V nasledujúcich rovniciach:

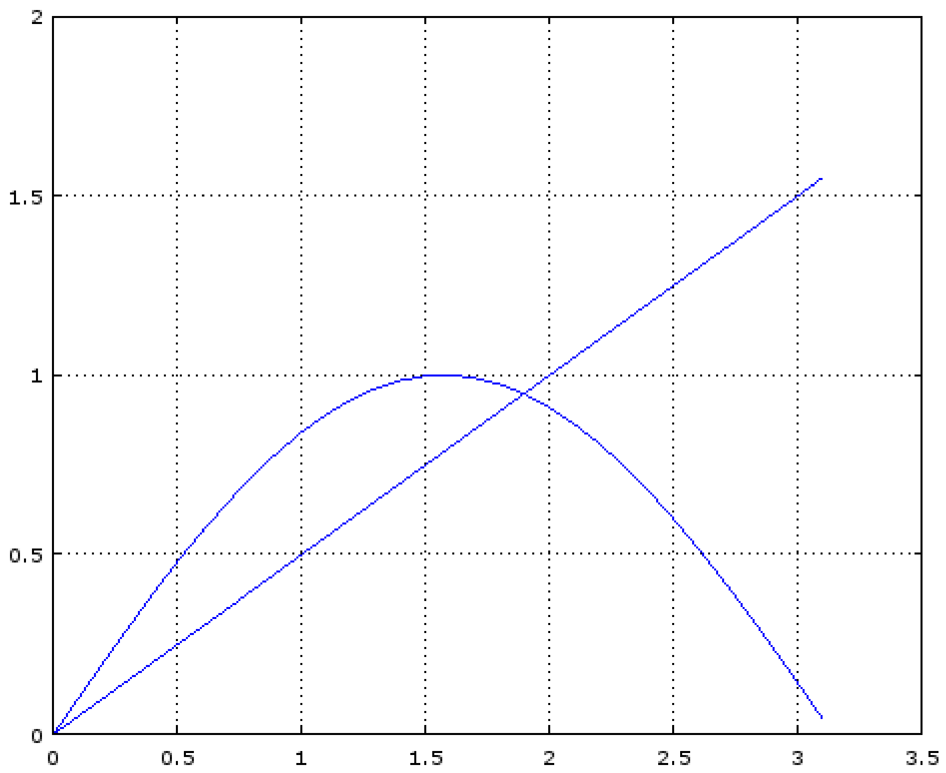
a) ak sa to dá, určte počet koreňov, lokalizujte ich a separujte.

b) Jeden z koreňov hľadajte metódou bisekcie, s presnosťou 0.1 .

c) Ďalší z koreňov hľadajte Newtonovou metódou – najpresnejšie, ako sa dá – a odhadnite jeho chybu.

1. sin x - 0.5*x = 0

Nakreslíme si grafy sin x = 0.5*x, vzhľadom na nepárnosť oboch funkcií stačí kladná polovica:



Grafy sa pretínajú medzi 1.6 a 2.

Koreň 0 je triviálny. Tretí koreň je záporný, v absolútnej hodnote rovný kladnému, stačí teda hľadať ten.

Bisekcia:

```
>> a=1.6; b=2;
>> f=inline('sin(x)-0.5*x');
>> f([a,b])
                    ans =   0.199574  -0.090703
>> x=(a+b)/2, f(x)
                    x =  1.8000, ans =  0.073848                          eps=0.2
>> a=x;  x=(a+b)/2, f(x)
                    x =  1.9000, ans = -0.0036999                         eps=0.1
>> b=x; x=(a+b)/2, f(x)
                    x =  1.8500, ans =  0.036275                          eps=0.05
```

Poznámka: Upravte postup tak, aby softvér sám rozhodol, ktorú stranu intervalu má nahradiť novou hodnotu.

Newton:

f=sin x - 0.5*x

f'=cos x - 0.5 <0

f''=-sin x <0

m1= abs(f'(1.6)) = 0.5292 (prečo??)

M2= abs(f''(1.6)) = 0.99957 (prečo??)

```
>> f=inline('sin(x)-0.5*x')
>> f1=inline('cos(x)-0.5')
>> f2=inline('-sin(x)')
```

Začíname sprava:

```
>> x=2;
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
          xx =   1.90099559420391e+000
          e =   9.25708779541763e-003
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
          xx =   1.89551164537959e+000
          e =   2.84022094776478e-005
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
          xx =   1.89549426720871e+000
          e =   2.85215725100309e-010
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
          xx =   1.89549426703398e+000
          e =   2.88344300967539e-020
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
          xx =   1.89549426703398e+000
          e =   0.00000000000000e+000
```

2. $e^x - 10*x = 0$

Predstavíme si grafy $e^x = 10*x$. Ide o priamku a konvexnú krivku. Koreňov môže byť najviac 2. Korene nemôžu byť záporné (prečo?).

Krátkym krokovaním nájdeme znamienkové zmeny

```
>> x=0:5; exp(x)-10*x

ans =    1.00000000000000e+000        -7.28171817154096e+000       -1.26109439010693e+001
         -9.91446307681233e+000       1.45981500331442e+001        9.84131591025766e+001
```

Znamienkové zmeny sú na intervaloch (0,1) a (3,4)

Bisekciu už necháme bokom a prejdeme rovno na Newtonovu metódu, na intervale (0,1).

```
>> f=inline('exp(x)-10*x');
>> f1=inline('exp(x)-10');
>> f2=inline('exp(x)');

>> m1=f1(1)
         m1 =  -7.28171817154096e+000                      (prečo?)
>> M2=f2(1)
         M2 =   2.71828182845905e+000                      (prečo?)
```

Začíname zľava (prečo?).

```
>> x=0;
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11111111111111e-001
         e =  -2.30433491990982e-003
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11832526409421e-001
         e =  -9.71407194145204e-008
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11832559158963e-001
         e =  -2.00189404370179e-016
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11832559158963e-001
         e =  -8.98692493890677e-034
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11832559158963e-001
         e =  -1.43790799022508e-034
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=M2/2/m1*(x-xx)^2, x=xx;
         xx =   1.11832559158963e-001
         e =  -0.00000000000000e+000
```

Interval (3,4) sa rieši podobne.

3. $2^x - 1.88417*x = 0$ (pozor, 2 korene sú veľmi blízko seba)

Korene môžu byť iba kladné (prečo?), a to v počte najviac dva – dôvody sú podobné ako v predošlom príklade. Krokovanie po 0.1 na intervale (0, 2) nás nepoteší (uvedené len čiastočne):

1.00000	1.10000	1.20000	1.30000	1.40000	1.50000	1.60000	1.70000	1.80000
0.11583	0.07096	0.03639	0.01287	0.00118	0.00217	0.01676	0.04592	0.09070

Znamienková zmena tu nie je,ale hodnoty f sa tesne blížia k nule medzi 1.3 a 1.6. To znamená, že rovnica buď nemá korene, alebo sa nám korene „prešmykli" cez príliš riedke sito. Zhustenie sita na krok 0.01 (iba užší interval) opäť nedáva žiaden záporný výsledok, ale vidíme ešte tesnejšie priblíženie k nule medzi 1.43 a 1.46. Zhustíme na krok 0.001... a je to tu!!!!

1.44100000000000e	1.44200000000000e	1.44300000000000e
9.89760013059282e-007	-5.70902110474947e-007	-8.26186522306926e-007

1.44400000000000e+000
2.24811909976808e-007

Máme dva korene, „chytené" (odseparované) v intervaloch (1.441, 1.442) a (1.443, 1.444).

Poznámka: Ak máme bežnú kalkulačku, vyššie uvedené krokovanie nie je najefektívnejším postupom. Vtedy pomôže analýza – pohľadáme lokálne minimá f a overíme, či je hodnota f v nich záporná.

$f' = \ln 2 * 2^x - 1.88417 =! 0$

Z toho x = log(1.88417/log(2))/log(2) = 1.44269551151150

(pozor, v ML a Octave funkcia log označuje prirodzený logaritmus)

Dosadíme: f(1.44269551151150) = -8.86732857363626e-007

a vidíme, že funkcia klesne pod os x a teda dva korene by sa aj našli. Už len skusmo nájsť dva intervaly (naľavo a napravo od minima), ktoré ich odseparujú.

Hľadanie koreňov, interval (1.441, 1.442) – Newtonova metóda
Vyflákneme sa na bezpečnostné analýzy a rovno to spustíme, z ľavého aj z pravého kraja:

0	x=1.441;	x=1.442;
1	x = 1.44144723809690	x = 1.44137133908389
2	x = 1.44152730632431	x = 1.44152054472021
3	x = 1.44153004903112	x = 1.44153001380665
4	x = 1.44153005225725	x = 1.44153005225637
5	x = 1.44153005225696	x = 1.44153005225725
6	x = 1.44153005225696	x = 1.44153005225695
7		x = 1.44153005225695

Ak by sme neodflákli úvodné úvahy, vedeli by sme, že treba začať zľava. Vidíme totiž, že ak sa začína sprava, „ustrelí to" doľava (a máme šťastie, že to nevypadlo z intervalu) a od koreňa sme ďalej, ako po prvom kroku pri štarte zľava. Nakoniec to ale zakonvergovalo. Na prvý pohľad sa zdá, že sme dostali odlišné hodnoty (5 alebo 6 na koncim ktoré sa nemenia ani po ďalších krokoch). Tento rozdiel však už predstavuje hranice presnosti použitej výpočtovej techniky.
!!! Nezabudnite vypočítať odhad chyby x5 (postup zľava) alebo x6 (postup sprava).
Podobne ostáva na samostatnú prácu interval (1.443, 1.444) – správne začať sprava ušetrí dva kroky.

4. $x^3 - 2x^2 - 5x + 5 = 0$

Polynóm má najviac tri korene, ktoré sa dajú nájsť presne (vzorec alebo múdrejšia kalkulačka).
Ale nekazme si trenažér...
Korene sa nachádzajú určite v rozmedzí (-6,6). Odkrokujeme to (pri ručnom počítaní treba začínať od najmenších čísel)

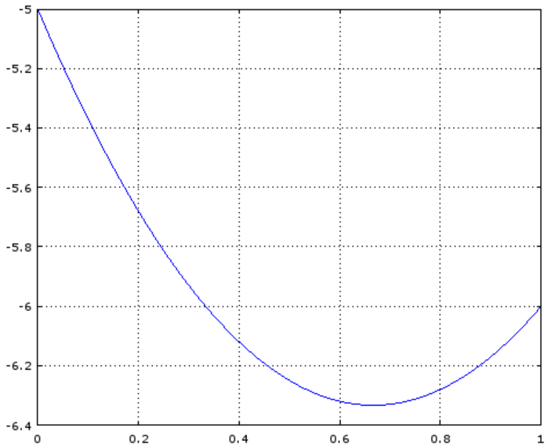
```
>> f=inline('x.^3-2*x.^2-5*x+5')
>> x=-6:6; [x; f(x)]
```

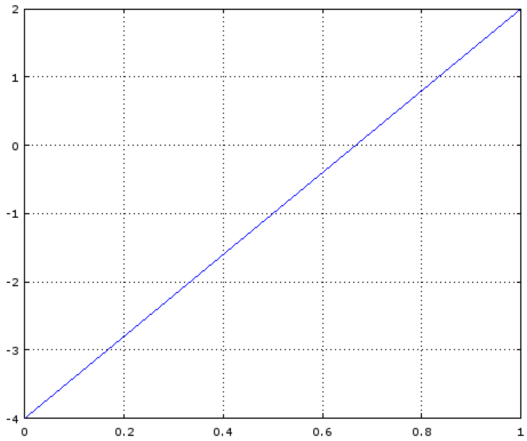
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-253	-145	-71	-25	-1	7	5	-1	-5	-1	17	55	119

Korene sú v intervaloch (-2, -1), (0, 1) a (3, 4).
Postup si ukážeme na (0,1), ďalšie dva intervaly sa riešia podobne.

Úvodný rozbor situácie:

$f' = 3x^2-4x-5$ $f'' = 6x-4$





Prvá derivácia spĺňa bezpečnostné predpoklady, je záporná na celom intervale. Druhá derivácia podmienky nespĺňa, mení znamienko. Východisko je jednoduché, zúžime interval tak, aby podmienky splnené boli. Zlomový bod je 2/3 a f(2/3)>0. Koreň je teda napravo. Dokonca aj f(0.7)>0.
Zúžime interval na (0.7, 1). Na tomto intervale je f'*f''< 0 , je teda rozumnejšie začať zľava.

Ešte odhady: m1=6 (v bode 1 je to najbližšie k osi x) a M2=2 (v bode 1 je to najďalej od osi x)

```
>> x=0.7;
>> xx=x-f(x)/f1(x), e=1/6*(xx-x)^2, x=xx;
```
– iterované, s výsledkami:

```
xx =  0.836334913112164        e =  0.00309786808888356
xx =  0.837038102872165        e =   8.24126397616455e-008
xx =  0.837038143222470        e =   2.71357852079486e-016
xx =  0.837038143222470        e =   2.05432527401305e-033
```

Riešením je 0.837038143222470, podľa všetkého presné na počet zapísaných číslic.
Postup od 1 vedie k rovnakému výsledku, trvá o krok viac.
Dokonca aj postup od 0 nakoniec dokonverguje k správnemu výsledku (o dva kroky viac).

5.* Je daná rovnica sin x = x^2 - 4x + c.
Určte c tak, aby mala rovnica dvojnásobný koreň.

Dvojnásobný koreň v tomto prípade znamená, že v koreni sa nachádza aj lokálny extrém.
Hľadajme teda najprv koreň f'=cos x -2x +4 =! 0

Newtonovou metódou ľahko zistíme, že x=1.85824618155565.

Túto hodnotu dosadíme do pôvodnej rovnice a vyjadríme c. Dostaneme c=1.50589110731805.

6.* Je daná rovnica $\int_0^x \exp(t^2 - 7)\, dt - 1 = 0$.
Nájdite jej koreň Newtonovou metódou (s použitím vhodného softvéru)

Krokovaním zistíme, že máme koreň na intervale (2,3). Koreň je len jeden, lebo f je rastúca.

Úvodnú analýzu zanedbáme a skusmo začneme s x=2. Dostaneme x = 21.7841965342639 a bude potrebných niekoľko stoviek (!!!) iterácií, aby to dokonvergovalo k výsledku. Takže teraz už aj bez analýzy je zrejmé, že sa malo začínať sprava od 3:

```
f=inline('exp(t.^2-7)')
>> x=3;
>> xx=x-(quad(f,0,x)-1)/exp(x.^2-7), x=xx;
xx =  2.95706425262605
xx =  2.95052584366317
xx =  2.95039621975993
xx =  2.95039617015958
xx =  2.95039617015958
```

Poznámka. Uvedený výsledok vyjde iba v Octave. Pri použití Matlabu treba doplniť poožadovanú presnosť (viď syntax príkazu quad) napr. 1e-15, inak sa zhruba od 8. pozície budú hodnoty líšiť.

Odhad chyby a doplnenie úvodných analýz je ponechané na samostatnú prácu.