

V. Všeobecný tvar nelineárnej dif. rovnice 1. rádu

$$x' = f(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Príklad. $x' = x^2 + t^2$
 $x(0) = 0$

Nemáme analytickú metódu riešenia.

Myslienka:

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t (x(s)^2 + s^2) ds$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t x(s)^2 + s^2 ds = \int_0^t x(s)^2 + s^2 ds$$

Od rovnice prejdeme k schéme

$$x_{m+1}(t) = \int_0^t x_m(s)^2 + s^2 ds$$

Štartovná funkcia $x_0(t) = 0$

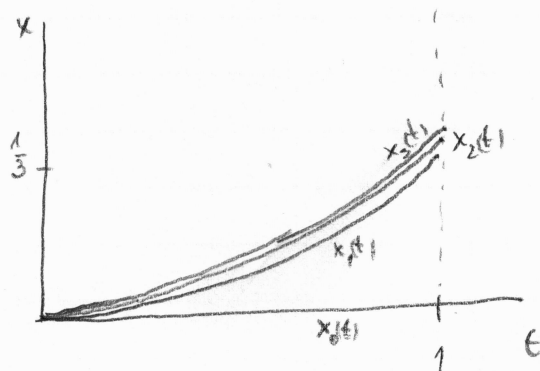
Iterácie

$$x_1(t) = \int_0^t 0^2 + s^2 ds = \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{3}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \left(\frac{s^3}{3} \right)^2 + s^2 ds = \frac{t^7}{7 \cdot 3^2} + \frac{t^3}{3}$$

$$x_3(t) = \int_0^t \left(\frac{s^7}{7 \cdot 3^2} + \frac{s^3}{3} \right)^2 + s^2 ds = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 3^2} + 2 \frac{t^{11}}{11 \cdot 7 \cdot 3^3} + \frac{t^{15}}{15 \cdot 7^2 \cdot 3^4}$$

Konvergenca?



na akom intervale?

Príklad 1. Počítajte iteráciým postupom úlohu

$$x' = tx^2 + 1$$

$$x(1) = 2$$

Príklad 2. $x'' + tx = 0$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

"Trik"

Označme

$$x' = y$$

$$x(0) = 1$$

dostaneme

$$y' = -tx$$

$$y(0) = 0$$

$$x_{n+1} = 1 + \int_0^t y_n(s) ds$$

$$y_{n+1} = 0 + \int_0^t -s x_n(s) ds$$

Skúste nájsť riešenie v tvare radu.

Príklad 3.

$$x'' + 2tx' + x = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 1$$

Otázka existencie a jednoznačnosti riešenia.

$$x'(t) = f(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Iteračná schéma $x_0(t)$ - zvolíme (napr. $x_0(t) \equiv x_0$)

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds$$

Ak $x_n(t)$ konverguje na nejakom intervale tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

konverguje k riešeniu.

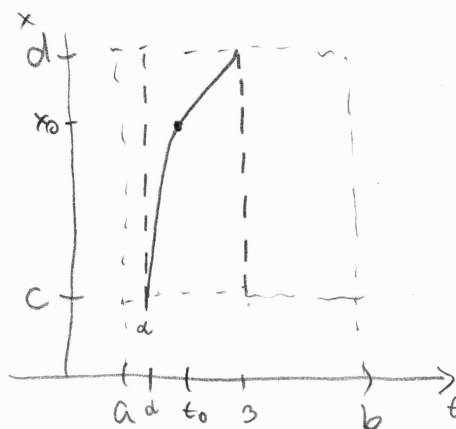
Veta (Piccard) Ak funkcia $f(t, x)$ je na obdĺžniku $(a, b) \times (c, d)$ spojitá a má spojitú deriváciu $\frac{\partial f}{\partial x}$,

tak začiatočná úloha $x' = f(t, x)$
 $x(t_0) = x_0$

$t_0 \in (a, b)$ $x_0 \in (c, d)$

má jediné riešenie definované na nejakom $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$

II. obrázok



Príklad 2. $x'' + tx = 0$

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$$

$$x' = y$$

$$x(0) = 1$$

$$y' = -tx$$

$$y(0) = 0$$

$$x_{m+1}(t) = 1 + \int_0^t y_m(s) ds$$

$$y_{m+1}(t) = - \int_0^t s x_m(s) ds$$

Start $x_0(t) = 1$

$$y_0(t) = 0$$

1. it

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t 0 ds = 1$$

$$y_1(t) = - \int_0^t s ds = -\frac{t^2}{2}$$

2. it

$$x_2(t) = 1 - \int_0^t \frac{s^2}{2} ds = 1 - \frac{t^3}{2 \cdot 3}$$

$$y_2(t) = - \int_0^t s ds = -\frac{t^2}{2}$$

3. it

$$x_3(t) = 1 - \int_0^t \frac{s^2}{2} ds = 1 - \frac{t^3}{2 \cdot 3}$$

$$y_3(t) = - \int_0^t s \left(1 - \frac{s^3}{2 \cdot 3}\right) ds = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

4. it

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t -\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{2 \cdot 3 \cdot 5} ds = 1 - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$y_4(t) = y_3(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Hypotéza

$$x_m(t) = 1 - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{t^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{3m}}{m!} \cdot \left[\prod_{i=1}^{m-1} (3i+1) \right]$$