Obsah

Kapitola 1

Diferenciálny počet FVP

1.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

1. **Súčet vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **súčtom** nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m).$$

2. **Súčin skaláru a vektora**
   Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **súčinom skaláru** c a **vektora x** nazývame vektor

   $$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \dots, x_m) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

1. **Skalárny súčin vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **skalárnym súčinom** nazývame číslo (skalár)

   $$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m.$$

2. **Normu (absolútnu hodnotu) vektora**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **normou vektora x** nazývame číslo
$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}.$$

3. **Vzdialenosť bodov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **vzdialenosťou** nazývame číslo
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 1.1 *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *a* $\varepsilon > 0$. ***Epsilonovým okolím bodu a*** *nazývame množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. ***Prstencovým epsilonovým okolím bodu a*** *nazývame množinu* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.

V prípade $\mathbb{R}^1$ *definujeme aj epsilonové okolia* $\pm\infty$. *Množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* ∞. *Prstencové* ε*-ové okolie* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty)$ *definujeme predpisom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. *Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 1.2 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. *Budeme hovoriť, že bod* **a** *je* ***hromadným bodom množiny*** *A, ak v každom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a})$ *leží bod množiny A.*

Definícia 1.3 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$. ***Komplementom množiny*** *A nazývame množinu* $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.

Definícia 1.4 *Budeme hovoriť, že* ***množina*** $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ***je otvorená****, ak pre každé* $\mathbf{a} \in A$ *existuje* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva* ***uzavretá množina****.*

Veta 1.1 *Množina* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je otvorená práve vtedy, keď jej komplement* CA *je uzavretá množina.*

Definícia 1.5 *Budeme hovoriť, že* ***množina*** $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ***je ohraničená****, ak existuje* $\varrho > 0$ *také, že* $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.

1.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 1.6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *a* **a** *je hromadným bodom množiny A.*

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ *existuje* $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$ *také, že* $f(\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, *hovoríme, že* ***funkcia*** $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ ***má v bode a limitu b****. Píšeme* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 1.7 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, *budeme hovoriť, že* ***funkcia*** $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ ***je spojitá v bode*** $\mathbf{a}$.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je* ***spojitá na množine*** C.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in A$, *tak budeme hovoriť, že* ***funkcia*** f ***je spojitá.***

Veta 1.2 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 1.1 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *sú spojité funkcie a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
2. $(f+g) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
3. $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Veta 1.3 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
2. *ak* $b_2 \neq 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak*
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 1.2 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *sú spojité funkcie Potom*

1. $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*
2. *Ak* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak* $\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Definícia 1.8 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \to \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ *pre každé* $\mathbf{x} \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 1.4 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. *Potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Dôsledok 1.3 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj množiny* $C_2 \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limity všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)*

Veta 1.5 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj* $C_2 \subset A$. *Nech* $C_1 \cup C_2 = A$. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$, *potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Veta 1.6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ *je* $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.
- *Funkcia* g *je spojitá v bode* $\mathbf{b}$.

Potom $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 1.7 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *a funkcia* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $f(\mathbf{a})$. *Potom funkcia* $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Dôsledok 1.4 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Veta 1.8 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *práve vtedy, keď* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *pre* $i = 1, , \ldots, n$.

Veta 1.9 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie* $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dôsledok 1.5 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 1.9 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je funkcia a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. *Potom hovoríme, že* ***funkcia*** f ***má v bode*** $\mathbf{a}$ ***nevlastnú limitu****.*

Veta 1.10 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(-f(\mathbf{x})) = -\infty$.

Veta 1.11 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f + g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 1.12 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $k > 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f.g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 1.13 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Veta 1.14 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ *a pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) > 0$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 1.15 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $h : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Potom*

1. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, *tak v prípade existencie vlastných limít* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, *platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.
2. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, *tak existuje aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ *a platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.

1.2.1 Príklady

1. Nájdite a načrtnite definičný obor nasledujúcich funkcií:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$.

   $\left[D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 25\}\right]$.

   (b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.

   $\left[D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16\}\right]$.

   (c) $f(x,y) = \ln(-x - y)$.

   $\left[D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\}\right]$.

   (d) $f(x,y,z) = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

   $$\left[\begin{array}{l}\text{Jednodielny rotačný hyperboloid,}\\ D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 1\}\end{array}\right].$$

   (e) $f(x,y,z) = \arccos(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln(4 - z^2)$.

   $\left[D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -2 < z < 2\}\right]$.

   (f) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$.

   $\left[D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9\}\right]$.

2. Vypočítajme nasledujúce limity

   (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x}{x+y}$ .... $\left[\frac{2}{5}\right]$.
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
   (c) $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... $\left[\frac{3}{5}\right]$.
   (e) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... [neexistuje].
   (f) $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}$ .... $[-3]$.
   (g) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ .... $\left[\frac{3}{8}\right]$.
   (h) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{\sin x+2}{xy+2x-y}$ .... $\left[\frac{\sin 2+2}{7}\right]$.
   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ .... [0].
   (j) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$ .... $[\infty]$.
   (k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$ .... [0].
   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ .... [neexistuje].
   (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$, (polož $y=2x$ a $y=0$) ...... [neexistuje].
   (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, (polož $y=\sqrt{x}$ a $x=0$) .... [neexistuje].
   (o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, (polož $y=\sin x,$ alebo $y=x-x^2$) [neexistuje].
   (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$, (polož $x=\sqrt[3]{y^3-y}$) .... [neexistuje].
   (q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (polož $y=x^2$) .... [neexistuje].
   (r) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$ .... $\left[\frac{1}{4}\right]$.
   (s) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... $[\sqrt{2}]$.
   (t) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... [neexistuje].
   (u) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ .... [12].
   (v) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}}$ .... [12].
   (w) $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y}$ .... $\left[\frac{1}{8}\right]$.
   (x) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$ .... [e].
   (y) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ .... [1].

3. Vypočítajme nasledujúce limity

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... [1].

(b) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ . . . . [1] .

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{xy}$ . . . . [1] .

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$ . . . . [0] .

(e) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{y}$ . . . . [3] .

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{y}$ . . . . [0] .

(g) $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1}$ . . . . [1] .

(h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ . . . . [0] .

(i) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ . . . . [3] .

4. Nech

(a)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(b)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(c)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(d)

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{pre } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$. . . . . . [Je spojitá v $(0,0,0)$] .

(e)

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}, & \text{pre } x^3+y^3+z^3\neq 0,\\ 0, & \text{pre } x^3+y^3+z^3=0.\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$. . . . [Nie je spojitá v $(0,0,0)$] .

(f)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 2, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(g)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(h)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(i)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(j)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(6xy)}{y}, & \text{pre } y\neq 0,\\ \text{k}, & \text{pre } (x,y)=(x,0).\end{cases}$$

- Určte číslo k tak, aby táto funkcia bola spojitá v bode $(3,0)$.

  [$k=18$] .
- Je takto dodefinovaná funkcia spojitá aj v bode $(4,0)$?

  [Nie je spojitá v $(4,0)$] .

5. V nasledujúcich príkladoch je daná funkcia $f(x,y)$ a bod $\mathbf{a}$. Dodefinujte funkciu $f(x,y)$ v bode $\mathbf{a}$ tak, aby v tomto bode bola spojitá.

   (a) $f(x,y)=\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$, $\mathbf{a}=(0,0)$. . . . . [$f(0,0)=-6$] .

   (b) $f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, $\mathbf{a}=(2,2)$. . . . . $\left[f(0,0)=\frac{3}{8}\right]$.

   (c) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$, $\mathbf{a}=(0,0)$.

   [Funkcia sa nedá dodefinovať tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá] .

✠

1.3 Diferencovateľnosť funkcie

1.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 1.10 *1. Funkciu $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame* ***lineárna funkcia****, ak pre každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$ platí*

- $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$.

2. *Pre každé lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ existujú $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$ také, že*

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_m x_m.$$

Maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_m \end{bmatrix}$$

nazývame ***matica lineárneho zobrazenia*** *L.*

3. *$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky*

$$L_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ L_i(\mathbf{x}) = L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l_{i1} x_1 + l_{i2} x_2 + \ldots + l_{im} x_m$$

sú lineárne zobrazenia pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nm} \end{bmatrix}$$

nazývame matica lineárneho zobrazenia *L.*

4. *Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\,\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.*

1.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 1.11 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

Vtedy hovoríme, že ***funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$****. Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame (prvý)* ***diferenciál funkcie*** *f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.*

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že ***funkcia f je diferencovateľná na množine*** *M. Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je* ***diferencovateľná funkcia****.*

Poznámka 1.1 *Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Veta 1.16 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, že*

1. $p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. *Funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$. To znamená, že $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.*
3. *Pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|.$$

Veta 1.17 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 1.18 *Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina.) a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- *Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*
- *Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Veta 1.19 *Nech A je otvorená množina. Funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď v bode $\mathbf{a}$ sú diferencovateľné jej zložky $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Navyše v prípade diferencovateľnosti platí*

$$\mathcal{D}f(\mathbf{a}) = (\mathcal{D}f_1(\mathbf{a}), \mathcal{D}f_2(\mathbf{a}), \ldots, \mathcal{D}f_n(\mathbf{a})).$$

1.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 1.12 *1. Nech A je otvorená množina a $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$. Potom definujeme*

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A\} \quad \textit{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. *Budeme uvažovať o funkciách*

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A_i \to \mathbb{R},\ \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

   pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

3. *Nech existuje (vlastná) derivácia*

$$\begin{aligned}\varphi_i'(a_i) &= \lim_{t\to a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\ &= \lim_{t\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\ &= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\ &= f_{\cdot i}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

   Toto číslo nazývame ***parciálna derivácia funkcie*** f ***podľa*** i*-tej* ***premennej v bode*** $\mathbf{a}$.

4. *Nech* $B_i \subseteq A$ *je množina všetkých* $\mathbf{a} \in A$ *pre ktoré existuje* $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$. *Potom funkciu*

$$f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto f_{\cdot i}(\mathbf{x})$$

   nazývame parciálna derivácia funkcie f *podľa* i*-tej premennej.*

1.3.4 Príklady

Vypočítajme parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x,y) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right),\ f_{\cdot 1}(x,y) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y) = \frac{2}{y\sin\ \frac{2x}{y}},\quad f_{\cdot 2}(x,y) = \frac{-2x}{y^2\sin\ \frac{2x}{y}}\right].$

2. $f(x,y,z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5,\ f_{\cdot 1}(x,y,z) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y,z) = 3x^2y^2z + 2\right].$

3. $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}},\ f_{\cdot 2}(1,-3,4) = ?$

   $\left[f_{\cdot 2}(1,-3,4) = \frac{-1}{2}\right].$

4. $f(x,y) = \ln(\sin xy),\ f_{\cdot 2}(1,\frac{\pi}{2}) = ?$

   $\left[f_{\cdot 2}(1,\frac{\pi}{2}) = 0\right].$

5. $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy},\ f_{\cdot 1}(1,1) = ?,\ f_{\cdot 2}(2,1) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(1,1) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\ f_{\cdot 2}(2,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$

6. $f(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}$, $f_{\cdot 1}(x,y) = ?$, $f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y},\ f_{\cdot 2}(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right]$.

7. $f(x,y) = x^{xy}$, $f_{\cdot 1}(x,y) = ?$, $f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $[f_{\cdot 1}(x,y) = x^{xy}(\ln x + 1)y,\ f_{\cdot 2}(x,y) = x^{xy}x\ln x]$.

8. $f(x,y) = (\ln x)^{\cos y}$, $f_{\cdot 1}(x,y) = ?$, $f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y) = \cos y(\ln x)^{\cos y - 1}\cdot\frac{1}{x},\ f_{\cdot 2}(x,y) = (\ln x)^{\cos y}(-\sin y)\ln(\ln x)\right]$.

9. $f(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}$,
   $f_{\cdot 1}(x,y,z) = ?$, $f_{\cdot 2}(x,y,z) = ?$, $f_{\cdot 3}(x,y,z) = ?$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 1}(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}\left(3x^2\ln(\cos(x-y^2)) - \frac{x^3\sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)}\right), \\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}\frac{2x^3y\sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)}, \\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = e^{x^3\ln(\cos(x-y^2))} \end{array}\right].$$

10. $f(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}z$, $f_{\cdot 1}(x,y,z) = ?$, $f_{\cdot 2}(x,y,z) = ?$, $f_{\cdot 3}(x,y,z) = ?$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 1}(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)z, \\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = 0, \\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}} \end{array}\right].$$

11. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x - y, & \text{pre}(x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pre}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0) = 1,\ f_{\cdot 2}(0,0) = -1]$.

12. Nech $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0,\ f_{\cdot 2}(0,0) = 0]$.

13. Nech

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre}(x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{pre}(x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

   Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0,0)$, $f_{\cdot 3}(0,0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0,0) = \infty,\ f_{\cdot 2}(0,0,0) = -\infty,\ f_{\cdot 3}(0,0,0) = \text{neexistuje}]$.

14. Nech $f(x,y) = (x^2 + y)\sin(x + y)$. Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,\pi)$, $f_{\cdot 2}(0,\pi)$.

    $[f_{\cdot 1}(0,\pi) = -\pi,\ f_{\cdot 2}(0,\pi) = -\pi]$.

15. Nech $f(x,y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$. Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(1,2)$, $f_{\cdot 2}(1,2)$.

    $[f_{\cdot 1}(1,2) = 24,\ f_{\cdot 2}(1,2) = 9]$.

16. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{pre}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pre}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0)$.

    $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0,\ f_{\cdot 2}(0,0) = 0]$.

✠

Veta 1.20 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a navyše*

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_{\cdot 1}(\mathbf{a})x_1 + f_{\cdot 2}(\mathbf{a})x_2 + \ldots + f_{\cdot m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 1.21 *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Dôsledok 1.6 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech parciálne derivácie $(f_j)_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

1.3.5 Príklady

1. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1, 2$,

- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$\left[f_{\cdot i}(0,0)\text{neexistujú. Nie je spojitá, a teda ani diferencovateľná, v } (0,0)\right].$

2. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0), \text{pre } i=1,2,$
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   $\left[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ nie je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

3. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0), \text{pre } i=1,2,$
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   $\left[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ nie je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

4. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0), \text{pre } i=1,2,$
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   $\left[f_{\cdot 1}(0,0)=1=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

5. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0), \text{pre } i=1,2,$
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   $$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ je spojitá, je diferencovateľná v } (0,0),\\ \text{parciálne derivácie nie sú spojité v } (0,0)\end{array}\right].$$

6. Nech $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

[$f_{\cdot 1}(0,0) = 1 = f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$].

7. Nech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1, 2$,
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   [$f_{\cdot 1}(0,0), f_{\cdot 2}(0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0)$].

8. Nech $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Vyšetrite:

   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0,0)$, pre $i = 1, 2, 3$,
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0,0)$.

   [$f_{\cdot 1}(0,0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0,0)$, $f_{\cdot 3}(0,0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0,0)$].

9. Nech
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

   Vyšetrite: diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{nie je spojitá v } (0,0,0), \\ f_{\cdot 1}(0,0,0) = \infty,\ f_{\cdot 2}(0,0,0) = -\infty,\ f_{\cdot 3}(0,0,0) = \text{neexistuje}, \\ \text{Nie je diferencovateľná v } (0,0,0). \end{array}\right].$$

✠

1.3.6 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$$
odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a})$.

2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:
$$z = f(a,b) + f_{\cdot 1}(a,b)(x-a) + f_{\cdot 2}(a,b)(y-b)$$
   je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a,b,f(a,b))$.

1.3.7 Príklady

1. Vypočítajme približnú hodnotu $(1,94)^2 e^{0,12}$.................. $[4,24]$.
2. Vypočítajme približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3$. ... $[434,592]$.
3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2y$ v bode $T = (1,1,?)$.
$$\left[\begin{array}{l} \text{dotyková rovina:} \quad z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1), \\ \text{normála:} \quad x = 1 + 4t,\ y = 1 + 2t,\ z = 3 - t \end{array}\right].$$
4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1,?,2)$.................. $[z = 2 + 5(x-1) + y]$.
5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = xy$ v bode $T = (?,2,2)$.
$$\left[\begin{array}{l} \text{dotyková rovina:} \quad z = 2 + 2(x-1) + (y-2), \\ \text{normála:} \quad x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 2 - t \end{array}\right].$$
6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1,-1,1)$........................ $\left[z = 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+1)\right]$.
7. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2,-3,1)$. $[z = 1 + (x-2) + 2(y+3)]$.

1.3.8 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 1.22 *(Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí*

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]\,.$$

Nech
$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, f_2, \dots, f_n),\ \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \end{array}$$

Potom
$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{\cdot 1}(\mathbf{b}), g_{\cdot 2}(\mathbf{b}), \dots, g_{\cdot n}(\mathbf{b})]\,.$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{1\cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{1\cdot m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{n\cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{n\cdot m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g \circ f)_{\cdot k}(\mathbf{a}) = (g_{\cdot 1}(\mathbf{b}) f_{1\cdot k}(\mathbf{a}) + g_{\cdot 2}(\mathbf{b}) f_{2\cdot k}(\mathbf{a}) + \ldots + g_{\cdot n}(\mathbf{b}) f_{n\cdot k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2}\frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \ldots + \frac{\delta g}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

1.3.9 Príklady

1. Nech $f : (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty,\infty) \times (0,1)$, $f(x,y) = (\ln x, \cos y)$ a $g : (-\infty,\infty) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}, 1\right)$. Nájdite maticu $[\mathcal{D}h(\mathbf{a})]$ diferenciála zloženej funkcie $h = g \circ f : (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ v ľubovoľnom bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\left[\begin{array}{l}
f(\mathbf{a}) = (\ln a_1, \cos a_2) = (b_1, b_2) = \mathbf{b}, \\
g(\mathbf{b}) = g(b_1, b_2) = \left((\ln a_1)\cos a_2, \frac{\ln a_1}{\cos a_2}, 1\right), \\
[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & -\sin a_2 \end{bmatrix}, \\
[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \\ \frac{1}{b_2} & \frac{-b_1}{b_2^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))] = \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\mathcal{D}h(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \\
= \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \cos a_2 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} \frac{\cos a_2}{a_1} & -(\ln a_1)\sin a_2 \\ \frac{1}{a_1 \cos a_2} & \frac{(\ln a_1)\sin a_2}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}\right].$$

1.3.10 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získavame parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 4} = f_{\cdot 24} = \frac{\delta}{\delta x_4}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 2} = f_{\cdot 22} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta {x_2}^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f_{\cdot 24})_{\cdot 3} = (f_{\cdot 243}) = \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}\right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradia derivovania.

Veta 1.23 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech existujú $f_{\cdot 1} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$, $f_{\cdot 2} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech funkcia $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f_{\cdot 21}(\mathbf{a})$ a platí*

$$f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) = f_{\cdot 21}(\mathbf{a}).$$

Veta 1.24 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k-tého rádu ($2 \leq k \leq r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 1.13 *Ak **funkcia** $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane, tak hovoríme, že **je r-razy spojito diferencovateľná**.*

1.3.11 Príklady

1. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x,y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\left(\frac{(\ln x+1)^2}{y} + \frac{1}{x}\right), \\ f_{\cdot 12}(x,y) = f_{\cdot 21}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x(\ln x+1)\ln x}{y^2}\right), \\ f_{\cdot 22}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\frac{(x\ln x)^2}{y^3} \end{array}\right].$$

2. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2).$$
$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y,z)=\frac{2(x^2+y^2+z^2)-4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 12}(x,y,z)=f_{\cdot 21}(x,y,z)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 13}(x,y,z)=f_{\cdot 31}(x,y,z)=\frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 22}(x,y,z)=\frac{2(x^2+y^2+z^2)-4y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 23}(x,y,z)=f_{\cdot 32}(x,y,z)=\frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 33}(x,y,z)=\frac{2(x^2+y^2+z^2)-4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{array}\right].$$

3. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x,y,z)=2^{xyz}.$$
$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y,z)=2^{xyz}\left(yz\ln 2\right)^2, \\ f_{\cdot 12}(x,y,z)=f_{\cdot 21}(x,y,z)=z(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2+1\right), \\ f_{\cdot 13}(x,y,z)=f_{\cdot 31}(x,y,z)=y(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2+1\right), \\ f_{\cdot 22}(x,y,z)=2^{xyz}\left(xz\ln 2\right)^2, \\ f_{\cdot 23}(x,y,z)=f_{\cdot 32}(x,y,z)=x(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2+1\right), \\ f_{\cdot 33}(x,y,z)=2^{xyz}\left(xy\ln 2\right)^2 \end{array}\right].$$

4. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$
Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. . . . $[f_{\cdot 12}(0,0)=-1,\ f_{\cdot 21}(0,0)=1]$.

5. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$
Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. . . . . $[f_{\cdot 12}(0,0)=0,\ f_{\cdot 21}(0,0)=1]$.

6. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$
Vypočítajme $f_{\cdot 1}(x,y)$ a $f_{\cdot 12}(x,y)$ pre každé $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$\left[\begin{array}{rl} f_{\cdot 1}(x,y)=\frac{6x^3+6xy^2-4x^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{pre } (x,y)\neq 0,\ f_{\cdot 1}(0,0)=2, \\ f_{\cdot 12}(x,y)=\frac{-12x^3y-12xy^3+16x^4y}{(x^2+y^2)^3} & \text{pre } (x,y)\neq 0,\ f_{\cdot 12}(0,0)=\text{neexistuje} \end{array}\right].$$

7. Nech

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$.

$[f_{\cdot 12}(0,0)=0,\ f_{\cdot 21}(0,0)=0]$.

1.3.12 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}\in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e}=(e_1,e_2,\ldots,e_m)\in\mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau>0$ také, že pre každé $t\in(-\tau,\tau)$ platí $\mathbf{a}+\mathbf{e}t\in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h:\mathbb{R}\supseteq(-\tau,\tau)\to A\subseteq\mathbb{R}^m,\ h(t)=\mathbf{a}+\mathbf{e}t=(a_1+e_1t,a_2+e_2t,\ldots,a_m+e_mt)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r=(f\circ h):\mathbb{R}\supseteq(-\tau,\tau)\to A\subseteq\mathbb{R},\ r(t)=f(h(t))=f(\mathbf{a}+\mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{r(t)-r(0)}{t-0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0)=&f_{\cdot 1}(h(0))h_1'(0)+f_{\cdot 2}(h(0))h_2'(0)+\cdots+f_{\cdot m}(h(0))h_m'(0)\\ &=f_{\cdot 1}(\mathbf{a})e_1+f_{\cdot 2}(\mathbf{a})e_2+\cdots+f_{\cdot m}(\mathbf{a})e_m\\ &=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\ldots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))\cdot(e_1,e_2,\ldots,e_m)\\ &=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\ldots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))\cdot\mathbf{e}\\ &=f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Číslo $r'(0)=f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame **derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ vo smere** (jednotkového) **vektora $\mathbf{e}$**.

Vektor $(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\ldots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))$ nazývame **gradient funkcie** f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a})=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\ldots,f_{\cdot m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárného súčinu vyplýva, že

$$|f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \leq |\text{grad } f(\mathbf{a})||\mathbf{e}| = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|} = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

1.3.13 Príklady

1. Nech $f(x,y) = e^{xy^2}$, $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$. Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1)$.

   $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-8e^4)\right]$.

2. Nech $f(x,y) = e^y\cos(x+y)$, $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$. Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2},0)$.

   $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2},0) = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right]$.

3. Nech $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ a $\mathbf{a} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}\right)$.

   (a) Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ vo smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$. .... $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}\right) = e_1 + e_2\right]$.

   (b) Zistime, v ktorom smere je derivácia

   - nulová.............. $\left[\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$,
   - najväčšia .... $\left[\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$,
   - najmenšia.......................... $\left[\mathbf{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

4. Nájdime jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x,y,z) = y^2\sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a} = (1,1,\pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. ... $\left[\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi,-\pi,-1), f_{\cdot\mathbf{e}} = \sqrt{1+2\pi^2}\right]$.

5. Nech $f(x,y) = x^2 - 2xy + x - y^2 + 3y$. Nájdime bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. .... $\left[(\frac{1}{2},1)\right]$.

6. Nech
$$f(x,y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}.$$
Nájdime gradient a diferenciál tejto funkcie v bode $\mathbf{a} = (-1,1)$.
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(-1,1) = \left(\frac{24}{343}, \frac{-32}{343}\right), \\ \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1,x_2) = \frac{24}{343}x_1 - \frac{32}{343}x_2 \end{array}\right].$$

1.3.14 Lokálne extrémy

Definícia 1.14 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in A$.*

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***rýdze lokálne maximum****.*

2. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***rýdze lokálne minimum****.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***lokálne maximum****.*

2. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***lokálne minimum****.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémy.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ ***totálne (globálne) maximum****.*

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ ***totálne (globálne) minimum****.*

Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrémy, nadobúda aj lokálne extrémy.

Veta 1.25 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$.*

2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

3. *Funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálny extrém.*

Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Poznámka 1.2 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná, tak nezáleží na poradí derivovania v parciálnych deriváciach druhého rádu.*

Definícia 1.15 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A *a* $\mathbf{a} \in A$. *Potom definujem* ***druhý diferenciál funkcie*** f *ako funkciu*

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$

To znamená, že hodnota druhého diferenciálu je homogénny polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= f_{\cdot 11}(\mathbf{a}) x_1 x_1 + f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) x_1 x_2 + \ldots + f_{\cdot 1m}(\mathbf{a}) x_1 x_m + \\ &\quad + f_{\cdot 21}(\mathbf{a}) x_2 x_1 + f_{\cdot 22}(\mathbf{a}) x_2 x_2 + \ldots + f_{\cdot 2m}(\mathbf{a}) x_2 x_m + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + f_{\cdot m1}(\mathbf{a}) x_m x_1 + f_{\cdot m2}(\mathbf{a}) x_m x_2 + \ldots + f_{\cdot mm}(\mathbf{a}) x_m x_m \end{aligned}$$

Je zrejmé, že v tomto polynóme platí

$$f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) = f_{\cdot ji}(\mathbf{a}).$$

Veta 1.26 *(Taylorova veta) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A *a nech pre každé* $t \in \langle 0, 1 \rangle$ *je* $(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) \in A$. *Potom existuje* $t \in (0, 1)$ *také, že*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$

Vo všeobecnosti homogénny polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1m} x_1 x_m + \\ &\quad + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + \ldots + a_{2m} x_2 x_m + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + a_{m1} x_m x_1 + a_{m2} x_m x_2 + \ldots + a_{mm} x_m x_m \end{aligned}$$

V tomto polynóme platí $a_{ij} = a_{ji}$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Definícia 1.16 *Nech*

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \textit{pre} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

je homogénny polynóm druhého stupňa m*-premenných (symetrická kvadratická forma). Ak*

1. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \geq 0$ *, tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je kladne semidefinitný.***

2. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) > 0$*, tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je kladne definitný.***

3. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \leq 0$ *, tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ *je* ***záporne semidefinitný.***

4. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) < 0$*, tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je záporne definitný.***

5. *existujú* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^m$ *také, že* $P(\mathbf{x_1})P(\mathbf{x_2}) < 0$*, tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je indefinitný.***

Pri riešení príkladov je veľmi užitočná veta, ktorá hovorí o vzťahu definitnosti a semidefinitnosti symetrických homogénnych polynómov druhého stupňa. Sformulujeme ju pomocou matice priradenej k danému polynómu.

Vo všeobecnosti homogénny polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2m}x_2x_m + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{m1}x_mx_1 + a_{m2}x_mx_2 + \ldots + a_{mm}x_mx_m, \end{aligned}$$

a teda je mu priradená matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Veta 1.27 *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne (záporne) definitný práve vtedy, keď* $\mathbf{A}$ *je regulárna matica (t.j.* $\det\ \mathbf{A} \neq 0$*) a súčasne* $P(\mathbf{x})$ *je kladne (záporne) semidefinitný polynóm.*

S každou symetrickým homogénnym polynómom druhého stupňa sú spojené nasledujúce determinanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{pre} \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Veta 1.28 *(Sylvestrovo kritérium) Nech je symetrický homogénny polynóm druhého stupňa* $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$.

1. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne definitný práve vtedy, keď* $\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \ldots, m$.
2. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne definitný práve vtedy, keď* $(-1)^k\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \ldots, m$.

Zo Sylvestrovho kritéria a Vety 1.27 vyplýva

Dôsledok 1.7 *Ak* $\Delta_m \neq 0$ *a polynóm* $P(\mathbf{x})$ *nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 1.29 *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A. *Nech pre* $\mathbf{a} \in A$ *platí* $\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. *Potom*

1. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je kladne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*
2. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je záporne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*
3. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je indefinitný, tak funkcia* f *nemá v bode* $\mathbf{a}$ *extrém.*

Definícia 1.17 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že* A *je* ***kompaktná množina****.*

Veta 1.30 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá na kompaktnej množine* A. *Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú* $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ *také, že pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

1.3.15 Príklady

1. Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy nasledujúcich funkcií:

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.
   $$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0), \text{ nemá extrém}, \\ \mathbf{b} = (-1,-1), \text{ rýdze lokálne maximum } f(\mathbf{b}) = 3 \end{array}\right].$$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^3$.
   $[\mathbf{a} = (0,0), \text{ nemá extrém}]$.

   (c) $f(x, y) = x^2 + y^4$.
   $[\mathbf{a} = (0,0), \text{ rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0]$.

(d) $f(x,y) = x^2(1+y^2)$.
$[\mathbf{a} = (0,y),\ \text{lokálne minimum } f(0,y) = 0]$.

(e) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (0,-1),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{b} = (2,1),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(2,1) = -7 \end{bmatrix}$.

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.
$[\mathbf{a} = (1,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(1,0) = -1]$.

(g) $f(x,y) = \frac{xy}{2} + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
$[\mathbf{a} = (21,20),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(21,20) = 282]$.

(h) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (1,4),\ \mathbf{b} = (1,-4),\ \mathbf{c} = \left(\frac{-5}{3},0\right),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{d} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0 \end{bmatrix}$.

(i) $f(x,y) = xy(2-x-y)$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (0,0),\ \mathbf{b} = (0,2),\ \mathbf{c} = (2,0),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{d} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\ \text{rýdze lokálne maximum } f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \end{bmatrix}$.

(j) $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, \quad x > 0,\ y > 0$.
$\left[\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2},\frac{4}{5}\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{5}{2},\frac{4}{5}\right) = 30\right]$.

(k) $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0, \\ \mathbf{b} = (\frac{-1}{4},\frac{-1}{2}),\ \text{nemá extrém} \end{bmatrix}$.

(l) $f(x,y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$.
$\left[\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2},-1\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{1}{2},-1\right) = \frac{-e}{2}\right]$.

(m) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0, \\ \mathbf{b} = (0,1),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(0,1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{c} = (0,-1),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(0,-1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{d} = (1,0),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{e} = (-1,0),\ \text{nemá extrém} \end{bmatrix}$.

(n) $f(x,y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y)$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = \left(\frac{3}{10},\frac{-1}{5}\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{3}{10},\frac{-1}{5}\right) = \frac{27}{12400}, \\ \mathbf{b}_x = (x,0),\ \text{pre } x > \frac{3}{4} \text{ lokálne maximum } f(x,0) = 0, \\ \mathbf{c}_y = (0,y),\ \text{pre } y < \frac{1}{2} \text{ lokálne maximum } f(0,y) = 0, \\ \mathbf{d}_x = (x,0),\ \text{pre } x < \frac{3}{4} \text{ lokálne minimum } f(x,0) = 0, \\ \mathbf{e}_y = (0,y),\ \text{pre } y > \frac{1}{2} \text{ lokálne minimum } f(0,y) = 0, \\ \mathbf{f} = (\frac{3}{4},0),\ \mathbf{g} = (0,\frac{1}{2}) \text{ nemá extrém} \end{bmatrix}$.

(o) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} = (0,0,-1),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{b} = (24,-144,-1),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(24,-144,-1) = -6913 \end{bmatrix}$.

(p) $f(x,y,z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$.
$[\mathbf{a} = (8,5,-2),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(8,5,-2) = 9]$.

(q) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6.$
$\left[\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2),\ \text{rýdze lokálne minimum},\ f(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2) = \frac{-1}{3}\right].$

(r) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$
$[\mathbf{a} = (0,0,0),\ \text{nemá extrém}].$

(s) $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1.$
$[\mathbf{a} = (0,0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum},\ f(0,0,0) = 1].$

(t) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$
$[\mathbf{a} = (-1,-2,3),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(-1,-2,3) = -14].$

(u) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz.$
$[\mathbf{a} = (2,1,7),\ \text{nemá extrém}].$

(v) $f(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz.$
$\left[\mathbf{a} = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}),\ \text{nemá extrém}\right].$

(w) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z.$
$\left[\mathbf{a} = (\frac{-1}{2}, -1, 1),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(\frac{-1}{2}, -1, 1) = \frac{-11}{4}\right].$

(x) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$
$\left[\mathbf{a} = (\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1) = \frac{-4}{3}\right].$

2. Nájdime (totálne, globálne) extrémy funkcií:

(a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množine $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničená
priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0\}.$
$[-19 \le f(x,y) \le -1].$

(b) $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ na trojuholníku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6\}.$
$\left[-128 \le f(x,y) \le \frac{1}{4}\right].$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2\}.$
$[-1 \le f(x,y) \le 13].$

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16)$ na množine $A = \{(x,y) \mid\ x^2 + y^2 \le 49\}.$
$[-20 \le f(x,y) \le 149].$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x,y) \mid\ x^2 + y^2 \le 25\}.$
$[0 \le f(x,y) \le 5].$

3. Nájdite lokálne extrémy funkcie:

$$f(x,y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (-1,-1),\ \text{rýdze lokálne maximum}\ f(-1,-1) = 0, \\ \mathbf{b} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}),\ \text{nemá extrém} \end{array}\right].$$

Kapitola 2

Fourierove rady

Definícia 2.1 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a+l\rangle \subseteq A$. Potom nekonečný funkcionálny rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right)\right)$$

taký, že

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right)\, dx \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right)\, dx \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sa nazýva ***trigonometrický Fourierov rad funkcie*** $f : A \to \mathbb{R}$ ***pre interval*** $\langle a, a+l\rangle$.

Definícia 2.2 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a+l\rangle \subseteq A$. Potom funkciu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takú, že*

1. $\bar{f}(a) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to a+} f(x) + \lim\limits_{x\to(a+l)-} f(x)\right)$,
2. $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to x+} f(t) + \lim\limits_{t\to x-} f(t)\right), \quad$ *pre každé* $\quad x \in (a, a+l)$,
3. $\bar{f}(x) = \bar{f}(x+l) \quad$ *pre každé* $\quad x \in \mathbb{R}$,

nazývame ***normalizované periodické pokračovanie funkcie*** $f : A \to \mathbb{R}$ ***pre interval*** $\langle a, a+l\rangle$.

Veta 2.1 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. *Je po čiastkach spojitá na intervale* $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$.
2. *Funkcia* f *je na intervale* $\langle a, a+l \rangle$ *po čiastkach spojito diferencovateľná. To znamená, že jej derivácia* f' *je na intervale* $\langle a, a+l \rangle$ *po čiastkach spojitá.*
3. *Nech* $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je normalizované periodické pokračovanie funkcie* $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l \rangle$.

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) dx \quad pre \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) dx \quad pre \quad n = 1, 2, \ldots.$$

To znamená, že za uvedených podmienok je trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l \rangle$ *konvergentný a jeho súčtom je normalizované periodické pokračovanie funkcie* $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l \rangle$.

2.0.16 Príklady

Časť I

1.
   - Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
   - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   - Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\[2ex] b_n & = & \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] \bar{f}(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \\[2ex] \frac{\pi}{4} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

2. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ pre interval $\langle -1, 1\rangle$.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{1}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array}\right].$$

3. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ pre interval $\langle 0, 1\rangle$.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{-1}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi} \sin(n2\pi x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array}\right].$$

4. • Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ rozviňme na intervale $(0, 1)$ do kosínusového radu.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}P(x) & = & \frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

5. • Funkciu

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{pre } x\in(-\infty,\frac{\pi}{2}\rangle, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } x\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right) \end{cases}$$

rozviňme na intervale $(0,\pi)$ do kosínusového radu.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{3\pi}{4}, \\ a_n & = & \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right), \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}_P(x) & = & \frac{3\pi}{8}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos(nx) \end{array}\right].$$

6. • Funkciu

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{pre } x\in(-\infty,\frac{\pi}{2}\rangle, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } x\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right) \end{cases}$$

rozviňme na intervale $(0,\pi)$ do sínusového radu.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\ldots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}_N(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin(nx) \end{array}\right].$$

Časť II

1. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$ pre interval $\langle 1,3\rangle$.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Pomocou priameho výpočtu overme, že $\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = 5$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & 10, \\ a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x), \\ \bar{f}(1) & = & 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi) = 5, \\ \bar{f}(3) & = & 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(3n\pi) = 5 \end{array}\right].$$

2.
- Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$ pre interval $\langle 0, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{1}{2n}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \sin(n2x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array}\right].$$

3.
- Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$ rozviňme na intervale $(0, \pi)$ do kosínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0, \\ a_n & = & \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}_P(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

4. • Funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\pi-2x}{4}$ rozviňme na intervale $(0,\pi)$ do sínusového radu.
   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\ldots, \\ b_n & = & \frac{1+(-1)^n}{2n}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}_N(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}\sin(nx), \end{array}\right].$$

5. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ pre interval $\langle -1,1\rangle$.
   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
   • Pomocou hodnoty $\bar{f}(1)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

6. • Pre interval $\langle 0,\pi\rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{pre } x\in\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right\rangle, \\ \pi-x, & \text{pre } x\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right) \end{cases}.$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{\pi}{2} \\ a_n & = & \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos(2nx), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

7.
- Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-|x|$ pre interval $\langle -1,1\rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{4} & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} \end{array}\right].$$

8.
- Pre interval $\langle -2,2\rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -1, & \text{pre } x\in(-\infty,0\rangle, \\ 1, & \text{pre } x\in(0,\infty) \end{cases}.$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
- Presvedčme sa, že $\bar{f}(0)=0$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n & = & \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \bar{f}(0) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(0) = 0 \end{array}\right].$$

9. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{\pi}{2}, \\ a_n & = & \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right), \\ \frac{-\pi^2}{4} & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^2} \end{array}\right].$$

10. • Pre interval $\langle 1, 3 \rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty, 2\rangle, \\ 3 - x, & \text{pre } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Ak vieme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, tak ukážme, že $\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{3}{2}, \\ a_n & = & \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\ldots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^n}{\pi n}, \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(n\pi x) \right), \\ \bar{f}(1) & = & \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(n\pi) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(n\pi) \right) = \\ & = & \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} (-1)^n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \bar{f}(3) & = & \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(3n\pi) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(3n\pi) \right) = \\ & = & \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} (-1)^n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

11. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvinieme do Fourierovho radu funkciu

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x > 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \\ -1, & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n & = & \frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{n\pi} \sin nx, \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array}\right].$$

12. • Na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ rozvinieme do Fourierovho radu funkciu

$$f : \langle -1, 1 \rangle \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } -1 \le x \le 0, \\ 2 - x, & \text{pre } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Aký vzťah dostaneme pre $x = 1$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 &=& \frac{3}{2}, \\[2ex] a_n &=& \frac{\left((-1)^{n+1}+1\right)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] b_n &=& \frac{\left((-1)^{n+1}+2\right)}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] \bar{f}(x) &=& \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left((-1)^{n+1}+1\right)}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + \frac{\left((-1)^{n+1}+2\right)}{n\pi} \sin n\pi x \right), \\[2ex] \frac{\pi^2}{8} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

13. - Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 - x$ rozviňme na intervale $(0, 1)$ do sínusového radu.
    - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    - Pomocou hodnoty $\bar{f}_N\left(\frac{1}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\[2ex] b_n &=& \frac{2\left((-1)^{n+1}+2\right)}{n\pi}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] \bar{f}_N(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1)^{n+1}+2\right)}{n\pi} \sin(\pi n x), \\[2ex] \frac{\pi}{4} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \end{array}\right].$$

14. - Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
    - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    - Pomocou hodnoty $\bar{f}\,(\pi)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 &=& \frac{2\pi^2}{3}, \\[2ex] a_n &=& \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] b_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\[2ex] \bar{f}(x) &=& \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \\[2ex] \frac{\pi^2}{6} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{array}\right].$$

15. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 2 \rangle$.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{8}{3}, \\ a_n & = & \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{4}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \frac{\pi^2}{12} & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{array}\right].$$

16. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 0 \rangle$.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{8}{3}, \\ a_n & = & \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ b_n & = & \frac{4}{(n\pi)}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{4}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) + \frac{4}{(n\pi)} \sin(n\pi x) \right), \\ \frac{\pi^2}{6} & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{array}\right].$$

17. • Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ rozviňme na intervale $(0, 2)$ do sínusového radu.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Ak vieme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$, tak pomocou hodnoty $\bar{f}_N(1)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 0,1,2,\dots, \\ b_n &=& \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}, \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\dots, \\ \bar{f}_N(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \frac{\pi^3}{32} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \end{array}\right].$$

Náročnejšie príklady

1. • Pre interval $\langle -1, 1\rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \pi x}{|\cos \pi x|}, & \text{pre } x \neq \frac{2k-1}{2}, \\ 0, & \text{pre } x = \frac{2k-1}{2} \end{cases}.$$

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}\,(0)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 &=& 0, \\ a_n &=& \frac{4}{\pi n}\left(\sin \frac{\pi n}{2}\right), \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\dots, \\ b_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cos(2k-1)\pi x, \\ \frac{\pi}{4} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array}\right].$$

2. • Na intervale $\langle 0, 2\rangle$ rozvinieme do Fourierovho radu funkciu

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{pre } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0, & \text{pre } x \in (1, 2\rangle \end{cases}$$

• Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

• Pomocou hodnoty $\bar{f}\,(1)$ nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& \frac{2}{\pi(1-4n^2)}, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\[2ex] b_n &=& \frac{(-1)^n 4n}{\pi(1-4n^2)}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\[2ex] \bar{f}(x) &=& \frac{1}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(1-4n^2)} \left(2\cos n\pi x + (-1)^n 4n \sin n\pi x\right), \\[2ex] \frac{\pi-2}{4} &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \end{array}\right].$$

3. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   • Aký vzťah dostaneme pre $x = \frac{\pi}{2}$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\[2ex] b_n &=& \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2}, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\[2ex] \bar{f}(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2}\right) \sin nx = \\[2ex] &=& \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\right) \sin(2k-1)x, \\[2ex] \frac{\pi^2}{8} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

4. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvinieme do Fourierovho radu periodickú funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 2π, ktorá je definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{pre } x \in \langle -\pi, \frac{-\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ 0, & \text{pre } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   • Aký vzťah dostaneme pre $x = 0$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_0 &=& 2, \\[2ex] a_n &=& \frac{-4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\[2ex] b_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots, \\[2ex] \bar{f}(x) &=& 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos nx, \\[2ex] \frac{-\pi}{4} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \end{array}\right].$$

5. • Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |\cos x|$ pre interval $\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   • Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}\,(0)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nx, \\ \frac{\pi-2}{4} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \end{array}\right].$$

6. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvinieme do Fourierovho radu periodickú funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 2π, pričom

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{pre } x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & \text{pre } x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   • Pomocou hodnoty $\bar{f}\,(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)}, \quad \text{pre} \quad n = 0, 2, 3, \ldots, \\ a_1 & = & 0, \\ b_1 & = & \frac{1}{2}, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre} \quad n = 2, 3, \ldots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)} \cos nx, \\ \frac{1}{2} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \end{array}\right].$$

7. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ pre interval $\langle -2, 2 \rangle$.
   • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   • Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(2)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& \frac{2(-1)^n\left(e^2-e^{-2}\right)}{4+n^2\pi^2}, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\ldots, \\ b_n &=& \frac{(-1)^{n+1}n\pi\left(e^2-e^{-2}\right)}{4+n^2\pi^2}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}(x) &=& \frac{\left(e^2-e^{-2}\right)}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n\left(e^2-e^{-2}\right)}{4+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}n\pi\left(e^2-e^{-2}\right)}{4+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \bar{f}(2) &=& \frac{\left(e^2+e^{-2}\right)}{2} = \frac{\left(e^2-e^{-2}\right)}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\left(e^2-e^{-2}\right)}{4+n^2\pi^2}\cos n\pi, \\ 0.1343286 &=& \frac{e^2+3e^{-2}}{8(e^2-e^{-2})} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^2\pi^2} \end{array}\right].$$

8. - Funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2e^{-x}$ rozviňme na intervale $(0,1)$ do kosínusového radu.
   - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
   - Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& \frac{4\left(1-(-1)^n e^{-1}\right)}{1+n^2\pi^2}, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\ldots, \\ b_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}_P(x) &=& 2\left(1-e^{-1}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(1-(-1)^n e^{-1}\right)}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x, \\ \frac{1}{2} &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e-(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \end{array}\right].$$

9. - Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ pre interval $\langle-\pi,\pi\rangle$.
   - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\ldots, \\ b_n &=& \frac{2n(-1)^{n+1}\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\ldots, \\ \bar{f}(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^{n+1}\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}\sin nx \end{array}\right].$$

10. - Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\left(\sqrt{2}x\right)$ pre interval $\langle-\pi,\pi\rangle$.
    - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
    - Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}\,(0)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)(-1)^n 2\sqrt{2}}{\pi(2-n^2)}, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\dots, \\ b_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) &=& \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)}{\sqrt{2}\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)(-1)^n 2\sqrt{2}}{\pi(2-n^2)} \cos nx \\ \frac{\sqrt{2}\pi-\sin(\sqrt{2}\pi)}{4\sin(\sqrt{2}\pi)} &=& -1,4023 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2-n^2} \end{array}\right].$$

11. - Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\sqrt{2}x\right)$ pre interval $\langle -\pi,\pi\rangle$.
    - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
    - Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\dots, \\ b_n &=& \frac{2n(-1)^n \sin(\sqrt{2}\pi)}{\pi(2-n^2)}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sin(\sqrt{2}\pi)}{\pi(2-n^2)} \sin nx \\ \frac{\pi}{4\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}} &=& -1,297 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)}{2-(2k-1)^2} \end{array}\right].$$

12. - Nájdime Fourierov rad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cos x$ pre interval $\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$.
    - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
    - Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

$$\left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 0, \quad \text{pre} \quad n=0,1,2,\dots, \\ b_n &=& \frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}, \quad \text{pre} \quad n=1,2,\dots, \\ \bar{f}(x) &=& \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2} \sin 2nx, \\ \frac{\pi^2}{64\sqrt{2}} &=& \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^{k+1}}{(16k^2-16k+3)^2} \end{array}\right].$$

✠