Lanchesterove rovnice, ako model bojovej činnosti armád

Peter TELEK[1]

Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovenská republika
peter.telek@fei.sk

Abstrakt. Lanchesterove modely bojovej činnosti armád prinášajú komplexný pohľad na problematiku priebehov bojov a bitiek. Sú často využívaným modelom pri plánovaní a výcviku armád rôznych krajín, krajiny EÚ nevynímajúc. S postupom času a všestranným rozvojom spoločnosti nachádzajú uplatnenie v aj v ekonómií, finančníctve ale aj v netradičných oblastiach akými sú napríklad hráčske asociácie strategických hier. Ich komplexnosť je naozaj dokonalá, pri dostatku vstupných informácií, Lanchesterove rovnice uvažujú naozaj so všetkými varianciami aké môžu nastať. Počnúc účinnosťami armád, ich stratégiami, časovými zmenami ako napr. prichádzajúcimi posilami, ale tiež s operačnými stratami akými sú choroby, rôzne zranenia ale aj priateľská streľba a podobne. V práci prinášam podrobnejší pohľad na model vojny v ktorej sa stretnú konvenčná bojová sila s partizánskou silou. Ako teoretický podklad som použil riešenie sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc, označovaných ako jedna z modifikácií Lanchesterových modelov bojovej činnosti armád. Sústavu som riešil separáciou premenných a zobrazením vo fázovej rovine. Na simuláciu množstva rôznych východiskových situácií som použil matematický software, Mathematica 5. Pripravil som tiež konkrétny príklad z histórie na lepšiu prezentáciu získaných poznatkov a tiež simuláciu historickej udalosti, ktorá sa „našťastie“ nestala skutočnosťou.

1 Úvod do Lanchesterových modelov bojovej činnosti armád

Čo i len krátky pohľad do histórie nám predostiera veľké množstvo príkladov rôznych vojen a konfliktov na celom svete. Každá vojna však vždy prináša nový pohľad, na jednej strane pohľad na krutosti, zákernosti, ľudské utrpenie, barbarstvo... no na druhej strane zakaždým sa stretávame s inou stratégiu a plánovaním. Od dávnej minulosti až do dnes nás sprevádzajú vojenské konflikty a musíme priznať, že tvoria časť našej histórie i súčasnosti.

V tejto práci sa pokúsim priniesť iný pohľad na vojenské konflikty, pohľad cez sústavu diferenciálnych nelineárnych rovníc ako nástroj na modelovanie bojovej činnosti armád, pri špecifických stratégiách boja. Konkrétne sa zameriavam na tzv. gerilovú stratégiu vojny, zakladajúcu sa na partizánskych praktikách boja. Diferenciálne rovnice, ktoré využívam pochádzajú z Lanchesterovho modelu gerilovej vojny. Vychádzajú zo slávnych rovníc, ktoré sformuloval F. W. Lanchester v roku 1914. Tieto rovnice sa stali štandardom na odhad výsledkov jednotlivých bitiek a vojenských operácií a ich modifikácie sú využívané aj dnes.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -by, x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= -ax, y(0) = y_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

kde x(t), y(t) sú početnosti konvenčných armád v čase t, x_0, y_0 predstavujú počiatočnú silu (početnosť) armád v čase t=0, kladné konštanty a, b reprezentujú efektívnosť armád x a y.

[1] Vedúci práce: doc. RNDr. Ľubomír Marko, PhD.

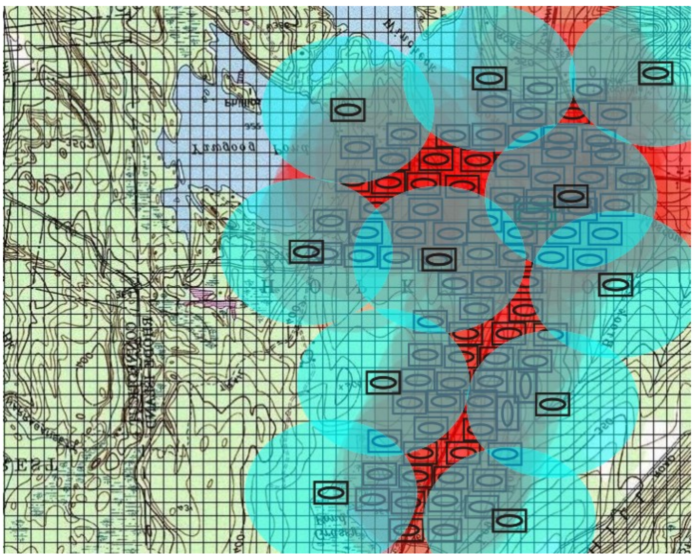
Vo všeobecnosti sú Lanchesterove rovnice, diferenciálnymi rovnicami vyjadrujúcimi závislosť efektivity a použitej stratégie síl bojujúcich proti sebe ako funkciu času.

Gerilová stratégia je považovaná za jeden z najpresnejších a najrealistickejších modifikácií modelov Lanchesterových rovníc bojovej činnosti armád. V tejto práci som sa sústredil na zaujímavý a v reálnom živote, od dávna (partizánske boje v čase II. svetovej vojny, vojna vo Vietname) až dodnes (vojna v Iraku) sa vyskytujúci model, keď jedna z bojujúcich síl je konvenčná a druhá je partizánska.

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, y(0) = y_0 \qquad (2)$$

kde x(t), y(t) sú početnosti armád v čase t, x_0, y_0 predstavujú počiatočnú silu (početnosť) armád v čase t=0, kladné konštanty a, b reprezentujú efektívnosť x – gerilovej a y – konvenčnej armády.

Táto modifikácia berie do úvahy, že bojová efektívnosť gerilovej sily vychádza z jej schopnosti zostať v utajení a neumožniť súperovi identifikáciu svojho postavenia, využiť znalosť bojového priestoru a moment prekvapenia. Potom, zatiaľ čo sú straty konvenčnej sily stále úmerné počtu gerilovej sily, straty gerilovej armády sú úmerné tak počtu konvenčnej sily ako aj vlastnej početnosti. Matematický pohľad na výhodu gerilovej sily oproti konvenčnej je hlavne v tom, že gerilová armáda nepôsobí ako celok, ale je rozdelená do množstva malých útočných skupín rozptýlených v geografickom priestore bitky. Uvažujúc pravdepodobnosť, že konvenčná armáda zasiahne rozptýlené skupinky partizánov, dobre ukrytých a využívajúcich znalosť terénu, ktorých presnú polohu vôbec nepozná je podstatne menšia (v extrémnom prípade si môžeme predstaviť, že konvenčná armáda páli do okolitého priestranstva, napr. do lesa a môže len predpokladať, že zasiahne svojou paľbou niektorú z útočných skupín gerilovej armády) ako pravdepodobnosť, že partizánska skupina zasiahne rozsiahlu konvenčnú armádu koncentrovanú na určitom území, ba čo viac ešte vie oveľa presnejšie určiť polohu (využijúc zvedov a pod.), kde sa akurát nachádzajú sily konvenčnej armády. Situácia je znázornená na obr. 1, kde červenou farbou je vyznačená tzv. palebná oblasť konvenčnej armády a modrou farbou sú znázornené útočné skupiny partizánov. Z obrázku je zrejmé, že gerilové sily majú pod kontrolou podstatne väčšie územie pri menšej početnosti ako sily konvenčné. Toto tvrdenie neskôr dokážem riešením a úpravou rovníc.



Obr.1 Ilustrácia výhody partizánskych síl

2 Určenie modelových rovníc pre konvenčnú vs. gerilovú vojnu

Definíciu rovníc pre konvenčnú vojnu ako aj pre model vojny konvenčnej proti partizánskej armáde som už spomenul. Označenie budem naďalej zachovávať. Pre čisto konvenčnú vojnu je model veľmi jednoduchý, reprezentovaný sústavou dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc (1) (jednoducho riešiteľných analytickými postupmi).

$$\frac{dx}{dt} = -by, x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = -ax, y(0) = y_0$$

Čo sa teda zmení ak jedna z armád bojuje gerilovým spôsobom? Zatiaľ čo armáda y je stále konvenčná, teda máme $\frac{dy}{dt} = -ax$, armáda x bojuje partizánskym štýlom. Gerilový štýl vojny sa tiež nazýva „area fire“ (vs. konvenčná vojna býva označovaná ako „direct fire“), čo znamená, že partizánski bojovníci sú ukrytí. Nepriatelia ich nevidia a nemôžu páliť priamo do nich, jediné čo je konvenčným silám jasné je, že skupiny partizánov sa nachádzajú „niekde“ v okolí bojového poľa. Teda $\frac{dx}{dt}$ závisí od efektivity a veľkosti nepriateľskej armády, rovnako ako v prípade konvenčnej armády, ale čo zvyšuje šancu nepriateľa zasiahnuť partizánov je samotná veľkosť útočnej gerilovej skupiny a preto platí, $\frac{dx}{dt} = -bxy$. Dôležité je uvedomiť si, dramatický pokles účinnosti – *b* konvenčnej armády, oproti „direct fire“ spôsobu vojny, spojený s nízkou pravdepodobnosťou zásahu gerilovej sily. Vo všeobecnosti je hodnota účinnosti b konvenčnej armády, 100 až 1000–krát menšia ako v prípade, keby bojovala v čisto konvenčnej vojne.

3 Určenie koeficientov účinnosti armád

Viac krát som sa už zmieňoval o kladných konštantách a, b opisujúcich efektívnosť armád. Pri reálnych aplikáciách Lanchesterových modelov, práve tieto konštanty spôsobujú najväčšie nepresnosti a ich určenie je veľmi náročné. Výpočet koeficientu účinnosti konvenčnej armády sa riadi vzorcom: $b = r_y p_y$, kde r_y je konštanta nazývaná „palebná efektivita“ a vypočíta sa ako: $r_y = \sum_{i=1}^{n} qtde(i).cad(i).let(i)$, kde n – počet všetkých zbraní v armáde, *qtde(i)* – množstvo zbraní i–teho druhu, *cad(i)* – kadencia výstrelov zbrane i–teho druhu, *let(i)* – koeficient smrteľnosti po zasiahnutí zbraňou i–teho druhu (koeficient udáva výrobca zbrane) a p_y vyjadruje pravdepodobnosť toho, že jediný výstrel zneškodní nepriateľa. Výpočet účinnosti partizánskych jednotiek je ešte náročnejší. Hodnota koeficientu a sa určuje pomerne k hodnote tzv. „priestoru efektivity jediného výstrelu konvenčnej armády – A_{ry}“ a nepriamo úmerne k priestoru obsadeného gerilovými jednotkami – A_x a má tvar: $a = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}$, kde r_y je konštanta „palebnej efektivity“ a vypočíta sa rovnako ako v prípade konvenčnej armády, A_{ry} – je priestor efektivity jediného výstrelu konvenčnej armády, t.j. oblasť, kde jediný výstrel y–armády zneškodní nepriateľa, so spomínanou pravdepodobnosťou p_y.

4 Riešenie sústavy rovníc a interpretácia vo fázovej rovine

Sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc, opisujúcich vojnu medzi konvenčnou a partizánskou armádou, nemožno riešiť analyticky, preto budem riešiť tento problém separáciou premenných a následne využijem zobrazenie vo fázovej rovine.

Využijem sústavu (2):

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = -ax, y(0) = y_0$$

Platí vzťah:

$$\frac{by^2}{2} = ax + k \qquad (3)$$

kde k je konštanta,

upravím:

$$k = \frac{by^2}{2} - ax \qquad (3a)$$

Dôkaz tvrdenia:

zderivujem výraz (3a):

$$0 = 2b\frac{yy'}{2} - ax'$$

$$0 = byy' - ax'$$

dosadím za y', x', výrazy zo sústavy (2):

$$0 = by(-ax) - a(-bxy)$$

čím je tvrdenie dokázané

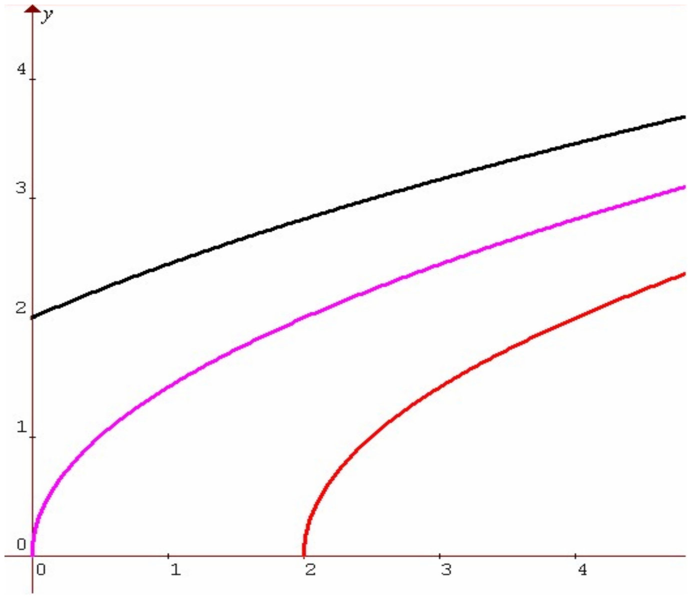
$$0 = -abxy + abxy$$

$$0 = 0$$

Uvážiac počiatočné podmienky rovníc, $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (predstavujú počiatočnú silu armád), tak môžem napísať:

$$k = \frac{by_0^2}{2} - ax_0 . \qquad (4)$$

Uvažujem vzťah (3): $\frac{by^2}{2} = ax + k$, kde $k = \frac{by_0^2}{2} - ax_0$ a zobrazím vo fázovej rovine jednotlivé situácie pre k: $k > 0$ (čiernou farbou v grafe), $k < 0$ (červenou), $k = 0$ (fialovou). Ako vyplýva zo znázornenia vo fázovej rovine (obr.2), ak je $k < 0$ vyhrajú partizánske sily a ak je $k > 0$, vyhrajú konvenčne bojujúce sily. Znázornením ľubovoľnej situácie pomocou fázovej roviny môžem veľmi flexibilne a názorne ilustrovať priebeh a hlavne výsledok bitky. Ako vhodný nástroj na rýchlu simuláciu som používal matematický software Mathematica ver. 5.



Obr.2 Grafická interpretácia vo fázovej rovine(Lanchesterov parabolický zákon)

Získané rovnice mi tiež umožňujú predpokladať vývoj medzi počtami vojakov na jednotlivých znepriatelených stranách.

Z rovnosti (3), vyjmem y a dostávam:
$$y=\sqrt{\frac{2k+ax}{b}} \tag{5}$$

– teraz vyjmem x:
$$x=\frac{by^2}{2a}-\frac{k}{a} \tag{6}$$

dosadením k do rovností (5) a (6) dostávam:
$$x=\frac{by^2}{2a}-\frac{by_0^2}{2a}-x_0 \tag{7}$$

$$y=\sqrt{\frac{2ax}{b}-\frac{2ax_0}{b}+y_0^2} \tag{8}$$

Za určitých okolností vyrovnaného súboja je možné, že nastane prípad, kedy obe armády dosiahnu nulový počet vojakov v rovnakom čase. Pre tento prípad môžem postaviť $x = y = 0$, a získavam tým vzťahy pre počiatočné podmienky, $x_0=\frac{by_0^2}{2a}$ a $y_0=\sqrt{\frac{2ax_0}{b}}$. Zjavná je previazanosť (x_0 a y_0) v týchto rovniciach, využijúc tohto budem schopný určiť presné hodnoty počiatočnej sily a pomeru výkonnosti jednotlivých armád. Jedinou nezávislou premennou sa stane x_0 alebo y_0.

5 Demonštrácia výsledkov na konkrétnom príklade, vojna vo Vietname

Ilustrujem teraz všetky doposiaľ získané vzťahy na konkrétnom prípade. Získam tým podstatne lepšiu a názornejšiu predstavu o rozoberanej problematike. Príkladov, keď bojujú proti sebe konvenčná a partizánska armáda, bolo v histórií veľa. Za vzorovú vojnu som vybral vojnu vo Vietname, konkrétne jej časť a počty vojakov z obdobia, kedy proti spojencom bojovali gerilové sily severných Vietnamcov a Viet Kongov. Počas tejto vojny bol pomer účinnosti jednotlivých armád $\frac{b}{2a} = \frac{1}{1000}$, teda $y_0 = \sqrt{1000x_0}$, čo znamená, že skupina $x_0 = 10$ partizánov je efektívna bojová sila proti 10–krát väčšiemu množstvu konvenčných vojakov. Ako možno vidieť v tabuľke 1, efektivita partizánskych jednotiek klesá so vzrastajúcim počtom jej členov.

Tabuľka 1: Porovnanie vplyvu veľkosti partizánskych síl na ich efektivitu

x_0	10	20	30	50	100	1000	1010	1200
y_0	100	141	173	224	316	1000	1004	1095
pomer	10	7,1	5,8	4,5	3,2	1	<1	0,9

Dokázal som, že na to, aby bola partizánska praktika boja účinná proti konvenčnej armáde je nevyhnutné, aby partizánska sila bola rozdelená do malých lokálnych útočných skupín. Prirodzene sa núka otázka extremálneho prípadu, že najúčinnejšia gerilová armáda by pozostávala iba z jednotlivcov. Tu treba poznamenať, že pri príliš nízkom počte mužov v partizánskych jednotkách (menej ako 5) by sa začal nadmerne prejavovať faktor operačných strát a efektivita by pôsobením tohto faktoru prudko klesala. Výsledkom existencie malých gerilových jednotiek (s počtom 8 – 12 mužov) vo vojne vo Vietname je fakt, že celá spojenecká armáda (USA, Južný Vietnam a ostatní spojenci) by musela byť 10násobne väčšia ako partizánska armáda Viet Kongov a severných Vietnamcov na to, aby spojenci mali reálnu šancu zvíťaziť. Z historických vojenských záznamov je známe, že v roku 1968, bol pomer spojencov k partizánom, 6:1.

6 Simulácia historickej udalosti

Pre zaujímavosť som vykonal malú simuláciu historickej udalosti. Vychádzam z historického podkladu. Generál spojeneckých síl, Westmoreland, požiadal v roku 1968 prezidenta o posilu 206 000 mužov. Prezident Johnson žiadosť zamietol. Simuláciu založím na nasledovnej téze: Vyhrali by spojenci bitku, keby prezident vyhovel žiadosti generála Westmorelanda? Analyzujem teda situáciu. Približné počty jednotlivých armád v čase žiadosti popisuje tabuľka 2.

Tabuľka 2: Počty spojeneckých a partizánskych síl okolo roku 1968

konvenčné sily			partizánske sily	
Američania	510 000		Severní Vietnamci	50 000
Južní Vietnamci	1 100 000		Viet Kongovia	230 000
ostatní spojenci	70 000			
SPOLU:	1 680 000			280 000

Pomer síl pred žiadosťou bol $\frac{1680000}{280000} \approx \frac{6}{1}$. V prípade posily spojeneckej armády o 206 000 mužov by sa pomer zmenil na $\frac{1866000}{280000} \approx \frac{6{,}7}{1}$. Je teda zrejmé, že spojenecká posila by nepomohla armáde generála Westmorelanda k výhre, na to, aby vyhrali, by totiž potrebovali až zdvojnásobiť počet amerických vojakov, teda posilu ďalších 510 000 mužov, čo bolo vtedy pre USA nemožné.

Touto simuláciou by sa mohol vysvetliť postoj prezidenta Johnsona, ktorý „politickým" rozhodnutím nevyhovieť Westmorelandovej žiadosti posunul vietnamský konflikt do stavu, ktorý vyvrcholil Parížskymi mierovými rokovaniami v roku 1973, v ktorých USA vystúpili z vojny.

7 Záver ostáva otvorený ...

Z doposiaľ uvedeného textu je zrejmé ako Lanchesterove modely bojovej činnosti armád fungujú a nakoľko hodnotné a komplexné a v istých situáciách aj strategické informácie môžu poskytnúť na prvý pohľad obyčajné diferenciálne rovnice. Konkrétne rozoberaný model konvenčno–partizánskej vojny, poukazuje na veľmi interesantné fakty, z ktorých vyplýva, že v čím menších skupinách bojuje partizánska armáda, tým viac sa znižuje účinnosť konvenčných síl.

Ako veľmi zaujímavú a demonštratívnu úvahu na záver nechávam výpočet ako rýchlo by spojenecká armáda vo Vietname zničila gerilovú armádu Viet Kongov a severných Vietnamcov, keby títo bojovali ako konvenčná armáda. Riešením už známej sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc (1), môžeme veľmi jednoducho vypočítať čas v ktorom spojenecká armáda bez problémov zvíťazila nad armádou, ktorú v skutočnosti nebola schopná nikdy poraziť.

Použitá literatúra

[1] S. J. Deitchman, A lanchester model of guerrilla warfare. *Operational Research*, 1962.

[2] Bonder, Seth, "Mathematical Modeling of Military Conflict Situations". *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, *Volume 25*, *Operations Research, Mathematics and Models*, American Mathematical Society, Providence, 1981.

[3] Braun, Martin, *Differential Equations and Their Applications*, 3rd ed.", Springer-Verlag, NY, 1983.

[4] Coleman, Courtney S. *Models in Applied Mathematics*, William Lucas, Editor, Springer-Verlag, NY, 1983.

[5] N. K. Jaiswal. *Military Operations Research Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, 1994.