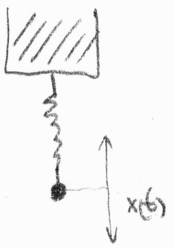
Lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu

LDR 2.r. s konštantnými koeficientami



$$m x'' = -kx$$

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \qquad \text{prípadne} \qquad x'' + cx' + \frac{k}{m} x = 0$$

Homogénna LDR 2r

$$x'' + a x' + bx = 0 \qquad \text{(HLDR)}$$

Začiatočné podmienky

$$x(t_0) = x_0 \qquad x'(t_0) = x_1$$

Úvaha: Ak $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú riešenia (HLDR)

$$x_1'' + a x_1' + b x_1 = 0$$
$$x_2'' + a x_2' + b x_2 = 0$$

$$c_1 x_1'' + c_2 x_2'' + a(c_1 x_1' + c_2 x_2') + b(c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0$$

Teda

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$x'' + a x' + bx = 0$$

a $x(t)$ je tiež riešenie.

Priestor riešení je lineárny podpriestor (čoho: $C^2(R)$)

Ak $x_1(t)$ splňa podmienky $x_1(t_0) = 1 \quad x_1'(t_0) = 0$
a $x_2(t)$ $\quad x_2(t_0) = 0 \quad x_2'(t_0) = 1$

tak $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú lineárne nezávislé.

Každé ďalšie riešenie $x_3(t)$ splňa začiatočné podmienky
$$x_3(t_0) = c_0 \quad x_3'(t_0) = c_1 .$$

Ale tie isté podmienky splňa aj riešenie

$$x(t) = c_0 x_1(t) + c_1 x_2(t)$$

Z jednoznačnosti potom plynie

$$x_3(t) = c_0 x_1(t) + c_1 x_2(t)$$

Teda každé ďalšie riešenie je lineárnou kombináciou $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Priestor riešení je dvojrozmerný lineárny podpriestor

Záver: Stačí nájsť (niektoré) dve lineárne nezávislé riešenia $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ a poznáme všetky
$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

Pokus: Hľadajme riešenie rovnice
$$x'' + ax' + bx = 0 \qquad (D)$$

v tvare $x(t) = e^{\lambda t}$ $\quad\lambda$ - konštanta $\quad \lambda = ?$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad \text{Charakteristická rovnica (CH)}$$

Tvrdenie: Ak λ je koreňom (CH), tak
$$x(t) = e^{\lambda t}$$
je riešením (D).

Príklad 1. $x'' + 3x' + 2x = 0$

Char. rovnica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ GH

Korene $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$

Riešenia $\varphi_1(t) = e^{-2t} \quad \varphi_2(t) = e^{-t}$ sú lin. nezávislé

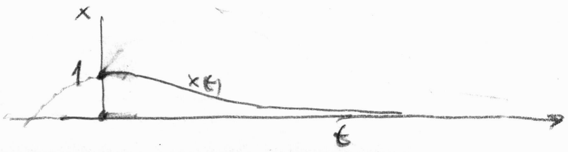
Všeobecné riešenie (všetky riešenia)

$$\underline{x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}}$$

Ak by sme pridali zač. podmienky $x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$

tak
$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 0 &= -2c_1 - c_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1 \quad c_2 = 2 \quad \text{a}$$

$$x(t) = -1e^{-2t} + 2e^{-t}$$



Príklad 2. $x'' + 2x' + 2x = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ (Ch)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$\varphi_1(t) = e^{(-1+i)t} = e^{-t} e^{it} = e^{-t}(\cos t + i \sin t)$$
$$\varphi_2(t) = e^{(-1-i)t} = e^{-t} e^{-it} = e^{-t}(\cos t - i \sin t).$$

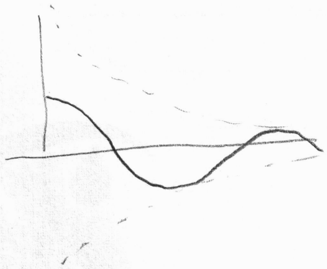
$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = e^{-t}\cos t$$

sú tiež riešenia

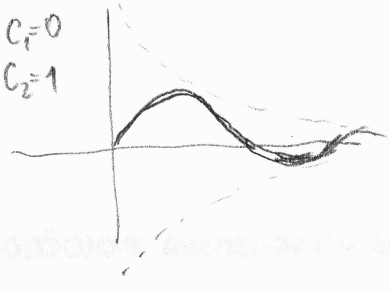
$$\tfrac{1}{2i}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = e^{-t}\sin t$$

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t = Ae^{-t}\cos(t-\alpha)$$

$c_1 = 1$
$c_2 = 0$



$c_1 = 0$
$c_2 = 1$



Príklad 3. $x'' + 2x' + x = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ (CH)

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$\varphi_1(t) = e^{-t}$ $\varphi_2(t) = ?$ Hľadajme v tvare $\varphi_2(t) = c(t)\cdot e^{-t}$

$\varphi_2'(t) = c'e^{-t} - ce^{-t}$

$\varphi_2''(t) = c''e^{-t} - 2c'e^{-t} + ce^{-t}$

$$e^{-t}\left[c'' - 2c' + c + 2(c' - c) + c\right] = 0$$

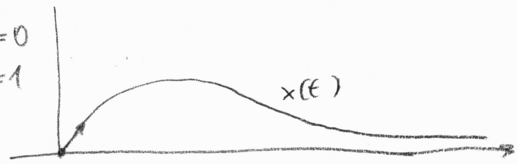
$$c''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(t) = at + b$$

Stačí jedno lineárne nezávislé

$\varphi_2(t) = te^{-t}$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$c_1 = 0$
$c_2 = 1$



Všeobecný výsledok: Majme rovnicu

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Ak $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ charakteristická rovnica

má ① 2 rôzne reálne korene $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$

Ⅱ komplexne združené korene $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, tak

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\omega t + c_2 e^{\alpha t}\sin\omega t}$$

Ⅲ dvojnásobný koreň $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tak

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}}$$

Nehomogénna LDR. 2. rádu

$$x'' + ax' + bx = f(t) \quad (N)$$

a, b - konštanty
$f(t): I \to R$

Úvaha: Ak $y_1(t)$ aj $y_2(t)$ sú riešenia.

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = f(t)$$
$$y_2'' + ay_2' + by_2 = f(t)$$

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0$$

Rozdiel $x_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$ je riešením homogénnej rovnice

Teda: Ak poznáme jedno riešenie $y(t)$ rovnice (N), tak všetky ostatné sa líšia od neho o $x_h(t)$ riešenie príslušnej homogénnej rovnice

Ako nájsť $y(t)$?

Metóda variácie konštánt.

Položme $y(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ $\quad \varphi_1, \varphi_2$ sú lin. nezávislé riešenia (H)

$$y'(t) = c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2'$$

Zvoľme $\boxed{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0}$

$$y''(t) = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2''$$

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + a(c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2') + b(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = f(t)$$

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1(\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1) + c_2(\varphi_2'' + a\varphi_2'' + b\varphi_2) = f(t)$$

$$\boxed{c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = f(t)}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Inv. matica $\dfrac{1}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} \begin{pmatrix} \varphi_2' & -\varphi_2 \\ -\varphi_1' & \varphi_1 \end{pmatrix}$

Ozn $W(t) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$

$$C_1'(t) = \frac{-\varphi_2(t) f(t)}{W(t)} \qquad C_1(t) = \int_0^t \frac{-\varphi_2(s) f(s)}{W(s)} ds$$

$$C_2'(t) = \frac{\varphi_1(t) f(t)}{W(t)} \qquad C_2(t) = \int_0^t \frac{\varphi_1(s) f(s)}{W(s)} ds$$

$$y(t) = \left(\int_0^t \frac{-\varphi_2(s) f(s)}{W(s)} ds \right) \varphi_1(t) + \left(\int_0^t \frac{\varphi_1(s) f(s)}{W(s)} ds \right) \varphi_2(t)$$

Partikulárne riešenie

Príklad $x'' + 4x' + 4x = e^t$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -2 \qquad x_H(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix} = (1 - 2t + 2t)\, e^{-4t} = e^{-4t}$$

$$C_1(t) = \int \frac{-te^{-2t} e^t}{e^{-4t}} dt = -\int \underset{g\ f'}{t e^{3t}} dt = -\left[\frac{1}{3} e^{3t} \cdot t - \int \frac{e^{3t}}{3} dt\right] = -\frac{1}{3} t e^{3t} + \frac{1}{9} e^{3t}$$

$$C_2(t) = \int \frac{e^{-2t} e^t}{e^{-4t}} dt = \frac{1}{3} e^{3t}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{9} e^{3t} - \frac{1}{3} t e^{3t}\right) e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{3t} \cdot t \cdot e^{-2t} = \frac{1}{9} e^t$$

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}}_{\text{Všeobecné riešenie homogénnej LDR}} + \underbrace{\frac{1}{9} e^t}_{\text{Partikulárne riešeni nehomogénnej LDR}}$$