

Príklad 6. Planárne kyvadlo

$$x'' + h \sin x = 0$$

$$h > 0$$

Systém

$$x' = y$$

$$y' = -h \sin x$$

$$f(x) = +h \sin x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

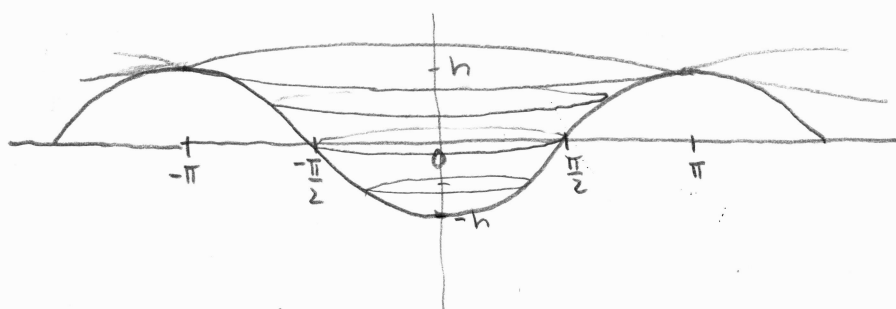
Pevné body

$$[k\pi, 0]$$

$$F(x) = -h \cos x$$

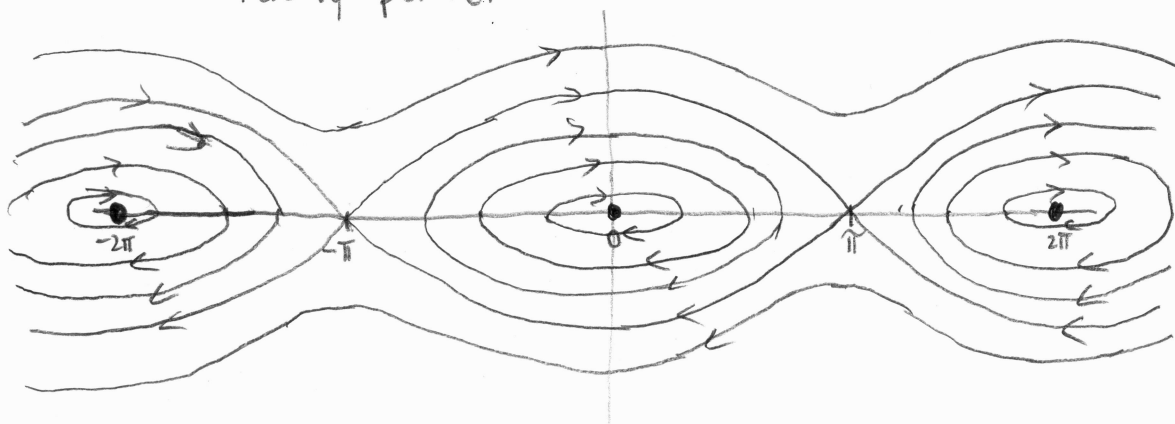
$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - h \cos x$$

Hamiltonián



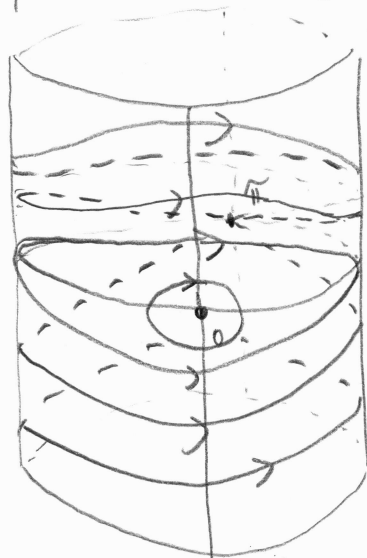
minimá F $[2n\pi, 0]$ sú stredy vo fázoovom portréte systému
 maximá F $[(2n+1)\pi, 0]$ sú sedlá

Fázový portrét



$-h$
 $-\frac{h}{2}$
 0
 $\frac{h}{2}$
 h
 $h+$

Fázový portrét na variete



Periódá planárneho kyvadla

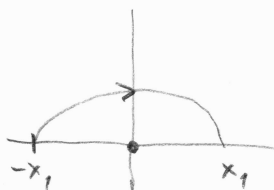
z rovnice

$$x' = \frac{dx}{dt} = y$$

$$dt = \frac{1}{y} dx$$

$$\int dt = \int \frac{1}{y} dx$$

Integrujeme po uzavretej orbite, cez polovicu periódy, t.j. od bodu $-x_1$ po x_1



$$\frac{T}{2} = \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{y} dx$$

z Hamiltoniánu

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - h \cos x \quad \text{dostávame v bode } [x_1, 0]$$

$$H(x_1, 0) = -h \cos x_1 = c$$

Orbita leží na hladine $C = -h \cos x_1$

$$\frac{M^2}{2} - h \cos x = -h \cos x_1$$

$$y = \sqrt{2h(\cos x - \cos x_1)}$$

Teda

$$\frac{T}{2} = \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2h(\cos x - \cos x_1)}} dx$$

$$T = \sqrt{\frac{2}{h}} \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos x_1}} dx$$

Eliptický integrál

Pre $x_1 \rightarrow 0$ vieme z linearizácie v okolí stredn $[0,0]$

$$DF[0,0] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h & 0 \end{pmatrix}$$

a $\lambda^2 + h = 0$ dáva $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{h}$

teda $\omega = \sqrt{h}$ a perióda $T_{\lim} = \frac{2\pi}{\sqrt{h}}$ pre $x_1 \rightarrow 0$

$$\text{Pre } x_1 \rightarrow \pi \quad \text{je} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos x + 1}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 - \sin^2 \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2} \left[\ln \frac{1+y}{1-y} \right]_{-1}^1 = +\infty$$

Tlmené kyvadlo

$$x'' + cx' + h \sin x = 0 \quad c > 0, h > 0$$

Systém

$$x' = y$$

$$y' = -cy - h \sin x$$

Pevné body: $y = 0$ $-cy - h \sin x = 0$
 $x = k\pi$ $[k\pi, 0]$

Linearizácia: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h \cos x & -c \end{pmatrix}$

Pre $2m\pi$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h & -c \end{pmatrix}$ $\lambda^2 + c\lambda + h = 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4h}}{2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - h}$

Pre $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < h$ stabilné ohnisko pre $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > h$ stoka

Pre $(2m+1)\pi$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h & -c \end{pmatrix}$ $\lambda^2 + c\lambda - h = 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4h}}{2}$ $\lambda_1 > 0$
 $\lambda_2 < 0$

sedlo

Systém nie je konzervatívny.

Ale systém bez tlmenia s $c=0$ je konzervatívny
 jeho Hamiltonián je

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - h \cos x$$

a

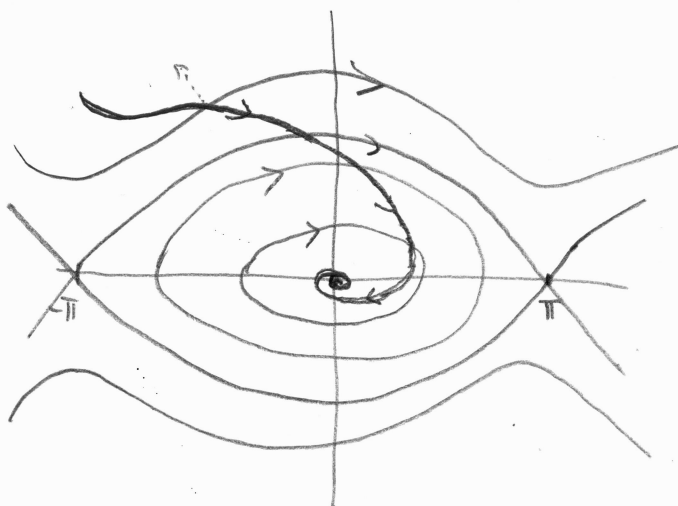
$$\text{grad } H = (h \sin x, y)$$

Súčin

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (h \sin x, y) \cdot (y, -cy - h \sin x) = h y \sin x - cy^2 - h y \sin x = -cy^2 < 0 \\ \text{gradient} & & \text{vektorové pole} & & \text{mimo osi } y \\ \text{konz. systému} & & \text{tlmeného} & & \end{matrix}$$

Skalárny súčin je záporný $\rightarrow$ gradient a vektorové pole zvierajú tupý uhol $\rightarrow$

$\rightarrow$ riešenia pretínajú riešenia netlmeného systému „zvonku dovnútra“.



A ešte 2 problémy.

Problém 1. Pomocou linearizácie nájdite lokálne fázové portréty systému

$$x' = -x + xy$$

$$y' = -y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Odhadnite podobu globálneho FP.

Problém 2. Vypočítajte Hamiltonián a nakreslite globálny FP systému

$$x' = y$$

$$y' = x^3 - 4x^2 + 3x$$