

Príklad:

Metódou najmenších štvorcov aproximujte funkciu s hodnotami $y = [-3, -1, 0]'$ v bodoch $x = [-1, 0, 1]'$ funkciou $F(x) = ax + b2^x$.

a) Zostavte preurčený systém rovníc pre koeficienty a, b .

b) Metódou najmenších štvorcov nájdite koeficienty a, b .

c) Nájdite reziduálny vektor riešenia z b).

d) Ukážte, na ktoré vektory je kolmý reziduálny vektor riešenia z b).

Riešenie:

a) Zostavíme preurčený systém rovníc $A \bar{\beta} = \bar{y}$, kde $A = \begin{bmatrix} \bar{x} & 2^{\bar{x}} \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Zostavíme normálny systém rovníc $A' A \bar{\beta} = A' \bar{y}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 21/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

Normálny systém rovníc:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 21/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

Hľadané koeficienty:

$$a = 26/11,$$

$$b = -38/33$$

c) Reziduálny vektor: $\bar{e} = A\bar{\beta} - \bar{y} = [2/33, -5/33, 2/33]'$.

Súčet štvorcov odchýliek: $||\bar{e}||^2 = 1/33 \cong 0,0303$.

d) $[1 \ 0 \ 1] \cdot \bar{e} = \bar{0}$, $[1/2 \ 1 \ 2] \cdot \bar{e} = \bar{0}$.