

Matematika 3

L'. Marko

November 10, 2019

CONTENTS

Fourierova transformácia.	5
Fourierove rady.	5
Priama a inverzná Fourierova transformácia.	6
Fourierove obrazy racionálnych funkcií.	7
Cvičenia.	12
Laplaceova transformácia.	14
Vlastnosti Laplaceovej transformácie.	16
Inverzná Laplaceova transformácia.	21
Cvičenia.	24
Aplikácie Laplaceovej transformácie.	28
Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami.	28
Riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc.	34
Riešenie integrodiferenciálnych rovníc.	36
Cvičenia.	37
Z - transformácia.	39
Z-transformácia.	39
Inverzná Z-transformácia.	44
Aplikácia z-transformácie pri riešení diferenčných rovníc.	45

48
Cvičenia. 48

PREDHOVOR

Matematika 3 v novej akreditácii sa zaoberá pojmami z matematickej analýzy funkcií komplexnej premennej, konkrétne základmi Fourierovej, Laplaceovej a Z-transformácie a zo základov matematickej štatistiky. Tento učebný text pre predmet M3 sa zaoberá prvou časťou t.j. základmi Fourierovej, Laplaceovej a Z-transformácie a bol vytvorený pre študijné odbory RK, EN, TLK počas zimného semestra školského roku 2018/2019. Je to minimalistický zápis prednášok. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 3" je "nový predmet", budem text dopĺňať a adaptovať v priebehu ďalších semestrov. L. Marko

Fourierova transformácia.

Fourierove rady.

Použitie: spracovanie periodickej funkcie, spektrálny rozklad

Nech:

- $f : \langle a, a + T \rangle \longrightarrow \mathbf{C}, T > 0$ alebo f je periodická funkcia s periódou T .
- f je integrovateľná tj. $\int_a^{a+T} |f(t)| dt < \infty$.

Fourierov rad funkcie f v komplexnom tvare je rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \dots + c_{-2} e^{-2i\omega t} + c_{-1} e^{-i\omega t} + c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \dots,$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$.

Fourierove koeficienty funkcie f , c_n , ($n \in \mathbf{Z}$) dávajú do pomeru funkciu $f(t)$ s periodickým pohybom $e^{in\omega t}$, tj. s násobnými harmonickými kmitočtami.

Platí: Spojité funkcie integrovateľné s kvadrátom, ktoré majú rovnaké Fourierove koeficienty sú rovnaké. Fourierove koeficienty charakterizujú funkcie vo frekvenčnej oblasti.

Ak je f reálna funkcia, potom $c_{-n} = \overline{c_n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

$f(t)$ je reálna: $Tc_n = \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt - i \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt$,

$Tc_{-n} = \int_a^{a+T} f(t) e^{in\omega t} dt = \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt + i \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt$ a teda $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Ak je f reálna funkcia, potom môžeme zlúčiť dva komplexne združené členy a dostaneme čisto reálny rad:

Pre $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} &= c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) + c_{-n} (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) = \\ &= (c_n + c_{-n}) \cos n\omega t + i(c_n - c_{-n}) \sin n\omega t = 2 \operatorname{Re} c_n \cos n\omega t - 2 \operatorname{Im} c_n \sin n\omega t. \end{aligned}$$

Označme: $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt$, $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt$.

kosínovo-sínový tvar: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$, s amplitúdou: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

transformačné vzťahy medzi koeficientami: $n \geq 1$, $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$,
 $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$. $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Dôležité je, že Fourierove koeficienty umožnia zrekonštruovať funkciu (sú vlastne súradnicami voči nekonečnej báze).

Niekedy je funkcia priamo rovná súčtu svojho Fourierovho radu.

Theorem 1 (*Dirichletova veta.*) Ak reálna funkcia $f(t)$ s periódou T je po častiach spojitá a má po častiach spojitú deriváciu, potom $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$, pre všetky $t \in \mathbf{R}$.

Priama a inverzná Fourierova transformácia.

Motiváciou Fourierovej transformácie je spektrálny rozklad všeobecnej neperiodickej funkcie v nekonečnej časovej oblasti (s nekonečne veľkou periódou) kde pôvodnú postupnosť fourierových koeficientov (spektrálnu postupnosť) nahrádzame (spektrálnou) funkciou $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ipt} dt$, t.j. nediskrétna škála frekvencií, koreluje funkciu s harmonickými funkciami $g(t) = e^{ipt}$, $p \in \mathbf{R}$.

Definition 2 Nech $f(t)$ je komplexná funkcia definovaná na \mathbf{R} . Funkcia

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ipt} dt, p \in \mathbf{R},$$

sa nazýva Fourierova transformácia funkcie f . Funkcia

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(t)\} = \overset{\gamma}{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt} dt, p \in \mathbf{R},$$

sa nazýva inverzná Fourierova transformácia funkcie f .

Za definičný obor FT sa považuje množina všetkých $p \in \mathbf{R}$, pre ktoré existujú príslušné integrály.

Nevlastný integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt$$

uvažujeme v zmysle hlavnej hodnoty integrálu.

Remark 3 $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(p) = 2\pi \overset{\gamma}{f}(-p)$, t.j. $\overset{\gamma}{f}(-p) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(p)$.

Označenie a terminológia: $F : f \mapsto \hat{f}$, $F^{-1} : f \mapsto \overset{\gamma}{f}$ alebo $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$, $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto \overset{\gamma}{f}$

Fourierova transformácia a inverzná Fourierova transformácia. Iné označenie $\mathcal{F}(f)$, $f(t) \stackrel{\wedge}{=} \hat{f}(p)$, $F\{f(t)\} = \hat{f}(p)$.

Postačujúca podmienka pre existenciu Fourierovej transformácie je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

Potom $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-itp}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Onačenie:

$$L^1(\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty\}.$$

Example 4 Nájdime obraz funkcie $f_a(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle -a, a \rangle \\ 0 & t \notin \langle -a, a \rangle \end{cases}$, $a > 0$.

Solution 5 $\mathcal{F}(f_a) = \hat{f}_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)e^{-itp} dt = \int_{-a}^a e^{-itp} dt = \left[\frac{e^{-itp}}{-ip} \right]_{-a}^a = \frac{e^{iap} - e^{-iap}}{ip} = 2 \frac{\sin ap}{p}$. \square

Example 6 Nájdime inverzný obraz funkcie $f_a(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle -a, a \rangle \\ 0 & t \notin \langle -a, a \rangle \end{cases}$, $a > 0$.

Solution 7 $\mathcal{F}^{-1}(f_a) = \check{f}_a(p) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}_a(-p) = \left(\frac{1}{2\pi} 2 \frac{\sin(-ap)}{-p} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ap)}{p}$. \square

Example 8 Nájdime obraz gaussovskej funkcie $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

Solution 9 Vieme, že $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-itp} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{p^2}{4}}$, potom

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-itp} dt = |u = \sqrt{at}| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{iup}{\sqrt{a}}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}. \square \end{aligned}$$

Example 10 Nájdime obraz funkcie, ktorá popisuje vybíjanie kondenzátora $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$.

Solution 11 $\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-itp} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+ip)t} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha+ip)} e^{-(\alpha+ip)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha+ip)}$. \square

Fourierove obrazy racionálnych funkcií.

Fourierove obrazy racionálnych funkcií sú aplikáciou vety o rezíduách. Predpoklady: P a Q sú polynómy, $stQ > stP$ a Q nemá reálne korene: tak máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{it} dt = 2\pi i \sum_{\{z: Q(z)=0, \text{Im } z > 0\}} \text{res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}$$

Pri výpočte Fourierovej transformácie racionálnej funkcie $\frac{P(t)}{Q(t)}$ je potrebné vypočítať integrály $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt$. Ten pomocou substitúcie prevedieme na horeuvedený tvar integrálu. Substitúcia pre $p \neq 0$: $u = -pt$, $du = -pdt$.

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P\left(\frac{-u}{p}\right)}{Q\left(\frac{-u}{p}\right)} e^{iu} \frac{du}{|p|}.$$

Označme $R(z) = \frac{P\left(\frac{-z}{p}\right)}{Q\left(\frac{-z}{p}\right)}$ potom máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt = \frac{2\pi i}{|p|} \sum_{\{z: Q\left(\frac{-z}{p}\right)=0, \text{Im } z > 0\}} \text{res}_z R(z) e^{iz}.$$

Example 12 Nájdime obraz funkcie $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Solution 13 $p \neq 0 : R(z) = \frac{1}{(-\frac{z}{p})^2+1} = \frac{p^2}{z^2+p^2}$,

$$\hat{f}(p) = \frac{2\pi i}{|p|} \sum_{\{z: Q(-\frac{z}{p})=0, \text{Im } z > 0\}} \text{res}_{i|p|} \frac{p^2}{z^2+p^2} e^{iz} = \frac{2\pi i p^2}{|p|} \frac{e^{-|p|}}{2i|p|} = \pi e^{-|p|}.$$

Pre $p = 0$ dopočítame buď zo spojivosti obrazu, alebo z definície: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = [\arctg t]_{-\infty}^{\infty} = \pi. \square$

Súvislosť Fourierovej transformácie a Fourierovho radu.

Predpokladajme, že $f(t)$ je periodická funkcia s periódou $T > 0$, taká, že $\int_a^{a+T} |f(t)| dt < \infty$. Označme $\mathbf{1}_{\langle a, a+T \rangle}$ charakteristickú funkciu intervalu $\langle a, a+T \rangle$ a $f_T = \mathbf{1}_{\langle a, a+T \rangle} f(t)$.

Pre Fourierov koeficient, c_n funkcie $f(t)$ platí $c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \hat{f}_T(n\omega)$.

Theorem 14 (Veta o inverznej Fourierovej transformácii) Nech $f \in L^1(\mathbf{R})$.

1. Ak je f spojitá na \mathbf{R} a $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, potom $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipt} dp$, pre všetky $t \in \mathbf{R}$.

2 Ak sú f a f' po častiach spojitě funkcie na \mathbf{R} , potom $\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipt} dp$ pre všetky $t \in \mathbf{R}$.

Význam:

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipt} dp$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ aproximujúce súčty tohto integrálu: $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(p_i) (p_{i+1} - p_i) e^{ip_i t}$ sú kombináciou harmonických funkcií $p_i(t) = e^{ip_i t}$ a $\left| \hat{f}(p) \right|$ je amplitúda.

Corollary 15 Dve spojitě funkcie z $L^1(\mathbf{R})$ sú rovnaké, ak majú rovnaké Fourierove transformácie.

$f, g \in L^1(\mathbf{R})$ spojitě $\widehat{f} = \widehat{g}$. Pre $h = f - g$ máme $\widehat{h} = 0$ a teda $h = 0$.

Example 16 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin p}{p} e^{ipt} dp$.

$$\text{Podľa vety máme } g(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{ak } t = 1, -1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

Inými slovami inverzný obraz funkcie $h(p) = \frac{2 \sin p}{p}$ je funkcia $g(t)$. Špeciálny prípad $t = 0$ vedie na Newtonov integrál. \square

Theorem 17 Základná gramatika Fourierovej transformácie ($F(p) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ipt} dt, p \in \mathbf{R},$)

- (posun v originále) $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ipa} \hat{f}(p) = e^{-ipa} F(p)$,
- (zmena mierky, scaling) $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right), a \neq 0$,
- (pravidlo konjugácie) $\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\} = \hat{f}(p) = \overline{F(p)}$,
- (posun v obraze, modulácia vzoru) $\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\} = \hat{f}(p-a) = F(p-a)$.

1. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ipa} \hat{f}(p) : \mathcal{F}\{f(t-a)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-ipt} dt = |u = t-a| =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ip(u+a)} du = e^{-ipa} \hat{f}(p).$
2. $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right) : \mathcal{F}\{f(at)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-ipt} dt = |u = at| =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{ipu}{a}} \frac{1}{|a|} du = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right).$
3. $\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)}e^{-ipt} dt = |u = -t| = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{ipu} du =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{-ipu} du = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ipu} du} = \hat{f}(p).$
4. $\mathcal{F}\{e^{iat}f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-ipt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(p-a)t} dt = \hat{f}(p-a).$

Example 18 Vypočítajte $\mathcal{F}(f)$, ak $f(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$ ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-itp} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}$)

Solution 19 $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\} = e^{-ip} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}p^2}. \square$

Example 20 Vypočítajte $\mathcal{F}(f)$, ak $f(t) = \sin te^{-t^2}$.

Solution 21 $\sin te^{-t^2} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-t^2} \doteq \frac{1}{2i} \sqrt{\pi} \left(e^{-\frac{(p-1)^2}{4}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4}} \right). \square$

Example 22 Predpokladajte, že platí veta o inverznej Fourierovej transformácii. Aké reálne funkcie majú reálny Fourierov obraz?

Solution 23 $\hat{f}(p) = \overline{\hat{f}(p)}$ a tak $f(-t) = f(t)$. Sú to párne funkcie. \square

Example 24 Vypočítajte obraz funkcie $g(t) = f(2t-3)$ pomocou obrazu funkcie $f(t)$.

Solution 25 $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(p) \implies \mathcal{F}\{f(t-3)\} = e^{-3ip} \hat{f}(p) \implies \mathcal{F}\{f(2t-3)\} =$
 $= \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}ip} \hat{f}\left(\frac{p}{2}\right). \square$

Theorem 26 (Riemannova-Lebesgueova lemma) Ak je $f \in L^1(\mathbf{R})$, potom je \hat{f} spojité funkcia a $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(p) = 0$.

Theorem 27 (Obraz derivácie) Nech $f(t)$ je spojitě diferencovateľná funkcia a $f, f' \in L^1(\mathbf{R})$. Potom $\mathcal{F}\{f'(t)\}(p) = ip \hat{f}(p)$.

$f' \in L^1(\mathbf{R}) \implies \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0)$. T.j. existuje limita $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Táto limita musí byť rovná nule, pretože $f \in L^1(\mathbf{R})$.

Použitím metódy per partes dostaneme $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-ipt} dt = [f(t) e^{-ipt}]_{t=-\infty}^{t=\infty} +$

$ip \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ipt} dt = ip \hat{f}(p).$

Example 28 Vypočítajte obraz $f'(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

Solution 29 Platí: $f'(t) = -2ate^{-at^2} \stackrel{\circ}{=} ip\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{p^2}{4a}}.$ □

Corollary 30 Ak sú $f, f', \dots, f^{(k)}$ spojité funkcie z $L^1(\mathbf{R})$ potom $f^{(k)}(t) \stackrel{\circ}{=} (ip)^k \hat{f}(p)$ a podľa Riemannovej-Lebesgueovej lemy $\lim_{|p| \rightarrow \infty} p^k \hat{f}(p) = 0$.

Theorem 31 (Derivácia obrazu) Nech $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$ a $tf(t) \in L^1(\mathbf{R})$, potom $\mathcal{F}\{tf(t)\}(p) = i \frac{d}{dp} \hat{f}(p)$.

Example 32 Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie $f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$.

Solution 33 $te^{-\frac{t^2}{2}} \stackrel{\circ}{=} i \frac{d}{dp} \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{p^2}{2}} \right) = -i\sqrt{2\pi} p e^{-\frac{p^2}{2}}.$ □

Konvolúcia je operácia na množine integrovateľných funkcií. Motivácia: Čo odpovedá vo Fourierovej transformácii súčinu funkcií?

Definition 34 Nech $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Konvolúcia funkcií f a g je funkcia $h = f * g$ daná vzťahom $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$.

Example 35 Určme konvolúciu $h = f_a * f_a$, kde f_a je bránová funkcia.

Solution 36 $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(s)f_a(t-s)ds$. Integrujeme cez prienik intervalov $\langle -a, a \rangle$ a $\langle t-a, t+a \rangle$. $h(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t+2a & t \in \langle -2a, 0 \rangle \\ 2a-t & t \in \langle 0, 2a \rangle \\ 0 & t > 2a \end{cases}.$ □

Theorem 37 (Obraz konvolúcie) Nech $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Potom pre $h = f * g$ platí $\hat{h}(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$.

Dôkaz je založený na zámene poradia integrovania:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \right)}^{h(t)} e^{-ipt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)e^{-i(t-s)p} dt \right)}^{|u=t-s|} f(s)e^{-isp} ds = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iup} du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-isp} ds \right) = \hat{g}(p)\hat{f}(p). \end{aligned}$$

Example 38 Vypočítajte fourierov obraz trojuholníka $f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t + 2a & t \in \langle -2a, 0 \rangle \\ 2a - t & t \in \langle 0, 2a \rangle \\ 0 & t > 2a \end{cases}$.

Solution 39 $f(t) = f_a(t) * f_a(t)$. Podľa vety o obraze konvolúcie: $\hat{f}(p) = \left(\frac{2 \sin ap}{p}\right)^2 = \frac{4 \sin^2 ap}{p^2}$. \square

Example 40 Vypočítajte konvolúciu $e^{-at^2} * e^{-bt^2}$, $a, b > 0$.

Solution 41 Fourierova transformácia konvolúcie: $\mathcal{F}(e^{-at^2} * e^{-bt^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{p^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{p^2}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$. \square

Inverzná Fourierova transformácia: $\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b} t^2}$. \square

Example 42 Riešme diferenciálnu rovnicu $y''(t) - y(t) = e^{-t^2}$.

Solution 43 Fourierova transformácia: $-p^2 \hat{y}(p) - \hat{y}(p) = F\{e^{-t^2}\}(p)$.

$$-y(t) = \left[e^{-t^2} * F^{-1}\left(\frac{1}{1+p^2}\right) \right](t).$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{1+p^2}\right)(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-s^2} ds.$$

Fourierova transformácia je základom odborov: teória signálov, harmonická analýza, kvantová mechanika, waveletová analýza, parciálne diferenciálne rovnice atď.

Cvičenia.

V úlohách 1 - 17 zistite, či sú nasledujúce funkcie z priestoru $L^1(\mathbf{R})$ a nájdite ich Fourierove obrazy

1. $f(t) = e^{-a|t|}, a > 0.$

$$\left[\frac{2a}{p^2+a^2} \right]$$

2. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } |t| \leq a \\ 0, & \text{ak } |t| > a > 0 \end{cases} .$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{2}{p} \sin pa, & \text{ak } p \neq 0 \\ 2a, & \text{ak } p = 0 \end{array} \right]$$

3. $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}, a \in \mathbf{R}.$ $\left[\frac{\pi}{a} e^{-a|p|} \right]$

4. $f(t) = e^{-at} \cdot \mathbf{1}(t).$ $\left[F(p) = \frac{1}{a+ip} \right]$

5. $f(t) = \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}.$ $\left[F(p) = \frac{\pi}{5} \left(\frac{e^{-2|p|}}{2} - \frac{e^{-3|p|}}{3} \right) \right]$

6. $f(t) = e^{-\alpha(t-1)^2}, \alpha > 0.$ $\left[e^{-ip\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \right]$

7. $f(t) = \sin t \cdot e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0.$ $\left[\frac{-i}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \left(e^{-\frac{(p-1)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4\alpha}} \right) \right]$

8. $f(t) = te^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t), \alpha > 0.$ $\left[\frac{1}{(\alpha+ip)^2} \right]$

9. $f(t) = t^2 e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} - \frac{p^2}{2\alpha} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \right) \right]$

10. Určte inverznú Fourierovu transformáciu funkcie $g(p) = e^{i\omega p}(1(p-a) - 1(p-b)), a < b.$ $\left[f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(\omega+t)b} - e^{i(\omega+t)a}}{i(\omega+t)} \right]$

11. Aké funkcie majú súčasne reálny vzor aj obraz vo Fourierovej transformácii?
[párne funkcie]

12. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkcie $g(t) = f(3t-2).$ $\left[\hat{g}(p) = e^{-\frac{2}{3}ip} \frac{1}{3} \hat{f}\left(\frac{p}{3}\right) \right]$

13. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkcie $g(t) = tf(2t+1).$ $\left[\hat{g}(p) = \frac{i}{2} e^{i\frac{p}{2}} \left(\frac{i}{2} \hat{f}\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{p}{2}\right) \right) \right]$

14. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkcie $g(t) = e^{-it} f'(2t-1).$ $\left[\hat{g}(p) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}i(p+1)} i \frac{p+1}{2} \hat{f}\left(\frac{p+1}{2}\right) \right]$

15. Je daná funkcia $f(t) = \frac{t}{t^2+r^2}, r > 0$.

a) Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie $f(t)$ a nakreslite graf jej imaginárnej časti.

b) Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie $f(t) \sin 2t$.

c) Vypočítajte inverznú Fourierovu transformáciu funkcie $f(t)$.

$$\left[\begin{array}{l} a) F(p) = -\operatorname{sign}(p)\pi e^{-|p|r} i \\ b) F(p) = \frac{1}{2i} \hat{f}(p-2) - \frac{1}{2i} \hat{f}(p+2) \\ c) \operatorname{sign}(p)\pi e^{-|p|r} i \frac{1}{2\pi} \end{array} \right]$$

16. Pomocou vety o rezíduách vypočítajte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)} e^{-ipt} dt$.

a) Pomocou tohto výsledku určte Fourierov obraz nasledujúcich funkcií:

1) $f(t) = \frac{1}{(4t^2+1)(4t^2+2)}$,

2) $g(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}$.

$$\left[\begin{array}{l} \pi \left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|p|} \right), \\ 1) \frac{\pi}{2} e^{-\frac{|p|}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|p|}{2}}, \\ 2) ip\pi \left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|p|} \right) \end{array} \right]$$

17. Určte funkciu $f(t)$, pre ktorú platí $f(t) * e^{-at^2} = e^{-bt^2}, a > b > 0$.

$$\left[f(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}} e^{-\frac{ab}{a-b}t^2} \right]$$

18. Riešte pomocou F-transformácie diferenciálnu rovnicu $-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a^2u(x) = f(x), -\infty < x < \infty, a > 0$.

$$\left[u(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-a|x-s|} ds \right]$$

Laplaceova transformácia.

Operačný počet sa stal jednou z dôležitých častí matematickej analýzy, považuje sa za abecedu automatizácie. Metódy operačného počtu sa používajú pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc a systémov obyčajných diferenciálnych rovníc. Možno ich však použiť aj pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

Základom tzv. operačného počtu je buď Carsonova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t)$ na funkciu komplexnej premennej $K(p)$ pomocou formuly

$$K(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad ((1))$$

alebo integrálna Laplaceova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t)$ na funkciu komplexnej premennej $p - F(p)$ pomocou formuly

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad ((2))$$

kde t je reálna premenná a $p = \alpha + i\beta$ je komplexná premenná.

Komplexná alebo reálna funkcia reálneho argumentu $f(t)$ sa nazýva originál a jej obraz, funkcia komplexnej premennej $F(p)$, sa nazýva Laplaceovým zobrazom (transformáciou) funkcie $f(t)$.

Zo vzťahov (1) a (2) je vidieť, že medzi Carsonovou a Laplaceovou transformáciou platí vzťah

$$pF(p) = K(p).$$

Preto sa budeme zaoberať Laplaceovou transformáciou. Na označenie toho, že $F(p)$ je Laplaceovou transformáciou $f(t)$, budeme používať zápis $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. Pre každý z týchto symbolických zápisov budeme malými písmenami označovať originály, veľkými písmenami ich Laplaceove obrazy. Laplaceova transformácia je charakteristická tým, že mnohým operáciám s originálmi $f(t)$ zodpovedajú omnoho jednoduchšie operácie s ich obrazmi. Najskôr definujeme, čo rozumieme pod pojmom (Laplaceov) originál.

Definition 44 Funkciu $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ nazývame (Laplaceovým) originálom ak

1. funkcia $f(t)$ je po častiach spojitá,
2. $f(t) = 0$ pre $t < 0$,
3. existuje $M > 0$ reálne a $\alpha \in \mathbf{R}$ také, že platí odhad

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \in \mathbf{R} \quad ((3))$$

Množinu všetkých originálov označíme symbolom \mathcal{A} .

Ak je funkcia f originál, tak hodnotu

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha \in \mathbf{R}; |f(t)| \leq M_{\alpha} e^{\alpha t}, \forall t \in \mathbf{R} \}$$

nazývame indexom rastu funkcie f . Originál f má index rastu $\alpha = -\infty$, ak pre každé $\alpha \in \mathbf{R}$ existuje konštanta M_{α} s vlastnosťou

$$|f(t)| \leq M_{\alpha} e^{\alpha t}, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Example 45 Funkcia $\Theta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ definovaná predpisom

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t < 0 \\ 1 & \text{ak } t \geq 0 \end{cases},$$

nazývaná Heavisideova funkcia (funkcia jednotkového skoku) je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$, pretože

$$|\Theta(t)| \leq 1e^{\alpha t}, \forall \alpha > 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Ak ľubovoľnú funkciu $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ vynásobíme Heavisideovou funkciou Θ , tak dostaneme funkciu rovnú nule na zápornej časti reálnej osi.

Example 46 Ak $n \in \mathbf{N}$, tak funkcia $f(t) = \Theta(t)t^n$ je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$. Vyplýva to zo vzťahu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0, \forall \alpha > 0 \implies |\Theta(t)t^n| \leq \varepsilon e^{\alpha t}, \forall t \geq T \implies |\Theta(t)t^n| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Example 47 Funkcia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t) \frac{1}{t-2}$ nie je originálom, pretože v bode $t = 2$ nemá konečnú limitu ani sprava, ani zľava, teda nie je splnená vlastnosť (3) originálu.

Example 48 Funkcia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t)e^{t^3}$ nie je originál, pretože

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^3}}{e^{\alpha t}} = \infty, \forall \alpha \in \mathbf{R},$$

čo implikuje, že nie je splnená vlastnosť (3) originálu.

Teraz ukážeme, že podmienka (3) zabezpečuje absolútnu konvergenciu integrálu (2), keď $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Theorem 49 Pre každý originál $f(t)$ je zobrazenie $F(p)$ definované vzťahom (2) v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, kde α_0 je index rastu funkcie $f(t)$, analytickou funkciou, pričom

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt, \operatorname{Re} p > \alpha_0 \quad \text{a} \quad \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Example 50 Nájdite obraz Heavisideovej funkcie.

Solution 51 V príklade 45 sme ukázali, že funkcia Θ je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$. Teda Laplaceov obraz bude existovať pre $\operatorname{Re} p > 0$ a máme

$$\mathcal{L}[\Theta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \square$$

Vlastnosti Laplaceovej transformácie.

Theorem 52 (Lineárnosť Laplaceovej transformácie) Nech $f(t), g(t)$ sú originály, $\mathcal{L}[f] = F$ a $\mathcal{L}[g] = G$, potom pre každé $\lambda, \vartheta \in \mathbf{C}$ platí

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \vartheta g(t)] = \lambda F(p) + \vartheta G(p).$$

Theorem 53 (O derivácii obrazu) Nech f je originál s indexom rastu α_0 , $F = \mathcal{L}(f)$ a $n \in \mathbf{N}$. Potom aj funkcia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $g(t) = t^n f(t)$ je originál s indexom rastu α_0 a

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Example 54 Nájdite obraz funkcie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t) t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Solution 55 Podľa predchádzajúcej vety o derivácii obrazu sú funkcie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t) t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ originály s indexom rastu $\alpha_0 = 0$, pričom

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Theorem 56 (O posunutí v obraze) Nech f je originál s indexom rastu α_0 , $a \in \mathbf{C}$ a $\mathcal{L}(f) = F$. Potom funkcia

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, g(t) = e^{at} f(t)$$

je originál s indexom rastu $\alpha_0 + \operatorname{Re} a$, pričom

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p - a), \operatorname{Re} p > \alpha_0 + \operatorname{Re} a.$$

Example 57 Nájdite obraz funkcií $f, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = e^{at}$, $h(t) = t^n e^{at}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Solution 58 Podľa vety o posunutí v obraze máme

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p - a}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(p - a)^{n+1}}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a. \square$$

Example 59 Nájdite obraz funkcií $\cos t, \sin t$.

Solution 60 Platí

$$\mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i} + \frac{1}{p + i} \right) = \frac{p}{p^2 + 1}, \operatorname{Re} p > 0.$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i} - \frac{1}{p + i} \right) = \frac{1}{p^2 + 1}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Theorem 61 (Veta o zmene mierky) Nech f je originál s indexom rastu α_0 , $b \in \mathbf{R}^+$ a $\mathcal{L}[f] = F$. Potom

$$\mathcal{L}[f(bt)] = \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right), \operatorname{Re}\left(\frac{p}{b}\right) > \alpha_0.$$

Example 62 Nájdite obraz funkcií $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, $\omega > 0$.

Solution 63 Platí

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0.$$

podobne

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Posun v originále.

Ak $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ je originál s indexom rastu α_0 a $\tau \in \mathbf{R}$ definujeme funkciu $f_\tau : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ vzťahom $f_\tau(t) = \Theta(t - \tau)f(t - \tau)$.

Theorem 64 (Veta o posune v originále) Nech f je originál s indexom rastu α_0 , $\tau \in \mathbf{R}$ a $\mathcal{L}[f] = F$. Potom aj posunutá funkcia f_τ , $\tau > 0$ je originál s indexom rastu α_0 a platí

$$\mathcal{L}[\Theta(t - \tau)f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Pomocou vety o obraze posunutej funkcie môžeme dostať obrazy funkcií, ktoré sa často používajú v elektrotechnike ako sú napríklad konečné impulzy.

Example 65 Nájdite obraz obdĺžnikového impulzu - funkcie f , ktorá má tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ M & ak & 0 \leq t < a \\ 0 & ak & t > a \end{cases} .$$

Solution 66 Funkciu f možno vyjadriť v tvare

$$f(t) = M [\Theta(t - a) - \Theta(t - b)], t \in \mathbf{R}.$$

Potom

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{M}{p} (e^{-ap} - e^{-bp}), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Example 67 Nájdite obraz lichobežníkového impulzu - funkcie f , ktorá má tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < a \\ M \frac{t-a}{b-a} & ak & a \leq t < b \\ M & ak & b \leq t < c \\ M \frac{d-t}{d-c} & ak & c \leq t < d \\ 0 & ak & d \leq t \end{cases} .$$

Solution 68 Funkciu f možno vyjadriť v tvare

$$f(t) = \frac{M}{b-a} (t-a) [\Theta(t-a) - \Theta(t-b)] + M [\Theta(t-b) - \Theta(t-c)] + \\ + \frac{M}{d-c} (d-t) [\Theta(t-c) - \Theta(t-d)],$$

čo prepíšeme do takého tvaru, aby bolo možné použiť vetu o posune v originále:

$$f(t) = \frac{M}{b-a} [(t-a)\Theta(t-a) - (t-b)\Theta(t-b) + (a-b)\Theta(t-b)] + \\ + M [\Theta(t-b) - \Theta(t-c)] + \\ + \frac{M}{d-c} [-(t-c)\Theta(t-c) + (d-c)\Theta(t-c) + (t-d)\Theta(t-d)].$$

Potom

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \frac{M}{p^2} \left(\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{b-a} + \frac{e^{-dp} - e^{-cp}}{d-c} \right), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Example 69 Nájdite obraz sínusového impulzu - funkcie f , ktorá má tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ \sin t & ak & 0 \leq t < \pi \\ 0 & ak & \pi \leq t \end{cases}.$$

Solution 70 Funkciu f možno vyjadriť v tvare

$$f(t) = \Theta(t) \sin t + \Theta(t - \pi) \sin(t - \pi).$$

Potom

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = (1 + e^{-\pi p}) \frac{1}{p^2 + 1}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Obraz periodickej funkcie.

Theorem 71 (Veta o obraze periodickej funkcie) Ak $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ je nenulová po častiach periodická funkcia s periodou T , tak funkcia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t) f_1(t)$ je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$ a platí vzťah

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}} = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \operatorname{Re} p > 0,$$

kde F_T je obraz konečného impulzu $f_{(0,T)} : f_{(0,T)}(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ f(t) & ak & 0 \leq t < T \\ 0 & ak & T \leq t \end{cases}.$

Example 72 Nájdite obraz funkcie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \Theta(t) |\sin t|$.

Solution 73 Funkcia $f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f_1(t) = |\sin t|$ má periodu $T = \pi$. Použitím predchádzajúcej vety pre $\mathcal{L}[f] = F$ máme

$$F(p) = \frac{F_\pi(p)}{1 - e^{-\pi p}}, \operatorname{Re} p > 0,$$

kde F_π je obraz funkcie $f_{\langle 0, \pi \rangle}$ danej predpisom:

$$f_{\langle 0, T \rangle}(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ \sin t & ak & 0 \leq t < \pi \\ 0 & ak & \pi \leq t \end{cases} .$$

V predchádzajúcom príklade 72 sme našli obraz F_π v tvare:

$$F_\pi(p) = (1 + e^{-\pi p}) \frac{1}{p^2 + 1}, \operatorname{Re} p > 0,$$

potom

$$\mathcal{L}[|\sin t|] = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Example 74 Nájdite obraz pílovitej funkcie $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ a(t - kT) & ak & kT \leq t < (k+1)T, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} .$$

Solution 75 Pretože:

$$f_{\langle 0, T \rangle}(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ at & ak & 0 \leq t < T \\ 0 & ak & T \leq t \end{cases} .$$

máme

$$f_{\langle 0, T \rangle}(t) = [\Theta(t) - \Theta(t - T)]at = at\Theta(t) - a(t - T)\Theta(t - T) - aT\Theta(t - T)$$

a

$$\mathcal{L}[f_{\langle 0, T \rangle}] = F_T(p) = a \left[\frac{1}{p^2}(1 - e^{-pT}) - \frac{T}{p}e^{-pT} \right]$$

potom

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{a}{p} \left(\frac{1}{p} + \frac{T e^{-pT}}{e^{-pT} - 1} \right), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Theorem 76 (Laplaceov obraz radu) Nech $f(t) \in \mathcal{A}$, nech platí:

$$1) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \forall t \geq 0,$$

2) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$ konverguje v nejakom okolí nekonečna. Potom pre Laplaceov obraz $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ platí

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Example 77 *Nájdime LT* $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Solution 78 *Máme* $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$. *Keď skúmame konvergenciu radu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)! p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}}, \text{ tento rad konverguje pre } |p| > 1. \text{ Potom } F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}}, \text{ pre } \operatorname{Re} p > 1. \square$$

Theorem 79 (*Veta o obraze derivácie*) *Ak* $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbf{C}$ *je* k -*krát spojit*e *diferencovateľná na* $\langle 0, \infty \rangle$ *a jej derivácia rádu* $k-1$ *je po častiach spojit*e *diferencovateľná, pričom funkcie* $f, f', f'', \dots, f^{(k-1)}, f^{(k)}$ *sú originály s indexom rastu* α_0 , *potom ak* $F(p) = L[f(t)]$, *platí*

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = p^k F(p) - p^{k-1} f(0+) - p^{k-2} f'(0+) - \dots - f^{(k-1)}(0+).$$

Theorem 80 (*O integrovaní originálu*) *Ak* $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbf{C}$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a* $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $g(t) = \int_0^t f(s) ds$, *potom ak* $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, *platí*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s) ds\right] = \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \alpha_0 > 0.$$

Definition 81 *Nech* $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ *sú po častiach spojit*e *funkcie. Funkciu*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds, t \in \mathbf{R}$$

nazývame konvolúciou funkcií f, g .

Pre konvolučný súčin platí

$$f * g = g * f, f * (g * h) = (f * g) * h, f * (g + h) = f * g + f * h$$

Theorem 82 *Nech* f, g *sú originály s indexami rastu* α_0, β_0 . *Potom* $f * g$ *je originál s indexom rastu* $\gamma_0 = \max\{\alpha_0, \beta_0\}$ *a platí*

$$\mathcal{L}[(f * g)(p)] = \mathcal{L}[f](p) \mathcal{L}[g](p), \operatorname{Re} p > \max\{\alpha_0, \beta_0\}.$$

Example 83 *Nech* $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = e^t \cos 2t$, $g(t) = e^t \sin 2t$. *Nájdite* $(f * g)(t)$ *a jej Laplaceov obraz.*

Solution 84 *Pretože* $(f * g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$, *dostávame*

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^s \cos 2s \cdot e^{t-s} \sin 2(t-s) ds = \\ &= e^t \int_0^t \sin 2(t-s) \cos 2s ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} e^t \int_0^t [\sin 2(t-2s) + \sin 2t] ds = \frac{1}{2} e^t t \sin 2t.$$

a pre Laplaceov obraz dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} e^t t \sin 2t \right] &= \mathcal{L} [e^t \cos 2t] \mathcal{L} [e^t \sin 2t] = \\ &= \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} = \frac{2(p-1)}{[(p-1)^2 + 4]^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Inverzná Laplaceova transformácia.

Medzi Fourierovou a Laplaceovou transformáciou je úzka súvislosť. Z teórie Fourierovho integrálu je známe, že ak f je spojitá s počastiach spojitou deriváciou a $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ potom v ľubovoľnom bode, v ktorom je funkcia $f(t)$ spojitá, môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

kde $F = \mathcal{F}(f)$ a ak je bod $t = t_0$ bod nespojitosti s konečnými limitami sprava a zľava, potom

$$\frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

Podmienka absolútnej integrovateľnosti funkcie $f(t)$ na intervale $(-\infty, \infty)$, t.j. existencie integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ je veľmi silná, preto trieda funkcií, ktoré sa dajú vyjadriť Fourierovým integrálom nie je široká. Aj také jednoduché funkcie ako napríklad $f(t) = \text{const}$ alebo $f(t) = \Theta(t)$ nespĺňajú túto podmienku.

Ak miesto funkcie $f(t)$ uvažujeme funkciu $f(t) e^{-i\alpha t}$, pričom predpokladáme, že $f(t) = 0$ pre $t < 0$, potom pre $\alpha > \alpha_0$, kde α_0 je index rastu funkcie $f(t)$ bude integrál $\int_0^{\infty} |f(t) e^{-\alpha t}| dt$ konvergovať pre širokú triedu funkcií a platí

$$e^{-\alpha t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Výrazy, ktoré sme dostali možno zapísať aj inak. Ak položíme $p = \alpha + i\omega$ a $d\omega = \frac{dp}{i}$, tak dostaneme:

Platí vzťah (my ho nebudeme dokazovať, pretože plynie z vlastností Fourierovho integrálu)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) e^{pt} dp,$$

odkiaľ pretože

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

je Laplaceova transformácia, tak inverzná Laplaceova transformácia bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Celý tento postup teraz sformulujeme ako vetu:

Theorem 85 Ak je funkcia $f(t)$ originál a $F(p)$ jej Laplaceov obraz, potom v ľubovoľnom bode platí

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Vetu uvádzame bez dôkazu. Možno ju nájsť v každej lepšej knihe o funkciách komplexnej premennej. Vzťah pre inverznú Laplaceovu transformáciu z predchádzajúcej vety sa používa pri hľadaní Laplaceovej transformácie iba zriedkavo. V praxi je dôležité vedieť, či sa originál zo známeho Laplaceovho obrazu dá dostať jediným spôsobom. Z predchádzajúcej vety plynie tvrdenie:

Ak je funkcia $F(p)$ Laplaceovým obrazom originálov $f_1(t)$ a $f_2(t)$, potom sa tieto originály rovnajú vo všetkých bodoch spojitosti. Bez dôkazu uvedieme podmienky pre to, aby funkcia $F(p)$ bola Laplaceovým obrazom funkcie $f(t)$:

1. $F(p)$ je analytická funkcia na polrovine $\operatorname{Re} p = \alpha > \alpha_0$, kde α_0 je reálna časť singulárneho bodu funkcie $F(p)$, ktorý leží čo najviac vpravo.
2. $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$
3. Funkcia $F(p)$ je absolútne integrovateľná podľa každej priamky, ktorá leží v polrovine $\operatorname{Re} p = \alpha > \alpha_0$, rovnobežnej s imaginárnou osou t.j.

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} |F(p) e^{pt}| dp = A < \infty.$$

Originály možno nájsť aj pomocou rezíduí, čo tvrdí nasledujúca veta:

Theorem 86 Nech $F : \mathbf{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{C}$ je analytická funkcia a p_1, \dots, p_n sú izolované singulárne body funkcie F s vlastnosťami:

- a) $\operatorname{Re} p_k < \alpha_0$, $k = 1, \dots, n$
- b) $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$
- c) F je Laplaceov obraz originálu s indexom rastu α_0 s vlastnosťou

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Potom

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k} [F(p) e^{pt}], \quad \text{pre každé } t > 0.$$

Example 87 Nájdite originál f , ktorého Laplaceov obraz f má tvar

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}, \quad p \in \mathbf{C} \setminus \{-1, 0\}.$$

Solution 88 Sú splnené všetky predpoklady vety o hľadaní originálu pomocou rezíduí. Izolované body sú body $-1, 0$, teda originál existuje a má tvar

$$f(t) = \operatorname{res}_{z=-1} [F(p) e^{pt}] + \operatorname{res}_{z=0} [F(p) e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{e^{pt}}{p^2} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{e^{pt}}{p+1} \right] = e^{-t} + t - 1, \quad t > 0.$$

Tak

$$f(t) = \Theta(t) (e^{-t} + t - 1), \quad t \in \mathbf{R}. \quad \square$$

Example 89 Nájďte originál f , ktorého Laplaceov obraz F má tvar

$$F(p) = e^{-2p} \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}, p \in \mathbf{C} \setminus \{1, i, -i\}.$$

Solution 90 V tomto príklade nemôžeme použiť vetu o hľadanií originálu pomocou rezíduí, pretože predpoklad b) nie je splnený. Podľa vety???) je funkcia $f(t) = \Theta(t-2)g(t-2)$, pre $t \in \mathbf{R}$, kde $g(t)$ je originál k funkcii $G(p)$, ktorú definujeme vzťahom

$$G(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}, p \in \mathbf{C} \setminus \{1, i, -i\}.$$

Funkcia G spĺňa už všetky predpoklady predchádzajúcej vety, teda originál existuje a má tvar

$$g(t) = \operatorname{res}_{z=1} [G(p) e^{pt}] + \operatorname{res}_{z=i} [G(p) e^{pt}] + \operatorname{res}_{z=-i} [G(p) e^{pt}] = \frac{1}{2} (e^t - \cos t + \sin t),$$

pre $t > 0$. Tak

$$f(t) = \frac{1}{2} \Theta(t-2) (e^{t-2} - \cos(t-2) + \sin(t-2)), t \in \mathbf{R}. \square$$

Theorem 91 (Veta o rozklade) Nech $F(p)$ je analytická funkcia v okolí nekonečna s Laurentovým radom $F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. Potom je $F(p)$ Laplaceovým obrazom funkcie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(n-1)!}{t^{n-1}}.$$

Example 92 Nech $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$. Nájďte originál.

Solution 93 $F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^{n+1}}$. Potom $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{t^n}{n!}. \square$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 17 nájdite Laplaceov obraz funkcie f , ak f je originálom

1. $f(t) = 2e^{3t} + e^{it} + 6t^3 - 7t + 5.$

$$\left[F(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{p-i} + \frac{6 \cdot 3!}{p^4} - \frac{7}{p^2} + \frac{5}{p} \right]$$

2. $f(t) = \sin(5t) + 2 \cos(3t) - \sinh t + \cosh(2t).$

$$\left[F(p) = \frac{5}{p^2+25} + \frac{2p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p}{p^2-4} \right]$$

3. $f(t) = \sin^2(at), a \in \mathbf{R}.$ $\left[F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)} \right]$

4. $f(t) = \sin(at) \cdot \cos(at), a \in \mathbf{R}.$ $\left[F(p) = \frac{a}{p^2+4a^2} \right]$

5. $f(t) = \sin(at) \cdot \cos(bt), a, b \in \mathbf{R}, a \neq b.$

$$\left[F(p) = \frac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a+b)^2] \cdot [p^2+(a-b)^2]} \right]$$

6. $f(t) = a^t + \sin(\omega t + \varphi).$

$$\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)} \cos \varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2} \sin \varphi \right]$$

7. $f(t) = \sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{p^2-9} \right]$

8. $f(t) = e^{(1+i)t} \cdot \sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{[p-(1+i)]^2-9} \right]$

9. $f(t) = a^t, a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} \right]$

10. $f(t) = ta^t, a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2} \right]$

11. $f(t) = e^{2t} \cdot \cos(3t) \cdot \cos(4t).$

$$\left[F(p) = \frac{1}{2} \frac{p-2}{(p-2)^2+7^2} + \frac{1}{2} \frac{p-2}{(p-2)^2+1} \right]$$

12. $f(t) = e^{-t} + e^t \cdot \sin(2t).$ $\left[F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p-1)^2+2^2} \right]$

13. $f(t) = t^2 \cos(3t).$ $\left[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3} \right]$

14. $f(t) = t^2 + 2t + 3 + te^{-5t}.$ $\left[F(p) = \frac{2+2p+3p^2}{p^3} + \frac{1}{(p+5)^2} \right]$

15. $f(t) = t(\cos(2t) + e^{-t} \cdot \sin(2t)).$

$$\left[F(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{4(p+1)}{[(p+1)^2+4]^2} \right]$$

16. $f(t) = t^2(e^{-3t} + \sin(2t)).$ $\left[F(p) = \frac{2}{(p+3)^3} + \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3} \right]$

$$17. f(t) = \int_0^t \sin(\omega\tau) d\tau. \left[F(p) = \frac{\omega}{p(p^2 + \omega^2)} \right]$$

V úlohách 18 - 20 použitím vety o posune v originále nájdite Laplaceov obraz funkcie f :

$$18. f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < b \\ e^{at} & t \geq b \end{cases} \cdot \left[\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right]$$

$$19. (a) f(t) = \Theta(t) (t-2)^2 \cdot \left[\frac{2!}{p^3} - \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right]$$

$$(b) f(t) = \Theta(t-2) (t-2)^2 \cdot \left[e^{-2p} \frac{2!}{p^3} \right]$$

$$(c) f(t) = \Theta(t-2) t^2 \cdot \left[e^{-2p} \frac{2!}{p^3} + e^{-2p} \frac{4}{p^2} + e^{-2p} \frac{4}{p} \right]$$

$$20. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \cdot \left[\frac{p + e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^3 + p} \right]$$

V úlohách 21 - 22 nájdite Laplaceove obrazy konečných impulzov

$$21. f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 4 \rangle \\ t-1 & t \in \langle 1, 2 \rangle \\ -\frac{t}{2} + 2 & t \in \langle 2, 4 \rangle \end{cases} \cdot \left[\left(e^{-p} - \frac{3e^{-2p}}{2} + \frac{e^{-4p}}{2} \right) \frac{1}{p^2} \right]$$

$$22. f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 5 \rangle \\ t-1 & t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & t \in \langle 2, 4 \rangle \\ 5-t & t \in \langle 4, 5 \rangle \end{cases} \cdot \left[(e^{-p} - e^{-2p} - e^{-4p} + e^{-5p}) \frac{1}{p^2} \right]$$

V úlohách 23 - 24 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie

$$23. f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \\ -1 & t \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \cdot \left[\frac{1 - e^{-p\pi}}{p(1 + e^{-p\pi})} \right]$$

$$24. f(t) = |\sin(\omega t)|, \omega \in \mathbf{R}^+. \left[\frac{\omega(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}})}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}})} \right]$$

V úlohách 25 - 27 nájdite konvolučný súčin funkcií f, g :

$$25. f(t) = t, g(t) = \cos t. [1 - \cos t]$$

$$26. f(t) = t^2, g(t) = t^3. \left[\frac{t^6}{60} \right]$$

$$27. f(t) = e^{at}, g(t) = 1 - at. [t]$$

V úlohách 28 - 36 nájdite originál k funkcii F :

$$28. F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3 - p^2 - 2p}. [f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{2t}]$$

$$29. F(p) = \frac{p^2 - 4p - 3}{(p-1)^2(p+2)}. [f(t) = -2te^t + e^{-2t}]$$

$$30. F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}. [f(t) = e^t - e^{-t} \cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t} \sin(2t)]$$

$$31. F(p) = \frac{-2p^3+2p+5}{5(p^2+2p+2)(p+1)(p-1)}. [f(t) = \frac{1}{5}e^{-t} \sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^t]$$

$$32. F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}. \\ [f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$$

$$33. F(p) = \frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}. \\ \left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-k & t \in \langle k, k+1 \rangle, k=0,1,\dots \end{cases} \right]$$

$$34. F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}, a \in \mathbf{R}^+. \\ \left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in \langle 2ka, (2k+1)a \rangle \\ 0 & t \in \langle (2k+1)a, (2k+2)a \rangle, k=0,1,\dots \end{cases} \right]$$

$$35. F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2+9p-18}. \\ [f(t) = \frac{1}{39}(-2 \sin(3t) - 3 \cos(3t) + 3e^{2t})]$$

$$36. F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p(p^2+1)}(1 + e^{-\pi p}). \\ \left[f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 2 - \cos(t-\pi) & t > \pi \end{cases} \right]$$

Pomocou vety o rozklade vypočítajte inverznú LT

1. $F(p) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$.
 $[f(t) = \frac{\sin t}{t}]$
2. $F(p) = \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p}$.
 $\left[f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} t^n \right]$
3. $F(p) = \frac{\sin \frac{1}{p}}{p}$.
 $\left[f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n+1)!)^2} t^{2n+1} \right]$
4. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
5. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
6. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
7. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
8. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
9. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$
10. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
 $[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}]$

Aplikácie Laplaceovej transformácie.

Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami.

Ak $a_k \in \mathbf{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$; $a_n \neq 0$, $b_k \in \mathbf{C}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ sú dané komplexné konštanty a $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ je po častiach spojitá funkcia, môžeme sformulovať začiatočnú úlohu - ZÚ ako problém nájsť riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad ((1))$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \dots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \quad ((2))$$

Z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc vieme, že ZÚ (1), (2) má jediné riešenie. Túto úlohu možno riešiť aj pomocou Laplaceovej transformácie, ak budeme predpokladať, že funkcia $f(t)$ je originál. Potom aj riešenie - funkcia $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, ktorú rozšírime nulou pre $t < 0$ so svojimi deriváciami do rádu n sú originály. Toto plynie z faktu, že

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^n \left[b_k + \int_0^t \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)} d\tau \right] \varphi_k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

kde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je báza vektorového priestoru riešení rovnice (1) s nulovou pravou stranou:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

a

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$W_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & 0 & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & 0 & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & f(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

pričom stĺpec pravých strán sa nachádza v k -tom stĺpci. Funkcie φ_k , $k = 1, \dots, n$ sú originály, pretože majú tvar $\varphi(t) = t^\alpha e^{\beta t}$, kde α, β sú vhodné konštanty. Riešenie x spolu s deriváciami do rádu $(n-1)$ dostaneme z funkcií $\varphi_1, \dots, \varphi_n, f$ použitím operácií, ktoré zachovávajú exponenciálny rast, to znamená že funkcie $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ sú originály. Funkcia $x^{(n)}$ je tiež originál, pretože sa dá vyjadriť z rovnice (1) v tvare

$$x^{(n)}(t) = a_n^{-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) \right], \quad t \geq 0.$$

Potom aplikáciou Laplaceovej transformácie na úlohu (1) s využitím podmienok (2) dostaneme

$$a_n [p^n X(p) - p^{n-1} b_0 - p^{n-2} b_1 - \dots - p b_{n-2} - b_{n-1}] +$$

$$\begin{aligned}
& +a_{n-1} [p^{n-1}X(p) - p^{n-2}b_0 - p^{n-3}b_1 - \dots - pb_{n-3} - b_{n-2}] + \\
& \quad + \dots + \\
& \quad + a_1 [pX(p) - b_0] + a_0X(p) = F(p)
\end{aligned}$$

kde $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ a $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$. Riešením tejto algebrickej rovnice dostaneme

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)} + \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

V poslednom výraze je $Q_n(p)$ charakteristický polynóm rovnice (1) n -tého stupňa a $P_{n-1}(p)$ je polynóm najviac $(n-1)$ stupňa. Použitím vety o konvolúcii dostaneme originál v tvare

$$x(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds + h(t), \quad t \geq 0,$$

kde

$$\mathcal{L}[g] = \frac{1}{Q_n}, \quad \mathcal{L}[h] = \frac{P_{n-1}}{Q_n}.$$

Example 94 *Riešte začiatočnú úlohu:*

$$x'' - 2x' + 5x = e^t \cos 2t, \quad x(0+) = C_1, \quad x'(0+) = C_2.$$

Solution 95 *Použitím vzťahu $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ dostaneme $\mathcal{L}[x'(t)] = pX(p) - C_1$, $\mathcal{L}[x''(t)] = p^2X(p) - pC_1 - C_2$. $\mathcal{L}[e^t \cos 2t] = \frac{p-1}{(p-1)^2+4}$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:*

$$p^2X(p) - pC_1 - C_2 - 2[pX(p) - C_1] + 5X(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2+4},$$

odkiaľ

$$X(p) [p^2 - 2p + 5] = \frac{p-1}{(p-1)^2+4} + pC_1 + C_2 - 2C_1.$$

čo dáva

$$X(p) = \frac{p-1}{[(p-1)^2+4]^2} + C_1 \frac{p}{(p-1)^2+4} + (C_2 - 2C_1) \frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

Aplikáciou vety o inverznej transformácii alebo vety o konvolúcii dostaneme:

$$\mathcal{L} \left[\left(\frac{1}{4} t e^t \sin 2t \right) \right] = \frac{p-1}{[(p-1)^2+4]^2},$$

a

$$\mathcal{L} [(e^t \cos 2t)] = \frac{p-1}{(p-1)^2+4}, \quad \mathcal{L} \left[\left(\frac{1}{2} e^t \sin 2t \right) \right] = \frac{1}{(p-1)^2+4},$$

čo implikuje, že

$$x(t) = \frac{1}{4} t e^t \sin 2t + C_1 e^t \cos 2t + (C_2 - 2C_1) \frac{1}{2} e^t \sin 2t. \quad \square$$

Laplaceovu transformáciu môžeme použiť pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami, ktorých pravá strana má tvar posunutej funkcie alebo tvar konečného impulzu. Uvažujme teda začiatočnú úlohu:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \dots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1},$$

t.j. ZÚ (1), (2) s pravou stranou tvaru:

$$f(t) = \Theta(t - \tau_1) f_1(t - \tau_1) + \dots + \Theta(t - \tau_k) f_k(t - \tau_k) \quad ((3))$$

kde funkcie f_1, \dots, f_k sú originály a $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_k$. Použitím Laplaceovej transformácie na túto ZÚ dostaneme:

$$Q_n(p) X(p) - P_{n-1}(p) = e^{-\tau_1 p} F_1(p) + \dots + e^{-\tau_k p} F_k(p).$$

odkiaľ

$$X(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} + e^{-\tau_1 p} G_1(p) + \dots + e^{-\tau_k p} G_k(p),$$

kde

$$G_j = \frac{F_j}{Q_n}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Použitím vety o posune v originále dostaneme originál v tvare

$$x(t) = h(t) + \Theta(t - \tau_1) g_1(t - \tau_1) + \dots + \Theta(t - \tau_k) g_k(t - \tau_k),$$

pričom

$$\mathcal{L}[h] = \frac{P_{n-1}}{Q_n}, \mathcal{L}[g_j] = G_j, j = 1, 2, \dots, k.$$

Example 96 Nájdite riešenie ZÚ:

$$x'' + 4x = f(t), x(0+) = 1, x'(0+) = 0, \text{ kde } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t < 0 \\ \cos t & \text{pre } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pre } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

Solution 97 Použitím vzťahu $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ dostaneme $\mathcal{L}[x'(t)] = pX(p) - 1$, $\mathcal{L}[x''(t)] = p^2 X(p) - p$. Pravú stranu rovnice možno zapísať v tvare

$$f(t) = \cos t \left[\Theta(t) - \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \Theta(t) \cos t + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{p}{p^2 + 1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:

$$p^2 X(p) - p + 4X(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2 + 1},$$

t.j.

$$X(p) = \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)},$$

teda

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) x_3\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

pričom

$$\mathcal{L}[x_1(t)] = \frac{p}{p^2 + 4}, \quad \mathcal{L}[x_2(t)] = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}, \quad \mathcal{L}[x_3(t)] = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

Pretože platí

$$\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{p}{p^2 + 4}$$

a

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 + 4},$$

tak

$$x_1(t) = \cos 2t, \quad x_2(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t, \quad x_3(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{6} \cos 2t$$

a

$$x(t) = \frac{1}{3} \cos t + \frac{2}{3} \cos 2t + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \left[\frac{1}{3} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6} \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad \square$$

V elektrotechnike sa často stretávame s úlohou riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu s periodickou funkciou na pravej strane.

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \Theta(t) f(t) \quad ((4))$$

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \dots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \quad ((5))$$

s periodickou funkciou f , $f(t) = f(t + T)$. Riešenie takejto ZÚ hľadáme v tvare

$$x(t) = y(t) + z(t), \quad t > 0;$$

kde y je periodické riešenie rovnice (4) a z je riešením ZÚ

$$a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = 0,$$

s podmienkami

$$z(0+) = c_0, z'(0+) = c_1, \dots, z^{(n-1)}(0+) = c_{n-1},$$

kde

$$c_j = b_j - y^{(j)}(0+), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Skúmame teda najskôr úlohu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \Theta(t) f(t), \quad ((6))$$

kde $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ je funkcia s periodou T , t.j. $f(t+T) = f(t)$ a my hľadáme riešenie $y(t)$, tak aby platilo $y(t) = y(t+T)$ pre každé $t \geq 0$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu (4) dostaneme

$$Y(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} + \frac{F_T(p)}{Q_n(p)(1 - e^{-pT})},$$

kde $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$ a $F_T(p)$ je Laplaceova transformácia funkcie $f_{(0,T)}(t)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$f_{(0,T)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t < 0, T \leq t \\ f(t) & \text{pre } 0 \leq t < T \end{cases}$$

a $P_{n-1}(p)$ je zatiaľ neznámy polynóm rádu $n-1$, ktorého koeficienty volíme tak, aby funkcia $y(t)$ bola periodická. Ak preformulujeme poslednú rovnicu, tak dostávame:

$$Y(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \left[\frac{F_T(p)}{Q_n(p)} + (1 - e^{-pT}) \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} \right],$$

t.j.

$$Y(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}},$$

kde

$$G(p) = \frac{F_T(p)}{Q_n(p)} + (1 - e^{-pT}) \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

a nech G je Laplaceova transformácia funkcie g , $G(p) = \mathcal{L}[g(t)]$. Originál $x(t)$ bude periodická funkcia s periodou T vtedy a len vtedy ak $g(t) = 0$ pre každé $t \geq T$. Potom podľa vety o obraze periodickej funkcie $x(t)$ má tvar

$$y(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pre } 0 \leq t < T \\ g(t - kT) & \text{pre } kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Example 98 *Nájdite periodické riešenie ZÚ*

$$x' + x = f(t), \quad t > 0; \quad x(0+) = 0$$

s periodickou pravou stranou $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ definovanou

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pre } 0 \leq t < 1 \\ t - k & \text{pre } k \leq t < k+1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Solution 99 *Funkcia f je periodická s periodou $T = 1$. Riešenie ZÚ budeme hľadať v tvare $x(t) = y(t) + z(t)$, $t > 0$ kde $y(t)$ je riešenie úlohy*

$$y' + y = f(t); \quad y(t+1) = y(t), \quad y(0+) = B, \quad \forall t > 0$$

a $z(t)$ je riešenie ZÚ

$$z' + z = 0; \quad z(0+) = -B; \quad t > 0.$$

Riešme najskôr prvú úlohu. Ak označíme

$$f_{\langle 0,1 \rangle}(t) = t[\Theta(t) - \Theta(t-1)] = t\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1), \quad t \in \mathbf{R},$$

tak

$$f_1(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p}e^{-p}$$

a pre $Y = \mathcal{L}[y]$ s podmienkou $y(0+) = B$, kde B určíme tak aby riešenie $y(t)$ bolo periodickou funkciou, dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{B}{p+1} + \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(p+1)(1 - e^{-p})} = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left[\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} - e^{-p} \left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left[\left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) - e^{-p} \left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2} \right) \right] = \frac{G(p)}{1 - e^{-p}}, \end{aligned}$$

kde

$$G(p) = \left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) - e^{-p} \left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2} \right)$$

a originál $g(t)$ musí byť taká funkcia, že $g(t) = 0$, pre $t > 1$. Originál $g(t)$ má tvar

$$g(t) = (B+1)e^{-t} + t - 1 - \Theta(t-1)[Be^{-(t-1)} + t - 1].$$

Potom pre $t > 1$ dostaneme:

$$g(t) = (B+1)e^{-t} + t - 1 - Be^{-(t-1)} - t + 1 = e^{-t}[B(1-e) + 1],$$

odkiaľ dostávame

$$B = \frac{1}{e-1},$$

teda periodické riešenie prvej rovnice má tvar

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{e-1} + t - 1 & \text{pre } 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^{k+1-t}}{e-1} + t - k - 1 & \text{pre } k \leq t < k+1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Teraz vyriešime druhú úlohu. Jej riešenie má tvar

$$z(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t}, \quad t > 0.$$

Potom riešenie pôvodnej ZÚ bude mať tvar

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} + t - 1 & \text{pre } 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^{k+1-t}}{e-1}e^{-t} + t - k - 1 & \text{pre } k \leq t < k+1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots \quad \square$$

Riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc.

Metódu, ktorú sme použili v predchádzajúcej časti pri riešení začiatočných úloh je možné aplikovať aj v prípade systémov obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. My sa obmedzíme iba na riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu tvaru:

$$\begin{aligned} x_1'(t) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) &= f_1(t) \\ x_2'(t) + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) &= f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) + a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) &= f_n(t) \end{aligned}, t > 0$$

so začiatočnými podmienkami

$$x_j(0+) = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Za predpokladu, že f_1, \dots, f_n sú rovné nule pre $t < 0$ a ak $X_j = \mathcal{L}[x_j]$, $F_j = \mathcal{L}[f_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ daný systém diferenciálnych rovníc transformujeme na tvar

$$\begin{aligned} (p + a_{11})X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n &= F_1 + b_1 \\ a_{21}X_1 + (p + a_{22})X_2 + \cdots + a_{2n}X_n &= F_2 + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + (p + a_{nn})X_n &= F_n + b_n \end{aligned}$$

Pretože determinant systému je rovný nule iba v konečnom počte bodov, môžeme úlohu riešiť pomocou Cramerovho pravidla. Potom dostaneme

$$X_j = \frac{D_j(p)}{D(p)}, j = 1, 2, \dots, n$$

kde

$$D(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}$$

a

$$D_j(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \cdots & F_1 + b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \cdots & F_2 + b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & F_n + b_n & \cdots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}$$

Originály dostaneme pomocou tých istých metód ako predtým.

Example 100 *Riešte ZÚ:*

$$\begin{aligned} x' - y &= 2, & x(0+) &= 0 \\ y' - x &= t, & y(0+) &= 1 \end{aligned}$$

Solution 101 *Ak označíme $X = \mathcal{L}[x]$, $Y = \mathcal{L}[y]$ potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$\begin{aligned} pX - Y &= \frac{2}{p} \\ -X + pY &= \frac{1}{p^2} - 1 \end{aligned}$$

odkiaľ

$$D(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1,$$

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{2}{p} & -1 \\ \frac{1}{p^2} - 1 & p \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{p^2},$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p & \frac{2}{p} \\ -1 & \frac{1}{p^2} - 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{p} - p,$$

odkiaľ

$$X(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p^2 - 1)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 1},$$

$$Y(p) = \frac{3 - p^2}{p(p^2 - 1)} = -\frac{3}{p} + \frac{1}{p - 1} + \frac{1}{p + 1}$$

a

$$x(t) = -t + e^{-t} - e^t, \quad y(t) = -3 - e^{-t} + e^t, \quad t > 0. \quad \square$$

Example 102 Riešte ZÚ:

$$\begin{aligned} x_1' + 2x_1 + x_2 &= \sin t, & x_1(0+) &= 0 \\ x_2' - 4x_1 - 2x_2 &= \cos t, & x_2(0+) &= 1 \end{aligned}$$

Solution 103 Ak označíme $X_1 = \mathcal{L}[x_1]$, $X_2 = \mathcal{L}[x_2]$ potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme

$$\begin{aligned} (p + 2)X_1 + X_2 &= \frac{1}{p^2 + 1} \\ -4X_1 + (p - 2)X_2 &= \frac{p}{p^2 + 1} + 1 \end{aligned}$$

odkiaľ

$$D(p) = \begin{vmatrix} p + 2 & 1 \\ -4 & p - 2 \end{vmatrix} = p^2,$$

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2 + 1} & 1 \\ \frac{p}{p^2 + 1} + 1 & p - 2 \end{vmatrix} = -\frac{p^2 + 3}{p^2 + 1},$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p + 2 & \frac{1}{p^2 + 1} \\ -4 & \frac{p}{p^2 + 1} + 1 \end{vmatrix} = \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 6}{p^2 + 1},$$

odkiaľ

$$X_1(p) = -\frac{p^2 + 3}{p^2(p^2 + 1)} = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2 + 1},$$

$$X_2(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 6}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - 2\frac{p}{p^2 + 1} - 3\frac{1}{p^2 + 1}$$

:

a

$$x_1(t) = -3t + 2 \sin t, \quad x_2(t) = 3 + 6t - 2 \cos t - 3 \sin t, \quad t > 0. \quad \square$$

Riešenie integrodiferenciálnych rovníc.

Skúmame lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s konštantnými koeficientami:

$$a_2 x'(t) + a_1 x(t) + a_0 \int_0^t x(s) ds = f(t), t > 0 \quad ((7))$$

$$x(0+) = b_0 \quad ((8))$$

Ak je funkcia f diferencovateľná, potom úlohu (7), (8) môžeme preformulovať na začiatočnú úlohu s diferenciálnou rovnicou druhého rádu:

$$a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f'(t), t > 0$$

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = \frac{f(0+) - a_1 b_0}{a_2}.$$

Takúto úlohu už dokážeme riešiť. My však pomocou Laplaceovej transformácie vieme úlohu (7), (8) riešiť aj priamo, pričom ak $F = \mathcal{L}[f]$ dostaneme

$$a_2 (pX - b_0) + a_1 X + a_0 \frac{X}{p} = F(p), \operatorname{Re} p > 0$$

t.j.

$$X(p) = \frac{p[F(p) + a_2 b_0]}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

odkiaľ originál určíme bežnými metódami.

Example 104 *Riešte ZÚ pre integrodiferenciálnu rovnicu:*

$$x'(t) + 2x(t) + 2 \int_0^t x(s) ds = 1, t > 0, x(0+) = 0.$$

Solution 105 *Nech $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$pX(p) + 2X(p) + 2 \frac{X(p)}{p} = \frac{1}{p},$$

odkiaľ máme

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Originál teraz možno určiť pomocou elementárnych pravidiel a dostávame:

$$x(t) = e^{-t} \sin t. \quad \square$$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 14 vypočítajte pomocou Laplaceovej transformácie riešenie začiatočnej úlohy:

$$1. \quad x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0, \quad x(0+) = -1, \quad x'(0+) = 2, \quad x''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-t} \cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t} \sin(2t) \right]$$

$$2. \quad x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 1, \quad x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = x'''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2} \sin t \right]$$

$$3. \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \right]$$

$$4. \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t} \right]$$

$$5. \quad x''(t) - x'(t) = te^t, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = e^t \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right) \right]$$

$$6. \quad x'(t) + x(t) = t^2e^{-t}, \quad x(0+) = a.$$

$$\left[x(t) = ae^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t} \right]$$

$$7. \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3e^{-2t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 2.$$

$$\left[x(t) = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^5}{20} \right) \right]$$

$$8. \quad x'''(t) - x''(t) = \sin t, \quad x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = -1 - t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \right]$$

$$9. \quad x'(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & t \in \langle 0, 2 \rangle \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = 1 - e^{-t} - \Theta(t-2)(1 - e^{-(t-2)}) \right]$$

$$10. \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = x'(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \Theta(t-1) \left[-2 + (t-1) + 2e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)} \right] \right]$$

$$11. \quad x''(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ b & t \in \langle 0, a \rangle \\ 2b & t \geq a \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = \Theta(t) [b + (1-b) \cos t] + \Theta(t-a) [b - b \cos(t-a)] \right]$$

$$12. \quad x''(t) + x(t) = |\sin t|, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

$$\left[X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})} + e^{-\pi p} \frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})}, \quad x(t) = \right]$$

13. $x'(t) + 3x(t) = e^{-t} + |\sin t|$, $x(0+) = 0$.

$$\left[X(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} + \frac{p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})} - e^{-\pi p} \frac{p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}, x(t) = \right]$$

14. $x'(t) + 2x(t) = Ae^{-t} + g(t)$, $x(0+) = 0$, kde $A = \frac{1}{1-e}$ a $g(t)$ je periodická s periódou 1, ktorá na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ je $g(t) = (1 - A)e^{-t}$.

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} - \frac{1}{1-e^2}e^{-2t} + h(t), \text{ kde } h(t) \text{ je periodická funkcia} \\ \text{s periódou 1, ktorá sa na intervale } \langle 0, 1 \rangle \text{ rovná} \\ h(t) = \left(1 - \frac{1}{1-e}\right)e^{-t} - \left(1 - \frac{1}{1-e^2}\right)e^{-2t}. \end{array} \right]$$

Z - transformácia.

Z-transformácia.

Motiváciou pre z-transformáciu je spracovanie diskretného signálu. Vzorkovanie, umožňuje použiť analytické operácie na diskretné objekty.

$$Z : (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Pre aké postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje v nejakom okolí nekonečna?

Theorem 106 Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje v nejakom okolí bodu $\infty \Leftrightarrow$ ak existujú konštanty $M \geq 0$ a $c \in \mathbf{R}$ tak, že $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$.

Predpokladajme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje vo vonkajšom kruhu $K(0, R_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R_0\}$. Jeho súčet $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ je na tejto oblasti analytická funkcia. Zvoľme kladne orientovanú kružnicu C so stredom v počiatku, ležiacu v $\{z \in \mathbf{C} : |z| > R_0\}$, t.j. s polomerom $R > R_0 > 0$.

Podľa integrálneho vyjadrenia koeficientov Laurentovho radu (tu je treba rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ interpretovať ako rad so stredom v počiatku) máme

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^{1-n}} \max_{z \in C} |F(z)| 2\pi R = \underbrace{R^n \max_{z \in C} |F(z)|}_{=M}.$$

$$|a_n| \leq Me^{n \ln R}.$$

Opačná implikácia: predpokladajme, že platí odhad $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{(e^c)^n}{z^n}$ je pre $|z| > e^c$ geometrický rad s absolutnou hodnotou kvocientu $\frac{e^c}{|z|} < 1$.

Podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje $\forall |z| > e^c$.

Označme Z_0 množinu všetkých komplexných postupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ktoré sú najviac exponenciálneho rastu, t.j. $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$, kde $M \geq 0, c \in \mathbf{R}$, čo je ekvivalentné s tým, že pre $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0 \exists M \geq 0$ a $a > 0$ tak, že $|a_n| \leq Ma^n, \forall n$.

Máme:

- Každá ohraničená postupnosť je zo Z_0 ,
- Každá postupnosť $(p(n))_{n=0}^{\infty}$, kde p je polynóm, je zo Z_0 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0$, teda napríklad $|p(n)| \leq e^n$ pre dostatočne veľké n .
- Vzorkovanie kvázipolynómu je zo Z_0 ,

- $(n^n)_{n=0}^\infty \notin Z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{e^{cn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(\ln n - c)} = \infty$,
- $(n!)_{n=0}^\infty \notin Z_0$, Podielové kritérium pre rad $\sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{z^n}$ dáva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \cdot \frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{|z|} = \infty, n \rightarrow \infty$. Nekonverguje v žiadnom bode.

Definition 107 *Z-obraz postupnosti* $(a_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$ je funkcia $F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}$.

Označenie: $Z(a_n)_{n=0}^\infty = F(z)$, $(a_n)_{n=0}^\infty \stackrel{\circ}{=} F(z)$. Označme K_0 je množina funkcií analytických v okolí ∞ , ktoré majú v ∞ vlastnú limitu.

Theorem 108 *Z-transformácia je prosté zobrazenie množiny* Z_0 *na množinu* K_0 .

Veta o Laurentovom rozvoji analytickej funkcie.

Example 109 $(a_n)_{n=0}^\infty = (1, 2, 0, 4, 0, 0, \dots)$. Nájďime $F(z)$.

Solution 110 $F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^3}, z \neq 0$.

Example 111 $(a_n)_{n=0}^\infty = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{index } m}, 0, 0, \dots) = (\delta_{mn})_{n=0}^\infty$.

Solution 112 $F(z) = \frac{1}{z^m}$.

Example 113 $(a_n)_{n=0}^\infty = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^\infty$. Nájďime $F(z)$.

Solution 114 $F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}, z \neq 0$.

Example 115 $(a_n)_{n=0}^\infty = (c)_{n=0}^\infty$. Nájďime $F(z)$.

Solution 116 $F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c}{z^n} = c \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{cz}{z-1}, |z| > 1$.

Example 117 $(a_n)_{n=0}^\infty = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Nájďime $F(z)$.

Solution 118 $F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \dots = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2-1}, |z| > 1$.

Example 119 Vieme, že sa postupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$ zobrazí na funkciu $F(z)$. Aká postupnosť sa zobrazí na funkciu $F(z^2)$?

Solution 120 $F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}$, $F(z^2) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{(z^2)^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^{2n}}$, teda $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$ má Z-obraz $F(z^2)$.

Example 121 $(a_n)_{n=0}^\infty = (a^n)_{n=0}^\infty, a \in \mathbb{C}$. Nájďime $F(z)$.

Solution 122 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|.$

Theorem 123 *Základná gramatika Z-transformácie: Predpokladajme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, pričom $Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$. Potom platí*

1. *Linearita* $Z(c_1 a_n + c_2 b_n)_{n=0}^{\infty} = c_1 Z(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 Z(b_n)_{n=0}^{\infty}$ pre ľubovoľné $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

2. *(Multiplikácia)* $Z(a^n a_n)_{n=0}^{\infty} = F\left(\frac{z}{a}\right)$, pre všetky $a \neq 0$.

3. *(Derivácia obrazu)* $Z(n a_n)_{n=0}^{\infty} = -z F'(z)$.

1. $Z(c_1 a_n + c_2 b_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1 a_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_2 b_n}{z^n} = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = c_1 Z(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 Z(b_n)_{n=0}^{\infty}.$

2. $Z(a^n a_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{z}{a}\right)^n} = Z\left(\frac{z}{a}\right)_{n=0}^{\infty}.$

3. $F'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n a_n}{z^{n+1}}$, potom $-z F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{z^{n+1}} = Z(n a_n)_{n=0}^{\infty}.$

Example 124 $(c + 2a^n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $F(z)$.*

Solution 125 $Z(c + 2a^n)_{n=0}^{\infty} = Z(c)_{n=0}^{\infty} + 2Z(a^n)_{n=0}^{\infty} = \frac{cz}{z-1} + 2\frac{z}{z-a}, |z| > \max\{1, |a|\}.$ □

Example 126 $(\sin \omega n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $Z(\sin \omega n)_{n=0}^{\infty}$.*

Solution 127 $\sin \omega n = \frac{1}{2i}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})$. $F(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z(z-e^{-i\omega}) - z(z-e^{i\omega})}{(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})} \right) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$ □

Example 128 $(a^n \sin \omega n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $Z(a^n \sin \omega n)_{n=0}^{\infty}$.*

Solution 129 $Z(a^n \sin \omega n)_{n=0}^{\infty} = \frac{\left(\frac{z}{a}\right) \sin \omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{a}\right) \cos \omega + 1} = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}.$ □

Example 130 $(n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $Z(n)_{n=0}^{\infty}$.*

Solution 131 $Z(n)_{n=0}^{\infty} = -z \left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}.$ □

Example 132 $(n^2)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $Z(n^2)_{n=0}^{\infty}$.*

Solution 133 $Z(n^2)_{n=0}^{\infty} = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$ □

Takto možno nájsť obraz každého polynómu.

Example 134 $(a^n n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime $Z(a^n n)_{n=0}^{\infty}$.*

Solution 135 $Z(a^n n)_{n=0}^{\infty} = \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$ □

Theorem 136 (Posun doprava) Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a k je nezáporné celé číslo.

Definujme postupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ vztahom $b_n = \begin{cases} a_{n-k}, & \text{ak } n \geq k \\ 0, & \text{ak } n < k \end{cases}$. Potom $Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{z^k} F(z)$, kde $F(z)$ je obraz $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Tiež: $(a_{n-k} \mathbf{1}(n-k))_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{1}{z^k} F(z)$.

$$\left(\overbrace{0, \dots, 0}^k, a_0, a_1, \dots \right) \doteq \frac{1}{z^k} F(z).$$

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \frac{a_2}{z^{k+2}} + \dots = \frac{1}{z^k} (a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots) = \frac{1}{z^k} F(z).$$

Example 137 $(0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$. Nájďime $F(z)$.

Solution 138 $(1)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}$, potom $(0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots) \doteq \frac{1}{z^3} \frac{z}{z-1}$. \square

Theorem 139 (Posun doľava) Predpokladajme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ má Z -obraz $F(z)$ a k je celé nezáporné číslo. Definujme postupnosť $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ rovnosťou $b_n = a_{n+k}$, $n = 0, 1, \dots$. Potom $Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right]$.

$$(a_k, a_{k+1}, \dots) \doteq z^k F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \dots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}.$$

$$\begin{aligned} Z(b_n)_{n=0}^{\infty} &= a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \dots = z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right] = z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right) = \\ &= z^k \left(\frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{z^{k+3}} + \dots \right) = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

Example 140 $(\sin 5\omega, \sin 6\omega, \dots)$

Solution 141 $F(z) = z^5 \left[\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} - \frac{\sin \omega}{z} - \frac{\sin 2\omega}{z^2} - \frac{\sin 3\omega}{z^3} - \frac{\sin 4\omega}{z^4} \right]$. \square

Example 142 $((n+3)^2)_{n=0}^{\infty}$

Solution 143 $(n^2)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$, potom $F(z) = z^3 \left[\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - 0 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2} \right] = \frac{z^5+z^4}{(z-1)^3} - z^2 - 4z$. \square

Diferencia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je definovaná: $\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}$.
Diferencie vyšších rádo: $\Delta^k(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta \Delta^{k-1}(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Example 144 Pre $\Delta^2(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta(a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n))_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)_{n=0}^{\infty}$, tak

$$\Delta(n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty}, \quad \Delta^2(n)_{n=0}^{\infty} = (0)_{n=0}^{\infty}.$$

Theorem 145 Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ má Z -obraz $F(z)$. Potom $Z(\Delta a_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)F(z) - za_0$.

$$\begin{aligned} (a_{n+1})_{n=0}^{\infty} &= (a_1, a_2, \dots) = z[F(z) - a_0]. \\ \Delta(a^n)_{n=0}^{\infty} &\doteq zF(z) - za_0 - F(z). \end{aligned}$$

Definition 146 Predpokladajme, že $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$. Konvolúciou týchto postupností je postupnosť $(c_n)_{n=0}^\infty = (a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty$, definovaná vzťahom $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $n = 0, 1, \dots$, $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

Example 147 $(1)_{n=0}^\infty * (1)_{n=0}^\infty = (n+1)_{n=0}^\infty$

Example 148 $(1)_{n=0}^\infty * (e^n)_{n=0}^\infty = (1, 1+e, 1+e+e^2, \dots)$

Example 149 Čo je konvolúciou s postupnosťou $(0, 1, 0, 0, \dots)$?

Solution 150 $(0, 1, 0, 0, \dots) * (a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$.

Example 151 Čo je konvolúciou s postupnosťou $(\delta_{kn})_{n=0}^\infty$?

Solution 152 $(0, 0, 0, \dots, \underset{k}{1}, 0, 0, \dots) * (a_0, a_1, a_2, \dots) = (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots)$ je posun doprava o k -pozícií..

Theorem 153 (Veta o konvolúcii) Predpokladajme, že $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$, $Z(a_n)_{n=0}^\infty = F(z)$, $Z(b_n)_{n=0}^\infty = G(z)$. Potom

$$Z[(a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty] = F(z)G(z).$$

$$F(z)G(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^k} \cdot \sum_{m=0}^\infty \frac{b_m}{z^m} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k})}{z^n} = Z[(a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty]$$

Example 154 $(n+1)_{n=0}^\infty = (1)_{n=0}^\infty * (1)_{n=0}^\infty \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{z}{z-1}\right)^2$. \square

Example 155 $(1)_{n=0}^\infty * (e^n)_{n=0}^\infty \stackrel{\circ}{=} \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}$. \square

Example 156 Určte posloupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$, pre ktorú platí $(a_n)_{n=0}^\infty * (2^n)_{n=0}^\infty = (4^n)_{n=0}^\infty$.

Solution 157 $Z(a_n)_{n=0}^\infty \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-4} \implies Z(a_n)_{n=0}^\infty = \frac{z-2}{z-4} = 1 + \frac{2}{z-4} \stackrel{\circ}{=} (\delta_{n0} + 2 \cdot \mathbf{1}(n-1)4^{n-1})_{n=0}^\infty = (1, 2, 8, 32, \dots)$. \square

Example 158 Pre akú postupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$ platí, že $(a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty = (b_n)_{n=0}^\infty$ pre všetky $(b_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$.

Solution 159 $F(z) \cdot G(z) = G(z) \implies F(z) = 1 \implies (a_n)_{n=0}^\infty = (1, 0, 0, \dots)$. \square

Corollary 160 Konvolučný súčin je komutatívny, asociatívny a má jednotkový prvok.

Význam konvolúcie.

$$L : Z_0 \rightarrow Z_0$$

vstup \longrightarrow výstup

1. L je translačne invariantný, tj. ak $L(a_n)_{n=0}^\infty = (b_n)_{n=0}^\infty$, potom $L(\mathbf{1}(n-k)a_{n-k})_{n=0}^\infty = (\mathbf{1}(n-k)b_{n-k})_{n=0}^\infty$.

2. L je lineárny, tj. $L(c_1(a_n)_{n=0}^\infty + c_2(b_n)_{n=0}^\infty + \dots) = c_1L(a_n)_{n=0}^\infty + c_2L(b_n)_{n=0}^\infty + \dots$
Predpokladajme, že

$$L(1, 0, \dots) = (b_0, b_1, \dots)$$

vstup:

$$a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, 0, \dots) + \dots$$

výstup:

$$a_0 \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) +$$

$$a_1 \cdot (0, b_0, b_1, b_2, \dots) +$$

$$a_2 \cdot (0, 0, b_0, b_1, \dots) + \dots$$

$$(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots)$$

Záver: Odozva na $(a_n)_{n=0}^\infty$ je $(a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty = (a_n)_{n=0}^\infty * L(1, 0, 0, \dots)$ alebo $L(a_n)_{n=0}^\infty = (a_n)_{n=0}^\infty * L(1, 0, 0, \dots)$.

Theorem 161 Ak je $Z(a_n)_{n=0}^\infty = F(z)$, potom $Z(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^\infty = \frac{zF(z)}{z-1}$.

$$(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^\infty = (a_n)_{n=0}^\infty * (1)_{n=0}^\infty = \frac{z}{z-1} F(z).$$

Example 162 $Z(\sum_{k=0}^n k) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3} \cdot \square$

Inverzná Z-transformácia.

$$Z^{-1} : K_0 \rightarrow Z_0, \quad F(z) \mapsto (a_n)_{n=0}^\infty, \quad F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}.$$

Metódy výpočtu:

- rozvoj do Laurentovho radu
- integrálna forma koeficientov, veta o rezíduách $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica so stredom v počiatku, ležiaci v oblasti, kde je obraz analytický.

Podľa vety o rezíduách: $a_n = \sum_{z_i} \text{res}_{z_i}(F(z)z^{n-1})$. Suma cez singularity ležiace vo vnútri C .

- priame vzorce $a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$, $a_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - a_0)$, $a_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z})$,
- $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)!} [z^n F(z)]^{(n+1)}$.
- známe obrazy
- konvolúcia

Example 163 $F(z) = \sin \frac{1}{z}$

Solution 164 $\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$, $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$, $a_{2n} = 0$.

Example 165 $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}$

Solution 166 $F(z) = \frac{1}{1-e} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e} \right)$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \stackrel{\circ}{=} (0, 1, 1, \dots),$$

$$\frac{1}{z-e} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-e} \stackrel{\circ}{=} (0, 1, e, e^2, \dots),$$

$$Z^{-1}F(z) = \frac{1}{1-e} (0, 0, 1 - e, 1 - e^2, \dots).$$

Example 167 $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}$.

Solution 168 *Metódou reziduí:* $a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$,
 $n \geq 1$, $a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} + \operatorname{res}_e \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} = \frac{1}{1-e} + \frac{e^{n-1}}{e-1} = \frac{1-e^{n-1}}{1-e}$. \square

Example 169 $F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$.

Solution 170 $F(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{(z-1)^2} \doteq (0, 0, 1, 2, 3, \dots)$.

pomocou reziduí: $n \geq 1$
 $a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} z^{n-1} = n - 1$. \square

Example 171 *Pomocou Z transformácie nájdime súčet* $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2$.

Solution 172 $(n^2) \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$, $\sum_{k=0}^n k^2 \doteq \frac{z}{z-1} \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}$,
 $\operatorname{res}_1 \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{3!} (z^{n+2} + z^{n+1})^{(3)} = \frac{1}{3!} [(n+2)(n+1)n + (n+1)n(n-1)] = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Aplikácia z-transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc.

Diferenčné rovnice.

Motivácia: teória signálov, numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc, reťazové siete, ... Diferenčné rovnice majú podobnú štruktúru ako diferenciálne rovnice, hľadá sa riešenie v tvare postupnosti, ktorá vyhovuje začiatočným podmienkam. Riešenie týchto rovníc pomocou Z transformácie je diskretnou analógiou riešenia diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie.

Example 173 $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$, $y_0 = y_1 = 1$. (*homogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami*)

Solution 174 *Riešme diferenciálnu rovnicu:*

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq Y(z), \quad (y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \doteq z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1),$$

$$(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} \doteq z^2[Y(z) - y_0 - y_1 z] = z^2[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}] = z^2 Y(z) - z^2 - z. \square$$

Riešime transformáciu rovnice:

$$z^2 Y(z) - z^2 - z + 2z Y(z) - 2z + Y(z) = 0 \implies Y(z)(z^2 + 2z + 1) = z^2 + 3z.$$

$$Y(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2}.$$

Urobíme inverznú transformáciu:

$$n \geq 1, \quad y_n = \operatorname{res}_{-1} \left[\frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2} z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} [(n+1)z^n + 3nz^{n-1}] =$$

$$= (n+1)(-1)^n + 3n(-1)^{n-1} = (-1)^n (1 - 2n).$$

Potom $(y_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -3, 5, \dots)$. *V mnohých prípadoch dáva takýto výpočet lepšiu predstavu než numerický výpočet, v ktorom sa hromadia zaokrouhľovacie chyby.* \square

Example 175 *Riešme diferenciálnu rovnicu* $y_{n+2} = \frac{10}{3}y_{n+1} - y_n$, $y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{3}$.

Solution 176 $(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq Y(z)$, $(y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \doteq z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1)$,
 $(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} \doteq z^2[Y(z) - y_0 - y_1z] = z^2[Y(z) - 1 - \frac{1}{3}z] = z^2Y(z) - z^2 - \frac{1}{3}z$.

Riešime transformáciu rovnice:

$$z^2[Y(z) - 1 - \frac{1}{3}z] = \frac{10}{3}z[Y(z) - 1] - Y(z) \implies \\ \implies Y(z)(z^2 - \frac{10}{3}z + 1) = z^2 + \frac{z}{3} - \frac{10z}{3} = z^2 - 3z,$$

$$Y(z) = \frac{(z^2 - 3z)}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} = \frac{z}{(z-\frac{1}{3})} \doteq \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n=0}^{\infty}.$$

Ak urobíme numerický výpočet na tri platné číslice dostaneme nezmyselné výsledky:

$$y_0 = 1, y_1 = 0, 333, \dots,$$

$$y_6 = -0,092, \dots, y_{10} = -5,65.$$

Example 177 *Fibonacciho čísla. Fibonacci v diele Liber Abaci (1212). Úloha o populácii králikov: každý pár sa zreprodukuje po dvoch mesiacoch: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Postupnosť sa riadi zákonom:*

$$\underbrace{y_{n+2}}_{\text{čo bude}} = \underbrace{y_{n+1}}_{\text{čo je}} + \underbrace{y_n}_{\text{prírastok}}, y_0 = y_1 = 1.$$

Solution 178 Transformácia rovnice: $z^2[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}] = z[Y(z) - 1] + Y(z) \implies$
 $(z^2 - z - 1)Y(z) = z^2 \implies Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$

$$\text{Inverzia: } \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = z \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}z \left(\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) \Delta$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Binet (1786-1856). Kombinácia dvoch geometrických radov, jeden z nich mizne v nekonečne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803 \text{ súvisí s pomerom zlatého rezu.} \square$$

Example 179 Riešme diferenčnú rovnicu $\Delta^2 y_n + y_n = 0$, $y_0 = 1$, $\Delta y_0 = 0$.

Solution 180 $\Delta(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq (z-1)Y(z) - z$,

$$\Delta^2(y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)[(z-1)Y(z) - z] - 0 = (z-1)^2 Y(z) - z(z-1)$$

$$[(z-1)^2 + 1]Y(z) = z(z-1) \implies Y(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^2 + 1} = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 2} = z \frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)} = \\ \frac{1}{2}z \left(\frac{1}{z-1-i} + \frac{1}{z-1+i} \right).$$

$$y_n = \frac{1}{2}[(1+i)^n + (1-i)^n] = \text{Re}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}. \square$$

Example 181 Riešme diferenčnú rovnicu $\Delta^2 y_n = 2$, $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = 1$.

Solution 182 $\Delta^2(y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)^2 Y(z) - z \implies Y(z)(z-1)^2 = 2 \frac{z}{z-1} + z$.

$$Y(z) = 2 \frac{z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} \implies \text{res}_1 \frac{z^n}{(z-1)^3} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2}(z^n)^{(2)} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$y_n = n(n-1) + n = n^2. \square$$

Example 183 Rovnica s konvolučným jadrom $y_{n+2} + \sum_{k=0}^n 2^k y_{n-k} = 1$, $y_0 = y_1 = 0$.

Solution 184 $z^2 Y(z) + \frac{z}{z-2} Y(z) = \frac{z}{z-1} \implies Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^3} \implies y_n = \text{res}_1 \frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-1)^3} = \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2}(z^n - 2z^{n-1})^{(2)} = \\ = \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)(n-2) = (n-1) \left[2 - \frac{n}{2} \right]. \square$

Example 185 Vyjadrieme vzorcom riešenie diferenciálnej rovnice $y_{n+1} - 2y_n = a_n$, kde $y_0 = 0$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť zo Z_0 .

Solution 186 Transformácia: $zY(z) - 2Y(z) = F(z)$, kde $F(z) = Z((a_n)_{n=0}^{\infty})$.

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z-2} \stackrel{\circ}{=} (\mathbf{1}(n-1)2^{n-1})_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

$$\text{Pre } n \geq 1 \quad y_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{n-k}. \square$$

Example 187 Riešme diferenciálnu rovnicu $y_{n+3} + y_n = a_n$, $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

Solution 188 Transformácia: $z^3Y(z) + Y(z) = F(z)$, kde $F(z) = Z((a_n)_{n=0}^{\infty})$.

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^3+1}, \quad \frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{3(n+1)}} \stackrel{\circ}{=} (0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, \dots)$$

$$y_n = a_{n-3} - a_{n-6} + a_{n-9} - \dots \square$$

Example 189 Pomocou diferenciálnych rovníc určte súčet $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$.

Solution 190 $y_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$. Teda $y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, $y_0 = 0$.

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\circ}{=} \frac{2z}{(2z-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2},$$

$$\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}, \quad zY(z) - Y(z) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} \implies Y(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)} \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\text{res}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)} \frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 2. \quad \text{res}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)} \frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)^{(1)} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)z^n(z-1) - z^{n+1}}{(z-1)^2}\right) = 2 \left[\frac{n+1}{2^n} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = -\frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

$$y_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n} \square$$

Cvičenia.

V úlohách nájdite Z-obrazy nasledujúcich postupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

$$1. (a_n)_{n=0}^{\infty} = (e^{-n} + 2^{\frac{n}{2}})_{n=0}^{\infty}.$$

$$\left[\frac{ez}{ez-1} + \frac{z}{z-\sqrt{2}} \right]$$

$$2. (a_n)_{n=0}^{\infty} = (3^n \cos 2n)_{n=0}^{\infty}.$$

$$\left[\frac{z(z-3 \cos 2)}{z^2-6z \cos 2+9} \right]$$

$$3. (a_n)_{n=0}^{\infty} = (n2^n)_{n=0}^{\infty} \cdot \left[\frac{2z}{(z-2)^2} \right]$$

$$4. (a_n)_{n=0}^{\infty} = (3^{n+1})_{n=0}^{\infty} \cdot \left[\frac{3z}{z-3} \right]$$

$$5. (a_n)_{n=0}^{\infty} = (n+2)_{n=0}^{\infty}.$$

$$\left[\frac{z(2z-1)}{(z-1)^2} \right]$$

Nájdite postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, ktorej obraz je vyjadrený predpisom:

$$6. \frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

$$[a_0 = 0, a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}]$$

$$7. \frac{z}{z^2+1} \cdot \left[(\sin \frac{n\pi}{2})_{n=0}^{\infty} \right]$$

$$8. \frac{z+1}{z(z^2+2z+2)} \cdot [a_0 = 0, a_n = (\frac{1}{2} - i)(1+i)^{n-1} + (\frac{1}{2} + i)(1-i)^{n-1}, n \in \mathbf{N}]$$

$$9. \frac{z}{(z^4-1)} \cdot \left[\frac{1+(-1)^{n-1}}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right].$$

Riešme ZÚ pre diferenčné rovnice:

$$10. y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0, y_0 = 1, y_1 = 4. \left[(2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{2} + 3 \sin \frac{n\pi}{2}))_{n=0}^{\infty} \right]$$

$$11. y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n = e^n, y_0 = 0, y_1 = 1. \left[\frac{e-2}{5(e-1)} + \frac{e^n}{e^2+3e+4} - (-4)^n \frac{3+e}{5(e+4)} \right]$$

$$12. y_{n+1} + 2y_n = a_n, y_0 = 0, a_n = \begin{cases} n, & \text{ak } n < 4 \\ 0, & \text{ak } n \geq 4 \end{cases}.$$

$$[y_0 = y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, y_n = 3(-2)^{n-4}, n > 3.]$$

BIBLIOGRAPHY

- [1] Galanová, J., Gatial, J., Kaprálik, P.: Lineárna algebra, STU Bratislava, 2002
- [2] Marko L.: Matematická analýza online, 2001,
<http://www.aladin.elf.stuba.sk/~marko>
- [3] Stroud,K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993
- [4] Šulka, R., Moravský, L., Satko, L.: Matematická analýza I, Alfa, SNTL, Bratislava 1986
- [5] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008
- [6] Fisher S.D.: Complex Variables, (second edition), Wadsworth&Brooks/Cole, London, 1990