

Príklad 2.

$$x' = \frac{1}{t(1-t)} x$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Teraz je $a(t) = \frac{1}{t(1-t)}$ definované na $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Zdôraznime, že riešenie diferenciálnej rovnice hľadáme vždy na intervale.

Z troch možností vyberieme ten, v ktorom leží $t_0 = \frac{1}{2}$.

Teda

$$x(t) = 1 \cdot e^{\int_{t_0}^t \frac{1}{s(1-s)} ds} \quad \text{pre } t \in (0, 1)$$

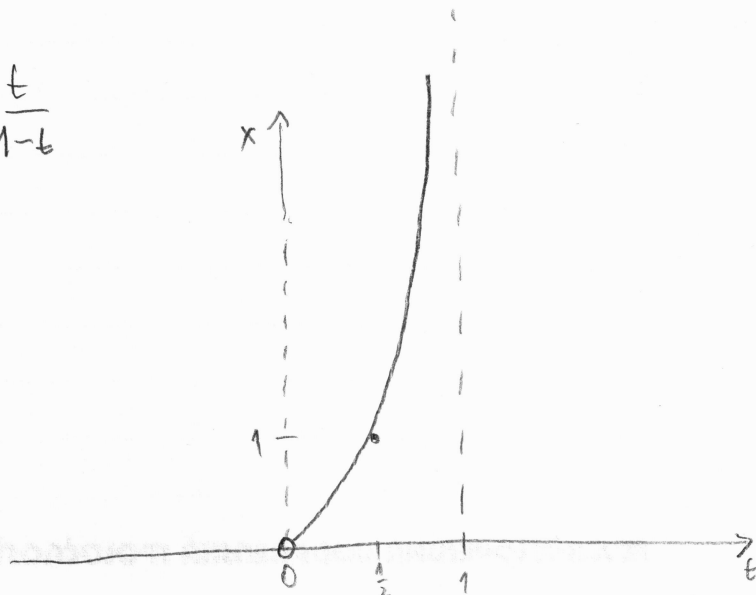
Zvyšok je pripomenutie integračných techník.

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$$\int \frac{1}{s(1-s)} ds = \int \frac{1}{s} ds + \int \frac{1}{1-s} ds = \ln s - \ln(1-s)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{s(1-s)} ds = \ln t - \ln(1-t) - \underbrace{\ln t_0}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\ln(1-t_0)}_{\frac{1}{2}} = \ln t - \ln(1-t) = \ln \frac{t}{1-t}$$

$$x(t) = e^{\ln \frac{t}{1-t}} = \frac{t}{1-t}$$



III Nehomogénna LDR 1. rádu

8

$$y' = a(t)y + f(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Homogénna časť $y' = a(t)y$ sa interpretuje ako charakterizácia systému a $f(t)$ ako vstup zvonku do systému.

Riešenie: 2 kroky

1. krok

$$x' = a(t)x$$

$$x(t_0) = y_0$$

wz vieme

$$x(t) = y_0 e^{A(t)}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

2. krok (variácia)

$$y' = a(t)y + f(t)$$

Hľadáme y_p ako $y_p(t) = c(t) \cdot e^{A(t)}$

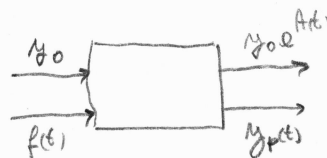
$$y_p' = c'(t) \cdot e^{A(t)} + c(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) = \underline{a(t) \cdot c(t) e^{A(t)}} + f(t)$$

$$c'(t) = \frac{f(t)}{e^{A(t)}}$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t \frac{f(s)}{e^{A(s)}} ds$$

Riešenie

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{A(t)}}_{\text{odozva na ZP}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{f(s)}{e^{A(s)}} ds \cdot e^{A(t)}}_{\text{odozva na vstup } f(t)}$$



Príklad. Infúzia

 $x(t)$ - koncentrácia lieku v čase t

$$x'(t) = -m x(t) + d$$

$$x(0) = 0$$

 $m > 0$ koeficient spotreby $f(t) = d$ dávkaRiešenie 1. krok $x'(t) = -m x(t)$

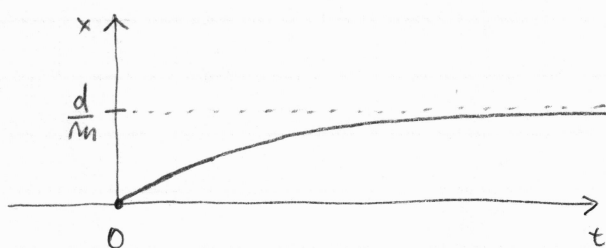
$$x(0) = 0$$

$$x_h(t) = 0 \cdot e^{-mt}$$

$$A(t) = \int_0^t -m ds = -mt$$

$$2. \text{ krok } \quad \dot{c}(t) = \int_0^t \frac{d}{e^{-ms}} ds = \int_0^t d \cdot e^{ms} ds = \frac{d}{m} (e^{mt} - 1)$$

$$x_p(t) = c(t) \cdot e^{-mt} = \frac{d}{m} (e^{mt} - 1) e^{-mt} = \frac{d}{m} (1 - e^{-mt})$$

Limitný stav $\frac{d}{m}$.Príklad 2 Káva má v čase $t_0 = 0$ teplotu 100°C Miestnosť má 20°C

Namodelujte rovnicu chladnutia kávy a riešte ju.

(koeficient tepelného toku určíte z údajov, že
v čase 5 minút mala káva 40°C)

Rovnica má tvar

$$x'(t) = f(t) \cdot g(x) \quad (\text{Def. obory})$$

Metódu riešenia predvedieme na príklade

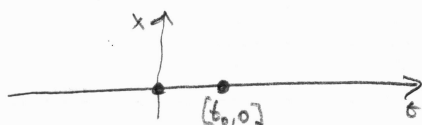
Príklad
$$x' = x^2 \cdot t$$

$$x(t_0) = x_0$$

I. možnosť ak $x_0 = 0$, tak $x(t) = 0$ je konštantné riešenie

žrejmé

$$0' = 0^2 \cdot t$$



II. možnosť ak $x_0 \neq 0$, tak ani $x(t) \neq 0$ na nejakom okolí t_0

$$\frac{x'}{x^2} = t$$

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x^2(s)} ds = \int_{t_0}^t s ds$$

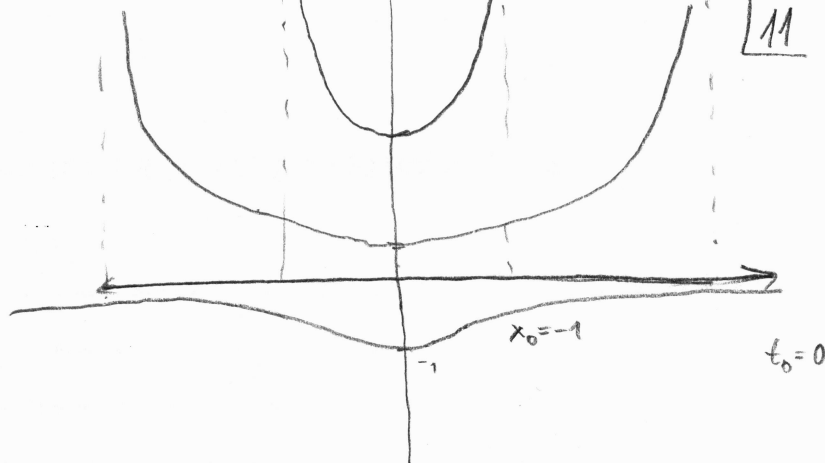
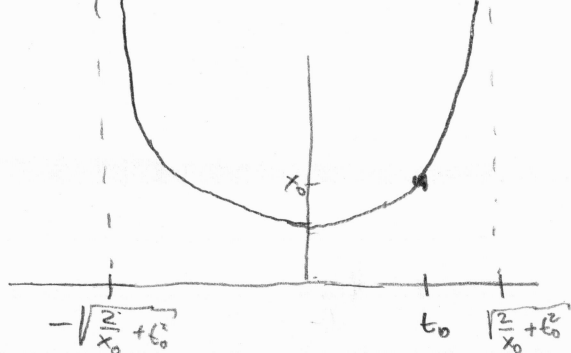
Subst.: $x(s) = y$
 $x'(s) ds = dy$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$$

$$\left[-\frac{1}{y} \right]_{x_0}^{x(t)} = -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{t^2}{2}}$$

Def. obor riešenia: $\left(-\sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2}, \sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2} \right)$, ak $\frac{2}{x_0} + t_0^2 > 0$



Existencia? Jednoznačnost?

Metóda - riešenia všeobecne: $x' = f(t) \cdot g(x)$

I. Ak x_0 je koreňom funkcie $g(x)$ [$g(x_0) = 0$], tak konštantná funkcia $x(t) \equiv x_0$ je riešením so začiatkovou podmienkou $x(t_0) = x_0$.

II Ak $g(x) \neq 0$ na intervale (c, d) , tak

$$\frac{x'}{g(x)} = f(t)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

Označme $\int_{t_0}^t f(s) ds = F(t)$

Označme $\int_{x_0}^x \frac{1}{g(y)} dy = G(x)$

Subst. $x(s) = y$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(y)} dy = F(t)$$

$$G(x(t)) = F(t)$$

Riešenie

$$x(t) = G^{-1}(F(t))$$

Príklad. Chemická reakcia

Látky A a B reagujú a vzniká C

Na začiatku v čase $t=0$ sú množstvá látok a, b.

Predpokladajme, že $b > a$.

$x(t)$ - množstvo zlúčeniny C v čase t

Úloha: $x'(t) = k \cdot (a - x(t)) \cdot (b - x(t))$
 $x(0) = 0$

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{(a-x(s))(b-x(s))} ds = \int_0^t k ds = kt$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{(a-y)(b-y)} dy = \int_0^{x(t)} \frac{\frac{1}{b-a}}{a-y} - \frac{\frac{1}{b-a}}{b-y} dy = kt$$

$$\frac{1}{b-a} [\ln(b-y) - \ln(a-y)]_0^{x(t)} = kt$$

$$\ln \frac{b-x(t)}{b} - \ln \frac{a-x(t)}{a} = (b-a)kt$$

$$\ln \left(\frac{b-x(t)}{a-x(t)} \cdot \frac{a}{b} \right) = (b-a)kt$$

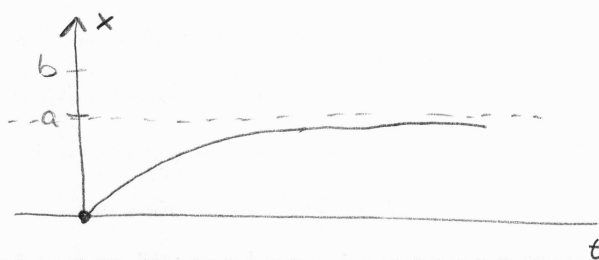
$$\frac{b-x(t)}{a-x(t)} = \frac{b}{a} e^{(b-a)kt} (=V)$$

$$b-x(t) = Va - Vx(t)$$

$$(V-1)x(t) = Va-b$$

$$x(t) = \frac{Va-b}{V-1} = \frac{\frac{b}{a} e^{(b-a)kt} - b}{\frac{b}{a} e^{(b-a)kt} - 1} = ab \frac{e^{(b-a)kt} - 1}{be^{(b-a)kt} - a}$$

$$t \rightarrow \infty \quad x(t) \rightarrow a$$



Všimnime si, že v poslednom príklade, sme na pravej strane nemali funkciu premennej t , takéto rovnice voláme autonómne.

Def. Rovnica $x' = g(x)$ je autonómna.

Ak $x(t)$ je riešenie autonómnej rovnice definované na $I = (a, b)$ spĺňajúce $x(t_0) = x_0$

tak každá funkcia $y(t) = x(t - \tau_0)$ je tiež riešením tej istej rovnice na intervale $I + \tau_0 = (a + \tau_0, b + \tau_0)$ a spĺňajúce podmienku $y(t_0 + \tau_0) = x_0$

Obrátkovo



Aj „skúška“: $y'(t) = x'(t - \tau_0) \cdot 1 = g(x(t - \tau_0)) = g(y(t))$

Bodované úlohy

1. Riešte úlohu chemickej reakcie pri $a=b$.
2. Riešte úlohu s logistickou rovnicou

$$x' = kx(1-x) \quad k > 0$$

$$x(0) = x_0$$

Rozlíšte 3 možnosti $a, x_0 > 1$

$b, x_0 = 1 \quad x_0 = 0$

$c, 0 < x_0 < 1$

Logistická rovnica modeluje populačný rast so započítaním spomalenia rastu vzhľadom na obmedzené zdroje.

(kx – rast $-kx^2$ – pokles)

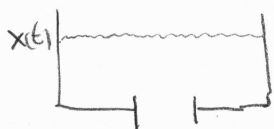
3. Logistická rovnica s „lovom“

$$X' = kx(1-x) - c$$

$$X(0) = X_0$$

$$c > 0$$

Príklad. Nádobka s otvorom na dne



A - prierez valcovej nádoby
 a - prierez otvoru
 $x(t)$ - výška hladiny v čase t

Úloha

$$x'(t) = -\frac{a}{A} \sqrt{2gx(t)}$$

g - gravitačná konštanta

$$x'(t) = -k \sqrt{x(t)}$$

$$x(t_0) = x_0$$

I. možnosť Ak $x_0 = 0$ (žiadna voda) tak $x(t) \equiv 0$ je riešenie.

II možnosť $x_0 > 0$

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = -k$$

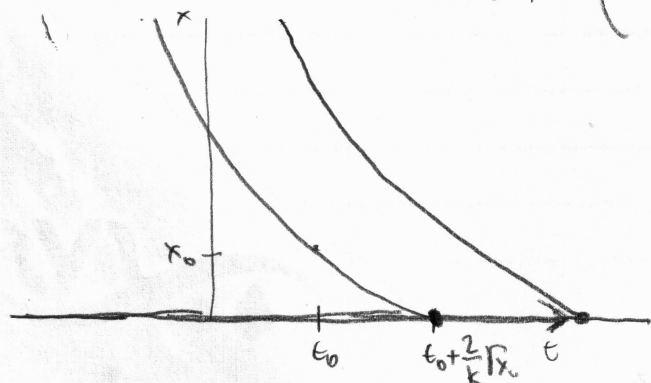
$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{\sqrt{x(s)}} ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int_{t_0}^t -k ds$$

$$\left[2\sqrt{y} \right]_{x_0}^{x(t)} = -k(t - t_0)$$

$$\sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} - \frac{k}{2}(t - t_0)$$

$$x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{k}{2}t_0 - \frac{k}{2}t \right)^2$$

$$D_x = (-\infty, t_0 + \frac{2}{k}\sqrt{x_0})$$



Existencia
 ale nie vždy Jednoznačnosť
 „zleporevanie“ riešení $\rightarrow D_x = R$