

Príklad
$$\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

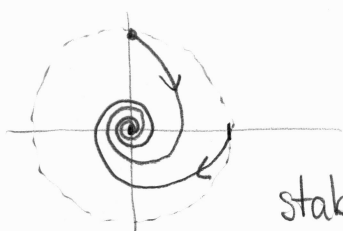
$$\lambda_1 = -1 + i \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Re} x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Všeob. riešenie

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = e^{-t} \left[C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right]$$



stabilné ohnisko

Teda

1. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

žriedlo

2. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

stoka

3. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

sedlo

4. $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

stred

5. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$

$\sigma > 0$ nestabilné ohnisko

6. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$

$\sigma < 0$ stabilné ohnisko

Systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$ad-bc = \operatorname{Det} A$$

$$a+d = \operatorname{Tr} A$$

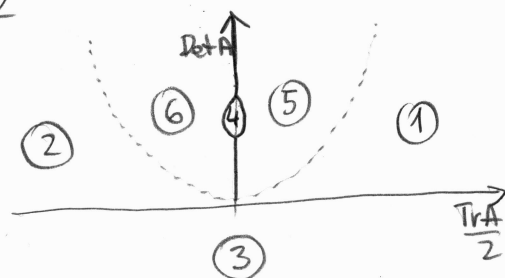
$$\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \lambda + \operatorname{Det} A = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Tr} A}{2}\right)^2 - \operatorname{Det} A}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \text{Det} A}$$

- | | | | | |
|----|-----------------------------|--------------------|---|---------------|
| 1. | $\frac{\text{Tr} A}{2} > 0$ | $\text{Det} A > 0$ | $\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 > \text{Det} A$ | žriedlo |
| 2. | $\frac{\text{Tr} A}{2} < 0$ | $\text{Det} A > 0$ | $\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 > \text{Det} A$ | stoka |
| 3. | | $\text{Det} A < 0$ | | sedlo |
| 4. | $\frac{\text{Tr} A}{2} = 0$ | $\text{Det} A > 0$ | | stred |
| 5. | $\frac{\text{Tr} A}{2} > 0$ | | $\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 < \text{Det} A$ | nest. ohnisko |
| 6. | $\frac{\text{Tr} A}{2} < 0$ | | $\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 < \text{Det} A$ | stab. ohnisko |

Diagram



Problém:
Čo sa deje na odtatných
čiarach?

Problém: Do systému

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

pridajte parameter p k niektorému z koeficientov a, b, c, d
a skúmajte ako sa mení fázový portrét v závislosti
od parametra p . zvolte konkrétne hodnoty a, b, c, d a
nájdite kritické - bifurkačné hodnoty parametra p .

Nehomogénny systém LDR 1. rádu v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}x'(t) &= a x(t) + b y(t) + f_1(t) \\ y'(t) &= c x(t) + d y(t) + f_2(t)\end{aligned}$$

$$\vec{x}' = A \vec{x} + \vec{f}(t)$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice

$$\vec{x}_H(t) = c_1 \vec{\varphi}_1(t) + c_2 \vec{\varphi}_2(t) = U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Partikulárne riešenie

$$\vec{x}_p(t) = c_1(t) \vec{\varphi}_1(t) + c_2(t) \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = U(t) \vec{c}(t)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\vec{\varphi}_1(t) \quad \vec{\varphi}_2(t)$

$$U'(t) \vec{c}(t) + U(t) \vec{c}'(t) = A U(t) \vec{c}(t) + \vec{f}(t)$$

$$U'(t) = A U(t)$$

$$\vec{c}'(t) = U^{-1}(t) \vec{f}(t)$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t U^{-1}(s) \vec{f}(s) ds$$

$$\vec{x}_p(t) = U(t) \cdot \int_{t_0}^t U^{-1}(s) \vec{f}(s) ds$$

Všeobecné riešenie

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t)$$

Príklad

$$x' = x - 3y + e^t$$

$$y' = 4x - 6y + 2e^{-t}$$

Homogénna sústava

$$x' = x - 3y$$

$$y' = 4x - 6y$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} 3e^{-3t} \\ 4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-3t} \\ e^{-2t} & 4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_p(t) &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-3t} \\ e^{-2t} & 4e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^t \frac{\begin{pmatrix} 4e^{-3s} & -3e^{-2s} \\ -e^{-2s} & e^{-2s} \end{pmatrix}}{e^{-5s}} \begin{pmatrix} e^s \\ 2e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-3t} \\ e^{-2t} & 4e^{-3t} \end{pmatrix} \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 4e^{2s} & -3e^{2s} \\ -e^{3s} & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ 2e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-3t} \\ e^{-2t} & 4e^{-3t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 4e^{3s} & -6e^s \\ -e^{4s} & 2e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^{3t} - 6e^t \\ -\frac{1}{4}e^{4t} + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^t - \frac{3}{4}e^t - 6e^{-t} + 3e^{-t} \\ \frac{4}{3}e^t - 4e^t - 6e^{-t} + 4e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12}e^t - 3e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^t - 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Nelineárny systém v $\mathbb{R}^2$

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

(NS)

Vektorový zápis $\vec{x}' = F(\vec{x})$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Autonómny systém

Podobne ako v skalárnej autonómnej rovnici $x' = g(x)$ sú pevné body systému koreňmi rovnice $F(\vec{x}) = \vec{0}$

Bod $c = [c_1, c_2]$ je pevný bod systému, ak $F(c) = \vec{0}$ t.j.

$$f(c_1, c_2) = 0$$

$$g(c_1, c_2) = 0$$

Cieľom nasledujúcej časti je popísať lokálnu dynamiku v okolí pevného bodu systému (NS)

Metóda Linearizácie.

Nelineárny systém v okolí pevného bodu c nahradíme vhodným lineárnym systémom, ktorý bude mať „rovnaké chovanie“.

Na vysvetlenie urobíme ukážku v jednorozmernom prípade

Majme rovnice

$$x' = f(x) \quad \text{a prvý bod } c$$

Predpokladáme, že f sa dá rozvinúť do Taylového radu v bode c

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots$$

Prítom $f(c) = 0$ a v dostatočne malom okolí bodu c je $(x-c)^m$ pre $m \geq 2$ oveľa menšie ako $(x-c)^1$.

$$f(x) \approx f'(c)(x-c)$$

Rovnica

$$x' = f'(c)(x-c) \quad \text{je lineárna rovnica s konst koef } f'(c) = a$$

Po posunutí $y = x - c$

$$y' = ay$$

je lineárna rovnica, ktorá v okolí $y_0 = 0$ aproximuje rovnice $x' = f(x)$ v okolí prvého bodu c . (za dodatočného predpokladu $a \neq 0$)

Príklad. $x' = x - x^3$

$$f(x) = x - x^3 \quad \text{Prvé body: } x - x^3 = 0 \quad x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = -2$$

$$y' = -2y$$

Lin. systém má p. bod typu stoka $\Rightarrow$

$x_1 = -1$ je stoka nelineárneho systému

$$f'(x_2) = f'(0) = 1$$

$$y' = 1y$$

$x_2 = 0$ je žriedlo

$$f'(x_3) = f'(1) = -2$$

$$y' = -2y$$

$x_3 = 1$ je stoka

Fázový portrét

↑ 1 stoka
↑ 0 žriedlo
↓ -1 stoka

To sme už vedeli...

↑ $f > 0$
↑ 1 $f < 0$
↑ 0 $f > 0$
↓ -1 $f < 0$

Linearizácia v $\mathbb{R}^2$

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

Najme najdený $\vec{c} = (c_1, c_2)$ prvý bod

$$f(x, y) = f(\vec{c}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{c})(x - c_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{c})(y - c_2) + \dots$$

$$g(x, y) = g(\vec{c}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{c})(x - c_1) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{c})(y - c_2) + \dots$$

Posuneme $\vec{c}$ do nuly $x - c_1 = w$
 $y - c_2 = v$

$$w' = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{c})w + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{c})v = aw + bv$$

$$v' = \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{c})w + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{c})v = cw + dv$$

Lineárna sústava

Matrica $DF(\vec{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{c}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{c}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{c}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{c}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrica linearizácie

Podľa hodnôt Det a $\frac{\text{Tr}}{2}$ vieme určiť typ prvého bodu linearizácie a podľa nepadne na „čiaru“, tak aj prvý bod pôvodného systému

