

Hodnoty funkcie f v zložkách vektora $x = [1, 3, 5, 7]$ sú dané vektorom $y = [2, 0, 3, -1]$.

a) Zostrojte preurčený systém rovníc, z ktorého metódou najmenších štvorcov dostaneme aproximáciu funkcie f ako lineárnu kombináciu regresorov $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x - 4$ a $g_2(x) = x^2 - 8x + 11$.

b) Ukážte, že funkcie $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x - 4$ a $g_2(x) = x^2 - 8x + 11$ tvoria ortogonálny systém funkcií nad množinou $[1, 3, 5, 7]$.

c) Určte systém normálnych rovníc na aproximáciu v otázke a) a vyriešte ho.

d) Nájdite reziduálny vektor a vypočítajte reziduálny súčet štvorcov pre aproximáciu z b).

Riešenie:

$$a) y = \beta_0 + \beta_1(x - 4) + \beta_2(x^2 - 8x + 11)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b) [1 \ 1 \ 1 \ 1] * [-3 \ -1 \ 1 \ 3]' &= 0 \\ [1 \ 1 \ 1 \ 1] * [4 \ -4 \ -4 \ 4]' &= 0 \\ [-3 \ -1 \ 1 \ 3] * [4 \ -4 \ -4 \ 4]' &= 0 \end{aligned}$$

$$c) \mathbf{a}' * \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}' * \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = 1 \qquad \beta_1 = -3/10 \qquad \beta_2 = -1/8$$

$$d) \mathbf{e} = \mathbf{a} * \boldsymbol{\beta} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 1,8 \\ -1,8 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad SSO = \mathbf{e}' * \mathbf{e} = 7,2$$