

Metóda Mocninových Radov (MMR)

Úloha

$$b_0(t)x'' + b_1(t)x' + b_2(t)x = f(t)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = x_1$$

Dva prípady 1. $b_0(t_0) \neq 0$ vtedy t_0 sa volá regulárny bod

vtedy funguje MMR

2. $b_0(t_0) = 0$ rozoberieme v nasledujúcej kapitole.Riešenie v okolí regulárneho bodu

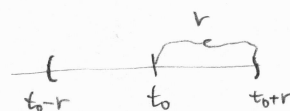
Veta. Rovnica $b_0(t)x'' + b_1(t)x' + b_2(t)x = f(t)$ s analytickými koeficientami $b_i(t)$ a vstupom $f(t)$ má pre každú dvojicu zač. podmienok

$$x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = x_1$$

riešenie v okolí regulárneho bodu t_0

Toto riešenie má tvar

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$



prícom rad konverguje na intervale (t_0-r, t_0+r) kde polomer konvergencie $r > 0$ je vzdialenosť po 1. nulový bod funkcie $b_0(t)$ v komplexnej rovine.

Príklad.

31

$$x'' + t^2 x = 0$$

$$t_0 = 0$$

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$$

$$x'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m t^{m-1}$$

$$x''(t) = \sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1) t^{m-2}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1) t^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+2} = 0$$

$$t^0: a_2 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad a_2 = 0$$

$$t^1: a_3 \cdot 3 \cdot 2 = 0 \quad a_3 = 0$$

$$t^2: a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_0 = 0 \quad a_4 = -\frac{a_0}{4 \cdot 3}$$

$$t^3: a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_1 = 0 \quad a_5 = -\frac{a_1}{5 \cdot 4}$$

$$t^4: a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_2 = 0 \quad a_6 = 0$$

$$t^6: a_8 \cdot 8 \cdot 7 + a_4 = 0 \quad a_8 = -\frac{a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$t^7: a_9 \cdot 9 \cdot 8 + a_5 = 0 \quad a_9 = -\frac{a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$a_{12} = -\frac{a_0}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$a_{13} = -\frac{a_1}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 t - a_0 \frac{1}{4 \cdot 3} t^4 - a_1 \frac{1}{5 \cdot 4} t^5 + a_0 \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} t^8 + a_1 \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} t^9 + \dots =$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3} t^4 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} t^8 - \dots \right) + a_1 \left(t - \frac{1}{5 \cdot 4} t^5 + \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} t^9 - \dots \right) =$$

$$= a_0 \varphi_1(t) + a_1 \varphi_2(t)$$

Prítom $\varphi_1(0) = 1 \quad \varphi_1'(0) = 0$
 $\varphi_2(0) = 0 \quad \varphi_2'(0) = 1$

duo lin. nezávislé riešenia

Príklad. $(t^2 - 9)x'' + 3tx' - 3x = 0 \quad t_0 = 0$

Príklad.

$$x'' + t^2 x = t^2 + 1 \quad t_0 = 0$$

32

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = t^2 + 1$$

$$t^0 \quad 2 \cdot 1 a_2 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$t^1 \quad 3 \cdot 2 a_3 = 1 \quad a_3 = 0$$

$$t^2 \quad 4 \cdot 3 a_4 + a_0 = 1 \quad a_4 = -\frac{a_0}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3}$$

$$t^3 \quad 5 \cdot 4 a_5 + a_1 = 0 \quad a_5 = -\frac{a_1}{5 \cdot 4}$$

$$t^4 \quad 6 \cdot 5 a_6 + a_2 = 0 \quad a_6 = -\frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$t^5 \quad 7 \cdot 6 a_7 + a_3 = 0 \quad a_7 = 0$$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{a_0}{4 \cdot 3} t^4 + \frac{1}{4 \cdot 3} t^4 - \frac{a_1}{5 \cdot 4} t^5 - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 2} t^6 + \dots =$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3} t^4 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} t^8 - \dots \right) + a_1 \left(t - \frac{1}{5 \cdot 4} t^5 + \frac{1}{9 \cdot 8} t^9 - \dots \right) + \left(\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4 \cdot 3} t^4 - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 2} t^6 + \dots \right)$$

$$= a_0 \varphi_1(t) + a_1 \varphi_2(t) + x_{\text{part}}(t)$$

Problém Hermitova rovnica

$$x'' - 2tx' + 2px = 0 \quad t_0 = 0 \quad p \text{ je parameter}$$

a, Riešte všeobecne

b, Pre hodnoty $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ nájdite riešenia s korečným rozvojom - Hermitove polynómy

Slabá singularita $b_0(t_0) \neq 0$ $\frac{b_1(t_0)}{b_0(t_0)}$ má pól rádu najviac 1
 $\frac{b_2(t_0)}{b_0(t_0)}$ — 1 — 2

Veta Rovnica $b_0(t)x'' + b_1(t)x' + b_2(t)x = f(t)$ má v okolí slabo singulárneho bodu t_0 (pri analytických koeficientoch a vstupe $f(t)$) riešenie v tvare zovšeobecneného mocninového radu

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^{n+c}$$

v ktorom je $a_0 \neq 0$ a c je vhodná konštanta.

Rad konverguje na $(t_0-r, t_0) \cup (t_0, t_0+r)$ pričom r je vzdialenosť po najbližší nulový bod koeficientu $b_0(t)$ [rôzny od t_0].

Príklad Besselova dif. rovnica

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0 \quad t_0 = 0$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+c} \quad x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) t^{n+c-1} \quad x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) t^{n+c-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) t^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) t^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+c+2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+c} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+c)^2 - \frac{1}{4} \right] t^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+c+2} = 0$$

$t^c: a_0 (c^2 - \frac{1}{4}) = 0$ ALE $a_0 \neq 0! \Rightarrow c^2 - \frac{1}{4} = 0$ Indikujúca rovnica
 $c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = -\frac{1}{2}$

$c_1 = \frac{1}{2} \quad t^{c+1} = t^{\frac{3}{2}}$

$a_1 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] t^{\frac{3}{2}} = 0 \quad a_1 = 0$

t^{c+2}

$a_2 \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] + a_0 = 0 \quad a_2 = -\frac{a_0}{6} = -\frac{a_0}{3 \cdot 2}$

$$t^{c+3} : a_3 = 0$$

$$t^{c+1} : a_4 \left[\left(\frac{9}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] + a_2 = 0 \quad a_4 = -\frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{20 \cdot 6} = \frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 t^{\frac{1}{2}} - a_0 \frac{1}{32} t^{2+\frac{1}{2}} + a_0 \frac{1}{5!} t^{4+\frac{1}{2}} - \dots = \\ &= a_0 \sqrt{t} \left(1 - \frac{1}{3!} t^2 + \frac{1}{5!} t^4 - \frac{1}{7!} t^6 + \dots \right) = a_0 \frac{1}{\sqrt{t}} \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= a_0 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = J_{\frac{1}{2}}(t) \end{aligned}$$

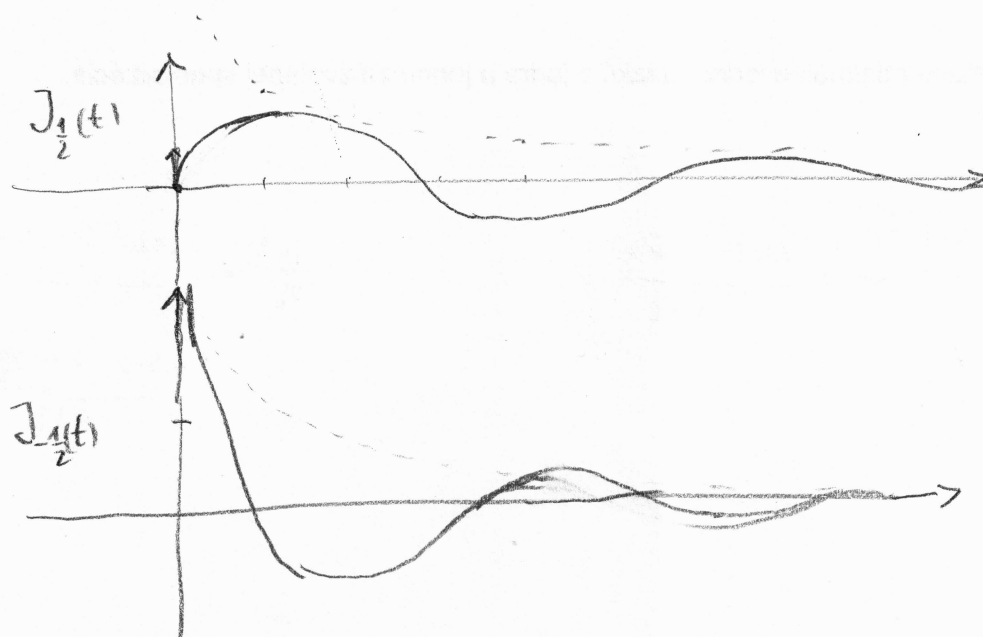
Druhé riešenie

$$c = -\frac{1}{2} \quad x(t) = a_0 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = J_{-\frac{1}{2}}(t) \quad (\text{Overte!})$$

Všeobecné riešenie

$$x(t) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(t) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

Úloha. Vypočítajte $J_0(t)$ z rovnice $t^2 x'' + t x' + t^2 x = 0$
 $J_1(t)$ $t^2 x'' + t x' + (t^2 - 1)x = 0$



Úloha. Riešte rovnicu $4t x'' + 3x' + 3x = 0$ v okolí bodu $t_0 = 0$