

Spojité pravdepodobnosťné rozdelenia

Číselné charakteristiky

Príklad 1:

Je daná funkcia hustoty $f(x) = 2/(x+1)$ na intervale $[0, \exp(0.5)-1]$. V Matlabe si ju môžeme definovať ako inline objekt (kvôli ďalším výpočtom musí íst pred delenie bodka):

```
>> f=inline('2./(x+1)');
```

Ubezpečme sa, že je definovaná správne a zistime hodnotu integrálu na danom intervale. Na numerické integrovanie využijeme príkaz quad:

```
>> format long, d=exp(0.5)-1;
>> quad(f,0,d)
```

```
ans =
1.000000023810609e+000
```

Očakávali sme výsledok 1 a odpoved' Matlabu nie je ďaleko od očakávaní. Nepresnosť je spôsobená tým, že quad integruje štandardne s presnosťou 1e-6. Túto presnosť môžeme zvýšiť štvrtým parametrom:

```
>> quad(f,0,d, 1e-12)
```

```
ans =
1.000000000000002e+000
```

```
>> quad(f,0,d, 1e-16)
```

```
ans =
1
```

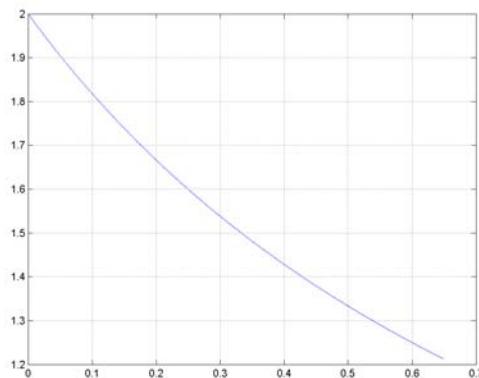
Nájdime distribučnú funkciu pravd. rozdelenia F. S integrovaním nám poradí Matlab a možnosti jeho symbolického módu. (Zeleným písmom sú uvedené časti, bez ktorých sa bude dať zaobísť na písomkách a predstavujú priestor na dobrovoľné rozširovanie si obzoru.)

```
>> s=sym('s');
>> int(f(s))
```

```
ans =
2*log(s+1)
```

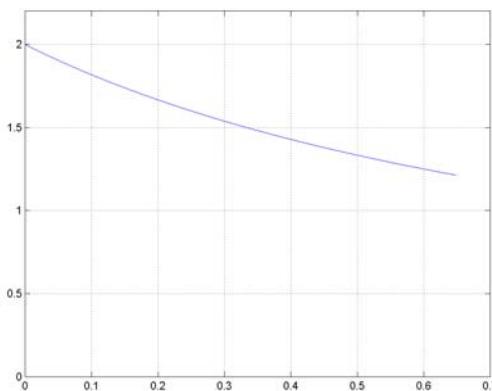
Vykreslíme teraz grafy funkcií f a F. Interval $[0, d]$ rozdelíme na 1000 častí príkazom linspace (daný interval rozdelí na n častí, zadávame však číslo n+1 ako počet deliacich bodov).

```
>> xd = linspace(0,d,1001);
>> plot(xd,f(xd)), grid on
```



Nie je to celkom ono... Upresníme, akú oblasť roviny má Matlab znázorniť:

```
>> plot(xd,f(xd)), axis([0, 0.7, 0, 2.2]), grid on
```



Úloha: Podobne nakreslite funkciu F (najprv si ju definujte ako inline objekt s premennou x).

Na výpočet kvantilov potrebujeme inverznú funkciu k F. V tomto príklade nie je problém ju nájsť (ručne), ale nie vždy sa to podarí. Ukážeme si teda univerzálnejší postup¹ využívajúci príkaz `fzero`, ktorým Matlab hľadá korene rovnice $f(x) = 0$. Pripomíname, že nájsť kvantil q_a znamená nájsť číslo, pre ktoré platí $F(q_a) = a$, čo je to isté ako $F(q_a) - a = 0$. Nájdime najprv medián, teda 0.5-kvantil. Definujeme $F_q = F - 0.5$ a nájdeme jej koreň:

```
>> Fq=inline('2*log(x+1)-0.5'); q05=fzero(Fq, 0)
```

```
q05 = 2.840254166877414e-001
```

Príkaz `fzero` potrebuje „poradiť“, kde začať hľadať koreň, preto je druhý vstup 0 (odhad hľadannej hodnoty). Treba sa ubezpečiť, že výsledok nie je „mimo“ prípustného intervalu.

Úloha: Nájdite kvartily funkcie F a 0.1, 0.9 a 0.95 -kvantily.

Úloha: Riešte to isté pre inú funkciu hustoty na inom intervale (sami si vhodne zvoľte).

¹ Jeho nevýhodou je väčšia prácnosť, ak potrebujeme tých kvantilov viac.

Príklad 2:

Je daná hustota $f(x,y) = 1-x+y$ pravdepodobnosného vektora (X,Y) , na ploche možných udalostí $[0,1] \times [0,1]$. Na teórii sme už zistili, ako vyzerajú f_x a f_y (hustota premenných X, Y samostatne).

Úloha 1: Zadajte f , f_x , f_y ako inline objekty. Ubezpečte sa, že f , f_x a f_y sú zadané správne.

Riešenie: Funkcie f_x a f_y nájdeme ručným integrovaním.

```
>> f=inline('1-x+y'); fx=inline('1.5-x'); fy=inline('0.5+y');
```

Kontrola správnosti:

```
>> i1=quad(fx,0,1); i2=quad(fy,0,1); i3=dblquad(f,0,1,0,1); [i1,i2,i3]
```

```
ans = 1 1 1
```

Na výpočet dvojitého integrálu sme použili príkaz **dblquad**, do ktorého sa vkladajú postupne hranice intervalov premennej x a y (pozor na poradie).

Úloha 2: Vypočítajte strednú hodnotu $E(X)$, $E(Y)$, rozptyl $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, kovarianciu a korelačný koeficient vektora (X,Y) . *Riešte samostatne a až nakoniec si porovnajte výsledky s nasledujúcim postupom!*

Riešenie: – Kedže Matlab nevie integrovať vstup $x*f(x)$ apod., kde f je zadaná ako inline objekt, musíme každý takýto integrand zadať ako nový inline objekt. Tento postup je schodný, ale trochu otravný ... Nepomohlo by, ak by sa f zadalo ako m-funkcia?

```
>> fxe=inline('1.5*x-x.^2'); fye=inline('0.5*y+y.^2');
>> Ex=quad(fxe, 0, 1); Ey=quad(fye, 0, 1); [Ex, Ey]
```

```
ans = 4.166666666666667e-001 5.833333333333334e-001
```

```
>> fxv=inline('1.5*x.^2-x.^3'); fyv=inline('0.5*y.^2+y.^3');
>> varx=quad(fxv, 0, 1)-Ex^2; vary=quad(fyv, 0, 1)-Ey^2; [varx, vary]
```

```
ans = 7.63888888888881e-002 7.63888888888878e-002
```

```
>> fxy=inline('x.*y.*(1-x+y)'); EXY=dblquad(fxy,0,1,0,1); covxy=EXY-Ex*Ey
```

```
covxy = 6.94444444444392e-003
```

```
>> cocfxy=covxy/(varx*vary)^0.5
```

```
cocfxy = 9.090909090909033e-002
```

Úloha 3: Na oblasti $[-1, 2] \times [-2, 4]$ je daná funkcia hustoty $f(x,y) = (2-x+y)/9$. Vypočítajte jednotlivé číselné charakteristiky pravdepodobnosného rozdelenia určeného funkciou f .

Príklad 3:

Nakoniec sa budeme venovať situácií, keď má oblasť nenulových hodnôt funkcie hustoty iný tvar ako obdĺžnik.

Nech oblasť Q je daná takto: $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x, y \geq 0 \wedge x+y \geq 2 \wedge x+y \leq 5\}$.

Funkcia hustoty bude: $f = 2/21$ pre $(x,y) \in Q$
a $f = 0$ inde.

Úloha: Načrtnite (na papier) oblasť Q .

Matlab nám nedáva priamu možnosť počítať integrál z funkcie na iných ako obdĺžnikových oblastiach. Musíme preto úlohu riešiť nepriamo – integrovať budeme na obdĺžniku $B = [0, 5] \times [0, 5]$ a funkciu f položíme rovnú nule všade na B/Q .² To nám v Matlabe umožňuje zapojenie boolovských výrazov do predpisu funkcie:

```
>> f=inline('(x+y<=5).*(x+y>=2)*2/21');
```

```
>> dblquad(f,0,5,0,5,1e-10)
```

Na danej oblasti je hodnota integrálu takmer 1, takže f je dobre definovaná funkcia hustoty. (Výstupy už neuvádzame, vidno ich vo vašom matlabe).

Funkcie hustoty fx a fy (funkcia fy je zhodná s fx) premenných X, Y samostatne možno jednoducho zistiť z náčrtu na papieri (skúste!). Ide o „vetvičkové“ funkcie, čo opäť možno matlabe vysvetliť pomocou boolovských výrazov, ktoré „zapnú“ príslušnú vetvu vtedy, keď hodnoty x, y sú na správnej oblasti:

```
>> fx = inline('2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21');
>> quad(fx,0,5)
```

Výpočet strednej hodnoty: (pre X aj Y rovnaká)

```
>> fxx=inline('(2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21).*x');
>> ex=quad(fxx,0,5,1e-11)
```

Výpočet variancie: (pre X aj Y rovnaká)

```
>> fxxx=inline('(2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21).*x.*x');
>> vax=quad(fxxx,0,5,1e-11) - ex^2
```

Výpočet kovariancie a korelačného koeficientu:

```
>> fxy=inline('((x+y<5).*(x+y>2)/10.5).*x.*y');
>> cox=dblquad(fxy,0,5,0,5,1e-11)-ex*ey
>> cocof=cox/vax
```

Úloha: Pri výpočte korelačného koeficientu máme v menovateli niečo iné, ako sa uvádzajú v štandardnom vzorci použitom napr. v príklade 2. Prečo?

² Do predpisu nedávame podmienky nezápornosti x, y . Budeme však na ne pamätať a pri výpočtoch sa budeme vyhýbať všetkým kvadrantom okrem prvého.

Úloha: Zvoľte si samostatne na nejakej nepravidelnej oblasti (napr. trojuholník daný troma náhodne zvolenými bodmi v rovine) vhodnú funkciu hustoty $f(x,y)$ a nájdite číselné charakteristiky takto určeného rozdelenia náhodnej premennej.