Metóda variácii konštánt je dostatočne všeobecná (ak vieme vypočítať príslušné integrály pre $c_i(t)$, tak dostaneme riešenie) ale aj zdĺhavá.

Pri porovnaní vstupu $f(t) = e^t$ a partikulárneho riešenia $\frac{1}{5}e^t$ sa zdá, že v prípade exponenciálneho vstupu, tvar výstupu korešponduje so vstupom.

Metóda špeciálnej pravej strany.

Veta. Ak vstup $f(t)$ v rovnici $x'' + ax' + bx = f(t)$ má tvar

$f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$ kde P_m je polynóm stupňa m a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak partikulárne riešenie $x_p(t)$ má tvar

$x_p(t) = Q_m(t) \cdot t^k \cdot e^{\alpha t}$ kde Q_m je polynóm stupňa m (jeho koeficienty treba ešte nájsť) a k je tzv. násobnosť α (t.j. počet výskytov α medzi koreňmi λ_i charakteristickej rovnice.

Poznámka. V rovnici 2. rádu môže byť $k \in \{0, 1, 2\}$.

Príklad 1. $x'' + 2x' + 2x = e^t$

Homogénna rovnica je

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

Jej charakteristická

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Teda $x_h(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$

Hľadajme partikulárne riešenie. Vstup $f(t) = 1 . e^{1t}$ preto stupeň polynómu $m = 0$, $\alpha = 1$, a $\alpha \neq \lambda_1 \wedge \alpha \neq \lambda_2$ preto $k = 0$

Tvar riešenia (Veta) je

$$x_p(t) = Q_0(t) \cdot t^0 \cdot e^{1t} = A . e^t$$

A je polynóm 0-tého stupňa s neurčeným koeficientom, teda neznáma konštanta

Dosadením do rovnice určíme hodnotu A

$x_p(t) = Ae^t \qquad x_p' = Ae^t \qquad x'' = Ae^t$

$$x'' + 2x' + 2x = e^t$$

$$Ae^t + 2Ae^t + 2Ae^t = e^t$$

$$5A = 1$$

$$x_p(t) = \frac{1}{5}e^t$$

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t + \frac{1}{5}e^t$$

Príklad 2 $\quad x'' + 2x' + 2x = t^2$

$x_h = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$ (viď Pr 1.)

Partikulárne riešenie pre vstup $f(t) = t^2$

$x_p(t) = Q_2(t)\cdot t^0 \cdot e^{0t} = At^2 + Bt + C$ $\qquad$ pretože $m=2$, $\alpha=0$, $k=0$

Opäť dosadíme do rovnice $\qquad x_p'(t) = 2At + B$

$x_p''(t) = 2A$

$$2A + 2(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2$$

$$2At^2 + (4A + 2B)t + (2A + 2B + 2C) = 1t^2 + 0t + 0$$

a porovnaním koeficientov (Overte) dostaneme:

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -1 \qquad C = \frac{1}{2}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$$

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$$

Príklad 3 $\quad x'' + 2x' + 2x = e^t + t^2$

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$$

(Spojenie príkladov 1 a 2)

Princíp superpozície

Ak $\quad x_h(t)$ je riešením homogénnej rovnice $\quad x'' + ax' + bx = 0$,
$x_{p_1}(t)$ — ‖ — nehomogénnej — ‖ — $\quad x'' + ax' + bx = f_1(t)$
$x_{p_2}(t)$ — ‖ — $\quad x'' + ax' + bx = f_2(t)$

tak $\quad x(t) = x_h(t) + x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$
je riešením nehomogénnej rovnice
$$x'' + ax' + bx = f_1(t) + f_2(t).$$

Dôkaz dosadením

Príklad 4 $\quad x'' + 4x = \cos t$

Použijeme pomocnú rovnicu
$x'' + 4x = e^{it}$ $\quad$ v ktorej sme zvolili $f(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$

Teraz $\quad x'' + 4x = 0$
$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{12} = \pm 2i$
$x_h(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$

Partikulárne riešenie (pomocnej rovnice) bude v tvare
$\{m = 0 \;,\; \alpha = i \;,\; k = 0\}$
$x_p(t) = A.t^0 e^{it}$

Dosadením $\quad x_p'' = -Ae^{it}$

$-Ae^{it} + 4Ae^{it} = e^{it}$
$3A = 1 \qquad A = \frac{1}{3}$

$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{it}$

Pretože $\cos t$ je reálna časť vstupu e^{it} pomocnej rovnice (a derivovaním reálna časť zostáva reálnou a imag. imaginárnou)

je $\quad \mathrm{Re}\, x_p(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3}e^{it}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3}(\cos t + i\sin t)\right\} = \frac{1}{3}\cos t$

partikulárne riešenie pôvodnej rovnice

Preto

$$x(t) = c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\cos t$$

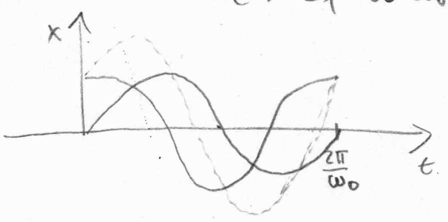
Metóda špeciálnej pravej strany je použiteľná na vstupy, ktoré majú konečný rozvoj do Fourierovho radu a aproximatívne aj pre vstupy s nekonečným rozvojom do FR.

Môžeme si všimnúť súvislosť s F. transformáciou a tiež s filtrovaním.

Kvalitatívne vlastnosti LDR 2. rádu

Homogénna. <u>Bez tlmenia</u> $\quad x'' + \omega_0^2 x = 0$

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t = A\cdot\cos(\omega_0 t - \varphi)$$



<u>S tlmením</u> $\quad 2h > 0$

$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$

$h < \omega \quad x(t) = e^{-ht}(c_1\cos\omega t + c_2 \sin\omega t) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$

Nehomogénna so vstupom $f(t) = A\cos\omega t$

Bez tlmenia $\qquad x'' + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$

$$x_h(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Partikulárne riešenie

$$x'' + \omega_0^2 x = Ae^{i\omega t}$$

prípad $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = a\,e^{i\omega t}$$

$$-a\omega^2 + \omega_0^2 a = A$$

$$a = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\mathrm{Re}\,x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

$$x_h(t) = \underbrace{(c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t)}_{\text{frekvencia } \omega_0} + \underbrace{\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t}_{\text{frekvencia } \omega}$$

prípad $\omega = \omega_0$

$$x(t) = at\,e^{i\omega_0 t}$$

$$x' = a e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 a t e^{i\omega_0 t}$$

$$x'' = 2i\omega_0 a e^{i\omega_0 t} - a t \omega_0^2 e^{i\omega_0 t}$$

$$2i\omega_0 a - at\omega_0^2 + \omega_0^2 at = A$$

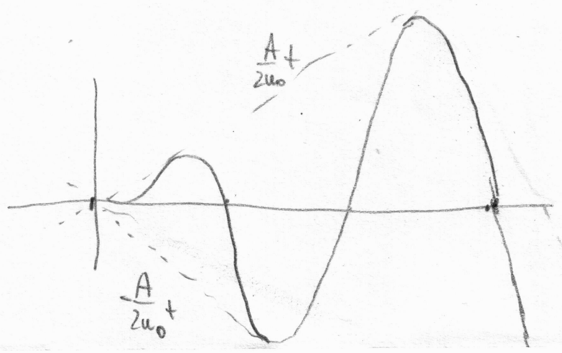
$$a = \frac{A}{2i\omega_0}$$

$$\mathrm{Re}\,x(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{A}{2i\omega_0} t e^{i\omega_0 t}\right\} = \frac{At}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$$x_h(t) = (c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin\omega_0 t$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$



S tlmením $\quad x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$

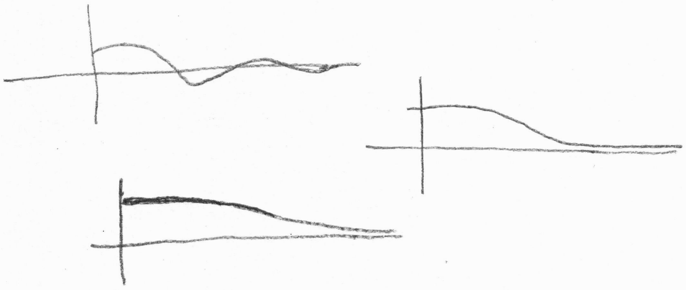
$x_h(t) \to 0$ pre $t \to \infty$ $\qquad \lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$

bez ohľadu na to ktorý z troch prípadov nastane:

I $\quad h < \omega_0$

II $\quad h = \omega_0$

III $\quad h > \omega_0$



Prejaví sa (dlhodobo) len partikulárne riešenie

$x_p(t) = ?$ $\qquad x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = Ae^{i\omega t}$

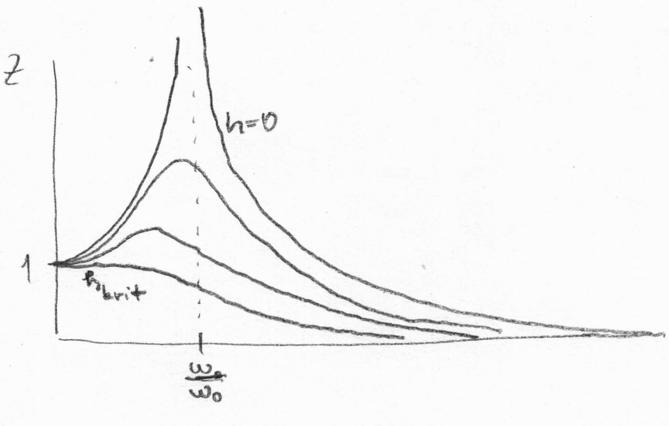
$x_p(t) = a e^{i\omega t} \qquad x_p'(t) = a i\omega e^{i\omega t} \qquad x_p''(t) = -a\omega^2 e^{i\omega t}$

$$-a\omega^2 + 2hia\omega + \omega_0^2 a = A$$

$$a = \frac{1}{2hi\omega + (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2hi\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} A$$

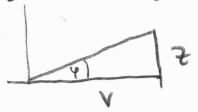
$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} A\cos\omega t + \frac{2h\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} A\sin\omega t =$$

$$= A \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}}_{\text{zosilnenie}} \cos(\omega t - \varphi)$$



Doplnok k téme Amplitúda a Zosilnenie.

1. Pre hocijaké dve kladné čísla $v>0$ a $z>0$, vieme zostaviť pravouhlý trojuholník s odvesnami vodorovnou v a zvislou z.



Prepona má veľkosť $A_0 = \sqrt{v^2+z^2}$.

Teraz je $v = A_0 \cos\varphi$

$z = A_0 \sin\varphi$

2. Vo všeobecnom riešení typu $c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

vieme zvoliť $c_1 = A_0 \cos\varphi$

$c_2 = A_0 \sin\varphi$ (ak je niektoré číslo c_1, c_2 záporné volíme uhol φ z II, III alebo IV kvadrantu)

Potom $c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A_0(\cos\varphi \cos\omega t + \sin\varphi \sin\omega t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi)$

amplitúda x_h

3. Ak nám partikulárne riešenie vyšlo

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}_{c_1} A\cos\omega t + \underbrace{\frac{2h\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}_{c_2} A\sin\omega t$$ tak

označme

a $x_p(t) = A \cdot A_0 \cos(\omega t - \varphi)$ pričom $A_0 = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$

Počítajme
$$A_0 = \sqrt{\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{2h\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}$$

Toto je koeficient zosilnenia z prednášky