

Okrajové úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice:

- (1) Riešte okrajovú úlohu $-u'' + u = f(x)$,
- a) $0 < x < 2$, $f(x) = 1$, $u(0) = 0$, $u(2) = -1$,
 - b) $0 < x < 2$, $f(x) = 1$, $u'(0) = 0$, $u'(2) + u(2) = 0$,
 - c) $0 < x < 1$, $f(x) = e^{2x}$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$
 - d) $0 < x < 1$, $f(x) = e^{-x}$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.
- (2) Riešte okrajovú úlohu $-u'' + 4u = f(x)$,
- a) $0 < x < 1$, $f(x) = x$, $u'(0) = 0$, $u(1) = -1$,
 - b) $0 < x < 2$, $f(x) = 1$, $u(0) = 0$, $u'(2) + u(2) = 0$,
 - c) $0 < x < 1$, $f(x) = e^{2x}$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$
 - d) $0 < x < 3$, $f(x) = xe^{-x}$, $u(0) = 0$, $u'(3) = 0$.
- (3) Riešte okrajovú úlohu $(x+1)u'' + u' = f(x)$,
- a) $0 < x < 1$, $f(x) = x$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 0$,
 - b) $0 < x < 1$, $f(x) = x$, $u(0) - u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$,
 - d) $0 < x < 2$, $f(x) = x$, $u'(0) = u'(2) = 0$ (nemá riešenie, prečo?)
 - e) $0 < x < 2$, $f(x) = 1 - x$, $u'(0) = u'(2) = 0$ (nekonečne veľa riešení, prečo?)
- (4) Riešte okrajovú úlohu $-(1-x^2)u'' + 2xu' = f(x)$,
- a) $0 < x < \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$, $u(0) = 0$, $u'(\frac{1}{2}) = -1$,
 - b) $0 < x < \frac{1}{2}$, $f(x) = x$, $u(0) - u'(0) = 0$, $u'(\frac{1}{2}) = 0$,
 - c) $0 < x < \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{4} - x$, $u(0) = u'(\frac{1}{2}) = 0$.
- (5) Riešte okrajovú úlohu $-(\frac{1}{\cos x}u')' = f(x)$,
- a) $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $f(x) = 1$, $u(0) = 0$, $u'(\frac{\pi}{3}) = -1$,
 - b) $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $f(x) = x$, $u(0) - u'(0) = 0$, $u'(\frac{\pi}{3}) = 0$,
 - c) $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \sin x$, $u'(0) = 1$, $u(\frac{\pi}{4}) + 2u'(\frac{\pi}{4}) = 0$,
- (6) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu $u'' + \lambda u = 0$,
- a) $0 < x < 4$, $u(0) = u(4) = 0$,
 - b) $0 < x < 4$, $u'(0) = u'(4) = 0$,
 - c) $0 < x < 4$, $u(0) = u'(4) = 0$,
 - d) $0 < x < 4$, $u'(0) = u(4) = 0$,
 - e) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0$,
 - f) $0 < x < 1$, $u(0) - u'(0) = u(1) = 0$
- (7) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu $u'' + \lambda u = 0$, $0 < x < 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, rozložte funkciu $f(x) = x - x^2$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií a určte druh konvergencie radu.
- (8) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu $u'' + \lambda u = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(\frac{\pi}{2}) = 0$, rozložte funkciu $f(x) = x^2 - \pi x$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií a určte druh konvergencie radu.