

Úloha 1.

Lineárny systém rovníc je daný v maticovom tvare $ax = b$, kde

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Nájdite stupňovitý tvar rozšírenej matice sústavy a rozhodnite o jej riešiteľnosti (či existuje riešenie a ak áno, či je jediné). [4b]

b) Nájdite všeobecné riešenie, ak existuje. Ak nie, nájdite zovšeobecnené riešenie, reziduálny vektor a SSO. [4b]

Riešenie:

a)

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

\Rightarrow riešenie neexistuje

b)

$$\mathbf{a}'\mathbf{a} = \begin{matrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{matrix} \quad \mathbf{a}'\mathbf{b} = \begin{matrix} 23 \\ 13 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{matrix} 11/3 \\ 1/3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b} = \begin{matrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{matrix}$$

$$SSO = \mathbf{e}'\mathbf{e} = 12/9$$

Úloha 2.

Hodnoty funkcie f v zložkách vektora $x = [1, 2, 4]$ sú dané vektorom $y = [2, 1, 1]$.

a) Zostrojte preurčený systém rovníc, ktorého zovšeobecnené riešenie (metódou najmenších štvorcov) dáva aproximáciu funkcie f ako lineárnu kombináciu regresorov $1/x$ a $1/x^2$. [3b]

b) Určte systém normálnych rovníc na aproximáciu v otázke a) a vyriešte ho. [3b]

c) Nájdite reziduálny vektor e a vypočítajte reziduálny súčet štvorcov odchýliek (SSO) pre aproximáciu z b) [2b].

Riešenie:

$$a) y = \beta_1/x + \beta_2/x^2$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \mathbf{A} = \mathbf{a}' * \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1.3125 & 1.1406 \\ 1.1406 & 1.0664 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \mathbf{a}' * \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 2.3125 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = 2.9901 \quad \beta_2 = -1.0297$$

$$c) \mathbf{e} = \mathbf{a} * \boldsymbol{\beta} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.0396 \\ 0.2376 \\ -0.3168 \end{bmatrix} \quad \text{SSO} = \mathbf{e}' * \mathbf{e} = 0.1584$$