

1. Pri hode dvomi kockami 2-rozmerný náhodný vektor  $(X, Y)$  je definovaný ako dvojica čísiel vyjadrujúca počet bodov na každej kocke.

- Určte pravdepodobnostnú funkciu náhodného vektora  $(X, Y)$ .
- Vypočítajte  $P(|X - Y| > 2)$ .
- Vypočítajte  $P(Y = X^2 \text{ alebo } X = Y^2)$

Riešenie:

- Pre  $x, y = 1, 2, \dots, 6$ ,  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = 1/36$
- $P(|X - Y| > 2) = f(1, 4) + f(1, 5) + f(1, 6) + f(2, 5) + f(2, 6) + f(3, 6) + f(4, 1) + f(5, 1) + f(5, 2) + f(6, 1) + f(6, 2) + f(6, 3) = 12/36 = 1/3$
- $P(X = Y^2 \text{ alebo } X^2 = Y) = f(1, 1) + f(2, 4) + f(4, 2) = 3/36 = 1/12$

2a. Aproximáciou normálnym rozdelením vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri 100-násobnom opakovaní hodu dvomi mincami bude početnosť padnutia dvoch hláv medzi 22 a 28. Použite CLV.

2b. Koľkokrát musíme hodiť 2 mince, aby pravdepodobnosť toho, že na obidvoch minciach padnú hlavy aspoň 100 krát, bola aspoň 0,95. Použite CLV.

Riešenie:

- $P(22 < S_{100} < 28) = P((22 - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}) < (S_{100} - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}) < ((28 - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})) = P(-3/(10\sqrt{3/4}) < Z < 3/(10\sqrt{3/4})) = F_N(0,69) - F_N(-0,69) = 2F_N(0,69) - 1 = 2*0,7549 - 1 = 0,5098$
- $P(S_n \geq 100) = P((S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}) \geq ((100 - n/4)/(\sqrt{(3n)/4})) = P(Z \geq ((100 - n/4)/(\sqrt{(3n)/4})) = P(Z < -((100 - n/4)/(\sqrt{(3n)/4})) = 0,95 \Rightarrow -((100 - n/4)/(\sqrt{(3n)/4})) = q_{0,95} \Rightarrow -((100 - n/4)/(\sqrt{(3n)/4})) = 1,645 \Rightarrow -((400 - n)/\sqrt{(3n)}) = 1,645 \Rightarrow -400 + n = 1,645\sqrt{3}\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n_1} = (2,849223578 + \sqrt{(8,118075 + 1600)})/2 = 21,47528556 \Rightarrow n_1 = 461,18789 \Rightarrow n_1 = 462$

3a. S akou pravdepodobnosťou je absolútna hodnota chyby súčtu 1000 sčítancov, zaokrúhlených na 3 desatinné miesta menšia než 0,01. Použite CLV.

3b. Na koľko desatinných miest treba zaokrúhlovať 1000 sčítancov (každý rovnako), aby chyba súčtu nepresiahla 0,01 s pravdepodobnosťou aspoň 0,999. Použite CLV.

Riešenie:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

a. Onačme  $X$  chybu zaokrúhlenia na 3 desatinné miesta. Potom  $X \sim R([-5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}])$ .  $\Rightarrow E(X) = 0, \text{var}(X) = 10^{-6}/12$ .

$$P(|S_{1000}| < 0,01) = P(-0,01 < S_{1000} < 0,01) = 2 \cdot P(0 < S_{1000} < 0,01) = 2 \cdot P(0 < Z < 0,01 / \sqrt{(1000 \cdot 10^{-6}/12)}) = 2 \cdot P(0 < Z < \sqrt{30}/5) = 2 \cdot F_N(1,1) - 1 = 2 \cdot 0,8643 - 1 = 0,7286$$

b.  $X \sim R([-5 \cdot 10^{-k-1}, 5 \cdot 10^{-k-1}]) \Rightarrow E(X) = 0, \text{var}(X) = 10^{-2k}/12$ .

$$0,999 \leq P(|S_{1000}| \leq 0,01) = 2 \cdot P(0 < Z < 0,01 / \sqrt{(1000 \cdot 10^{-2k}/12)}) = 2 \cdot P(0 < Z < 10^{k-3} \cdot 2 \sqrt{(3/10)}) = 2 \cdot F_N(10^{k-3} \cdot 2 \sqrt{(3/10)}) - 1 \Rightarrow 0,999 \leq 2 \cdot F_N(10^{k-3} \cdot 2 \sqrt{(3/10)}) - 1 \Rightarrow F_N(10^{k-3} \cdot 2 \sqrt{(3/10)}) \geq 0,9995 \Rightarrow 10^{k-3} \cdot 2 \sqrt{(3/10)} \geq 3,3 \Rightarrow 10^k \geq 3,3 \cdot 5 \cdot 100 \sqrt{(10/3)} \Rightarrow k = 4$$

4a. Životnosť súčiastky zariadenia má exponenciálne rozdelenie s parametrom  $\lambda = 10$ . Po skončení životnosti je súčiastka okamžite nahradená novou a k dispozícii je 100 náhradných súčiastok. S akou pravdepodobnosťou môžeme počítať s činnosťou takéhoto zariadenia na dobu najmenej 10 rokov, ak iné poruchy nie sú relevantné. Použite CLV.

4b. Koľko náhradných súčiastok potrebujeme mať v zásobe, aby sme životnosť zariadenia zabezpečili na 10 rokov s pravdepodobnosťou aspoň 0,9. Použite CLV.

Riešenie:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Označme  $X$  životnosť súčiastky. Potom  $X \sim \text{Exp}(10)$ .  $\Rightarrow E(X) = 1/10, \text{var}(X) = 1/100$ .

a.  $P(S_{100} \geq 10) = 1 - P(S_{100} < 10) = 1 - P(Z < (10 - 100/10) / \sqrt{(100 \cdot 1/100)}) = 1/2$

b.  $0,9 \leq 1 - P(S_n < 10) = 1 - P(Z < (10 - n/10) / \sqrt{(n/100)}) \Rightarrow P(Z < (10 - n/10) / \sqrt{(n/100)}) \geq 0,1 \Rightarrow F_N((10 - n/10) / \sqrt{(n/100)}) \sqrt{3} / (5 \cdot \sqrt{10^{-k+3}}) \geq 0,1 \Rightarrow F_N(-(10 - n/10) / \sqrt{(n/100)}) < 0,9 \Rightarrow -(10 - n/10) / \sqrt{(n/100)} \cong 1,28 \Rightarrow 100 - n \cong -1,28 \sqrt{n} \Rightarrow n \cong 113,6453876 \Rightarrow n = 114$