Parciálne diferenciálne rovnice.

neznáma funkcia je viacerých premenných
rovnica obsahuje parciálne derivácie neznámej funkcie

Lineárna parciálna diferenciálna rovnica 1. rádu

stavová premenná u je skalárnou funkciou viacerých premenných
$u(x,y)$ resp $w(x,t)$

Prúdenie a transportná rovnica.

u - hustota x - priestorová premenná
t - čas

Zákon zachovania na úsečke $\langle a,b\rangle$ v čase od t_1 po t_2

$$\int_a^b w(x,t_2) - w(x,t_1)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(a,t) - \varphi(b,t)\, dt + \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} f(x,t)\, dt\, dx$$

$\varphi(x,t)$ je tok v bode x v čase t
$f(x,t)$ je funkcia zdrojov

Použijeme predpoklad $\varphi = c \cdot w$ $c > 0$ konštanta

$$\int_a^b \int_{t_1}^{t_2} w_t(x,t)\, dt\, dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \varphi_x(x,t)\, dx\, dt = \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} f(x,t)\, dt\, dx$$

$$w_t + c w_x = f$$

V prípade nulových zdrojov $f(x,t) \equiv 0$ je

$$u_t + c u_x = 0$$

Rovnica je príkladom LPDR 1. rádu

„Uhádnime" jej riešenie

$$u(x,t) = F(x-ct)$$

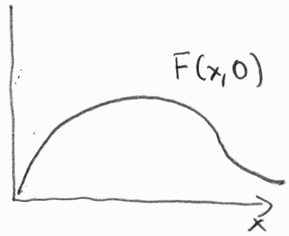
F je ľubovoľná diferencovateľná funkcia $R \to R$ (skalárna)

Skúška:

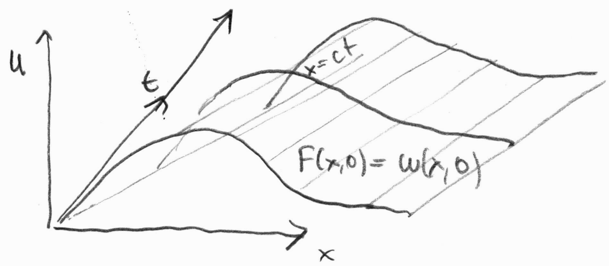
$$u_t(x,t) = F'(x-ct)\cdot(-c)$$
$$u_x(x,t) = F'(x-ct)\cdot 1$$

$$u_t + c u_x = F'(x-ct)(-c) + c F'(x-ct) = 0$$

Ak nakreslíme „nejakú" $F(x,0)$



tak $u(x,t) = F(x-ct)$ je



Putujúca vlna

Na príklade rovnice prúdenia s rozpadom:

$$u_t + c u_x = -\lambda u$$

vidíme, že

LPDR 1 rádu môže mať aj zložitejší tvar

Vo všeobecnom prípade budeme hovoriť o LPDR 1. rádu v dvoch premenných x, y

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y)$$

Koeficienty a, b, c sú funkcie dvoch premenných x, y
Vstup $f(x,y)$ (zdroje)
a neznáma funkcia je $u(x,y)$

<u>Rovnica s konštantnými koeficientami a nulovými zdrojmi</u>.

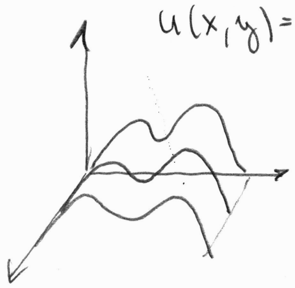
$$a u_x + b u_y = 0 \qquad a^2 + b^2 > 0$$

Príklad. Vezmime rovnicu, v ktorej $a \neq 0$ a $b = 0$.

$$u_x(x,y) = 0$$

Triviálne dostaneme riešenie

$$u(x,y) = F(y) \qquad F - \text{ľubovoľná } R \to R$$



Vo všeobecnom prípade

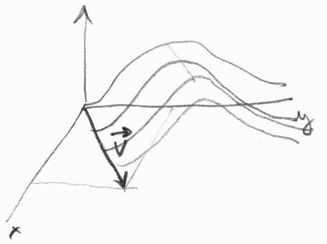
$$a u_x + b u_y = 0$$

vieme

$$(a,b) \cdot (u_x, u_y) = 0$$
$$(a,b) \cdot \operatorname{grad} u = 0$$

Ak označíme $\vec{v} = (a,b)$, tak $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{v}} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial \vec v} = 0$ derivácia v smere $\vec v$ je 0



Priamka v smere vektora $\vec v = (a,b)$ $bx-ay=0$ resp $bx-ay=c$

Preto $u(x,y) = F(bx-ay)$

Priamky $bx-ay=c$ sú charakteristické priamky

Skúška: $au_x + bu_y = aF'(bx-ay).b + bF'(bx-ay).(-a) = 0$

Príklad 1. $2u_x + 3u_y = 0$

a podmienka $u(0,y) = y^2$

$u(x,y) = F(3x-2y)$

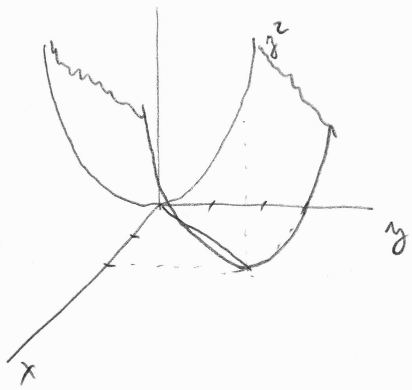
$u(0,y) = F(-2y) = y^2$

preto pri označení $w=-2y$

$y = -\frac{w}{2}$

a $F(w) = \left(-\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{w^2}{4}$

$u(x,y) = F(3x-2y) = \frac{(3x-2y)^2}{4}$



Iná metóda riešenia

Metóda charakteristických súradníc

Rovnicu $au_x + bu_y = 0$

riešme zavedením nových súradníc ξ, τ

$$\xi = bx - ay \qquad \text{(dôležité)}$$
$$\tau = y \qquad \text{(menej dôležité)}$$

Teraz

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x = u_\xi b + u_\tau \cdot 0$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\tau \tau_y = u_\xi(-a) + u_\tau \cdot 1$$

$$au_x + bu_y = a\, u_\xi b + b(u_\xi(-a) + u_\tau) = b u_\tau = 0$$
$$u_\tau = 0$$

Riešenie

$$u(\xi, \tau) = F(\xi) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = F(bx - ay)$$

Táto metóda je použiteľná aj v rovniciach typu $au_x + bu_y + cu = 0$

Príklad. $u_x + u_y + u = 0$

Súradnice

$$\xi = x - y$$
$$\tau = y$$

$$u_x + u_y + u = (u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x) + (u_\xi \xi_y + u_\tau \tau_y) + u = u_\xi + u_\xi(-1) + u_\tau + u = 0$$

$u_\tau = -u$ Rovnica v premennej τ (ξ chápeme ako „konštantu")

$$u(\xi, \tau) = c(\xi) \cdot e^{-\tau}$$

a teda

$$u(x,y) = c(x-y) \cdot e^{-y}$$ c je ľubovoľná funkcia

Príklad. $u_x + u_y + u = 0$

s podmienkou $u(0,y) = y$

Z predchádzajúceho má rovnica riešenie $u(x,y) = C(x-y)\,e^{-y}$

Preto $u(0,y) = C(-y)e^{-y} = y$

$$C(-y) = y e^{y} \qquad -y = w$$

$$C(w) = -w e^{-w}$$

a $u(x,y) = -(x-y)\,e^{-(x-y)} \cdot e^{-y} = \underline{\underline{(y-x)\,e^{-x}}}$

Riešenie je „začiatočnou" podmienkou určené jednoznačne

Príklad. $u_x + u_y + u = 0$

$$u(x,0) = x^2$$

Riešenie rovnice $u(x,y) = C(x-y)e^{-y}$

a podmienka $u(x,0) = C(x) = x^2$ Zrejme pre $x = w$

$$C(w) = w^2$$

$$u(x,y) = \underline{\underline{(x-y)^2 \cdot e^{-y}}}$$

Príklad. $u_x + u_y + u = 0$

$$u(x,x) = x^2$$

$$u(x,y) = C(x-y)\,e^{-y}$$

$u(x,x) = C(0)\,e^{-x} = x^2$ $C(0) = x^2 e^x$ To je ale spor $C(0)$ nie je funkcia

V prípade podmienky $u(x,-x) = x^2$

$u(x,-x) = C(2x)e^{-x} = x^2$ $C(2x) = x^2 e^x$ $C(w) = \left(\frac{w}{2}\right)^2 e^{\frac{w}{2}}$

$$u(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 e^{-y}$$