

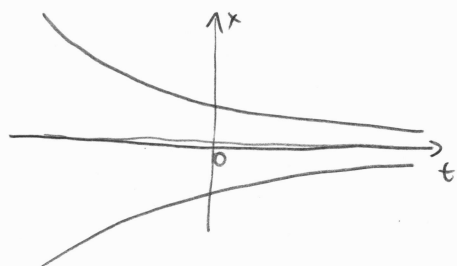
O kvalitatívnych vlastnostiach autonómnej dif. rovnice

$$x' = f(x)$$

Príklad 1

$$x' = -x$$

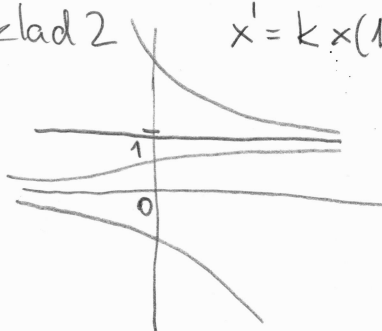
Priemet na zvislú os



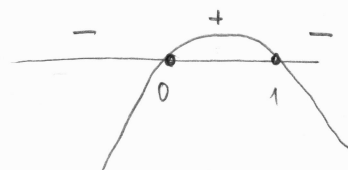
Príklad 2

$$x' = kx(1-x)$$

$$k > 0$$



$$f(x) = kx(1-x)$$



Pevný bod c :

Ak $x(t) = c$ je konšt. riešenie, c voláme pevný bod

Orbita :

Ak $x(t)$ je riešenie, tak (množinu) $\{x(t); t \in I\}$ voláme orbita.

Fázový portrét

Orientovanú krivku

Kvalitatívna ekvivalencia FP

Príklad 3

$$x' = -x^3$$



Hovoríme, že FP z Pr1 a z Pr3 sú kvalitatívne ekvivalentné

$$\left(\text{Hoci} \int_{-x_0}^{x(t)} \frac{x'}{-x^3} dx = \int_{t_0}^t 1 ds = t - t_0 \quad - \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{y^3} dy = \left[\frac{1}{2} y^{-2} \right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x_0^2} = t - t_0 \right.$$

$$x(t)^2 = \frac{1}{2t - 2t_0 + \frac{1}{x_0^2}}$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2t - c}}$$

$$c = 2t_0 - \frac{1}{x_0^2}$$

Fázové portréty nazývame kvalitatívne ekvivalentné na A , ak existuje spojitá bijekcia $A \rightarrow A$, ktorá zobrazuje orbity na orbity a zachováva ich orientáciu.

Úloha: Koľko je rôznych fázových portrétov s jedným perným bodom?



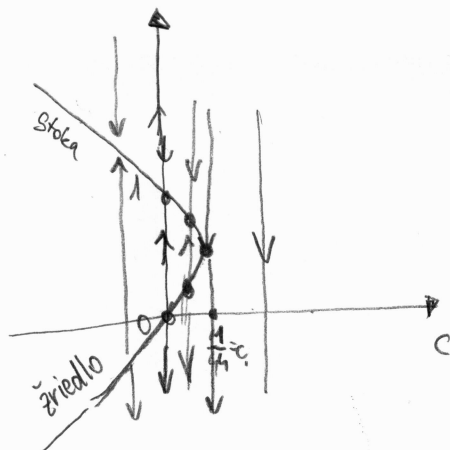
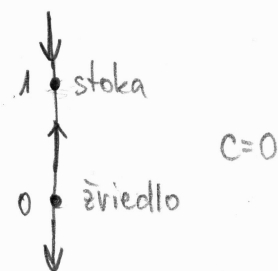
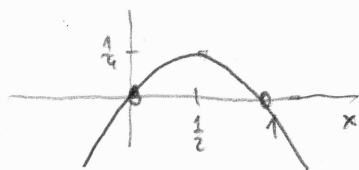
stoka žriedlo sedlo

Diferenciálna rovnica 1. rádu s parametrom

Príklad. Logistická rovnica s ľavom

$$x' = x(1-x) - c$$

$$f(x) = x(1-x)$$



kritická hodnota parametra c je $c_0 = \frac{1}{4}$

Bifurkácia stoka - žriedlo

Standardný tvar

$$x' = -x^2 + x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - c = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - c\right)$$

$$y' = -y^2 + p$$

$$y = x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - c = p$$

$p > 0$ stoka a žriedlo
 $p = 0$ sedlo
 $p < 0$ žiadny perný bod

Systémy LDR v rovine $\mathbb{R}^2$

Homogénny systém s konštantnými koeficientami

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\end{aligned}$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{prícom} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Príklad

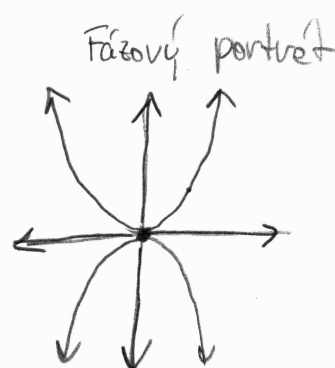
$$x' = x$$

$$y' = 2y$$

$$x(t) = x_0 e^t$$

$$y(t) = y_0 e^{2t}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$



Príklad

$$x' = 2x + y$$

$$y' = x + 2y$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hľadáme riešenie v tvare $\vec{x} = \vec{v} \cdot e^{\lambda t}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \vec{v} e^{\lambda t}$$

$$\lambda \vec{v} = A \vec{v}$$

$$(A - \lambda I) \vec{v} = 0$$

$\vec{v}$ - vlastný vektor $\vec{v} \neq 0$
 λ - vlastné číslo

Ne nulové riešenie - $\det(A - \lambda I) = 0$

Charakteristická rovnica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

Vlastné čísla
matice A

Pre $\lambda_1 = 1$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0 \\ v_2 &= -v_1 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_1$$

Riešenie $x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

Pre $\lambda_2 = 3$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ v_2 &= v_1 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_1$$

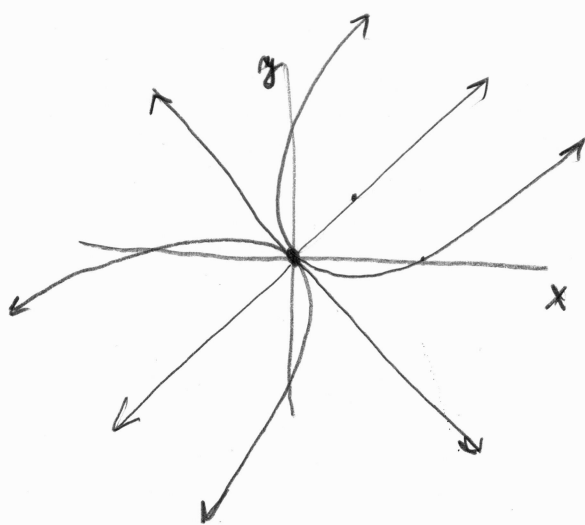
Riešenie $x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

Všeobecné riešenie

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

$$y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$



Prvý bod je typu
žriedlo

Napr.: $c_1 = 1$ $c_2 = 1$

$$x(t) = e^t + e^{3t}$$

$$y(t) = -e^t + e^{3t}$$

Pre $t=0$ $x(0)=2$

$y(0)=0$

$$x+y = 2e^{3t}$$

$$x-y = 2e^t$$

$$\frac{x+y}{2} = \left(\frac{x-y}{2} \right)^3$$

$$x+y = \frac{1}{4} (x-y)^3$$

$$w = \frac{1}{4} w^3$$

Príklad. $x' = x - 2y$
 $y' = 3x - 4y$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

Pre $\lambda_1 = -1$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - 2v_2 \\ 3v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} = 0$ $v_1 - v_2 = 0$
 $v_2 = v_1$

Riešenie
 $x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Pre $\lambda_2 = -2$ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ 3v_1 - 2v_2 \end{pmatrix} = 0$ $2v_2 = 3v_1$ $x_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$



Pevný bod $(0,0)$ je typu
 Stoka

Príklad
$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 4x + 3y \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

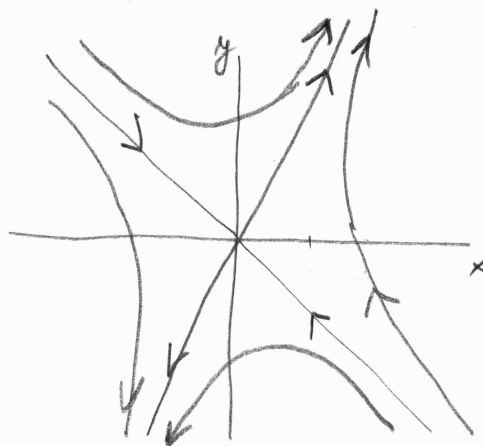
$$\lambda_2 = 5 \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Všeobecné riešenie

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$$



sedlo

Podľa znamienok koeficientov vieme rozoznať typ
pevného bodu $[0,0]$.

Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ tak $[0,0]$ žriedlo

Ak $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ tak $[0,0]$ stoka

Ak $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ tak sedlo

Sú aj iné možnosti?

Príklad
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexne združené korene

$$\lambda_1 = i \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-v_1 i + v_2 = 0$$

Zvoľme $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = i$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}$$

pre $\lambda_2 = -i$ dostaneme tým istým postupom komplexne združený výsledok.

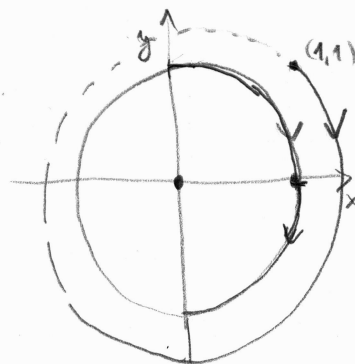
$$x_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t \\ -\sin t - i \cos t \end{pmatrix}$$

Lineárna kombinácia: $\frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \quad \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t))$

$$\operatorname{Re} x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \operatorname{Im} x_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Všeobecné riešenie

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



Stred

Príklad.
$$\begin{aligned} x' &= x - 2y \\ y' &= 5x - y \end{aligned}$$

Nájdite všeobecné riešenie, načrtnite fázový portrét.