\sigma_A + \sigma_B)^2} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Odtiaľ máme $x_B = \frac{1}{3}$.